الفصل الأول المعادلات والمتباينات

خصائص الأعداد الحقيقية 1 - 1

الأعداد الحقيقية :

تتضمن الأعداد الحقيقية مجموعات مختلفة من الأعداد :

- **الأعداد النسبية (Q) :** هي الأعداد التي يمكن كتابتها علي الصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a , b عددان صحيحان، والعدد b لايساوي صفرا، وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عددا عشريا منتهيا أو دوريا
- **الأعداد غير النسبية (I) :** هي الأعداد التي علي الصورة العشرية وتكون غير منتهية أو غير دورية ، لذلك فإن الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد عير نسبية
- **مجموعة الأعداد الصحيحة (Z):** هي { ،،،، , 3 , 2 , 1 , 0 , 1- , 2- , 3- , ،،،،، }
- **مجموعة الأعداد الكلية (W):** هي { ،،،، , 3 , 2 , 1 , 0 }
- **مجموعة الأعداد الطبيعية (N):** هي { ،،،، , 3 , 2 , 1 }

،،

خصائص الأعداد الحقيقية : يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقية

ملخص المفهوم — خصائص الأعداد الحقيقية

لأي أعداد حقيقية a, b , c

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a , a \neq 0$
الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي	$a \cdot b$ عدد حقيقي
التوزيع	$a(b + c) = a b + ac , (b + c) a = b a + ca$	

،،

1) حدد مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :

1) -185 (Z , Q , R) 2) $-\sqrt{49}$ (Z , Q , R)

3) $\sqrt{95}$ (I , R) 4) $\frac{7}{8}$ (Q , R)

---

2) بسط العبارة : $3(4x - 2y) - 2(3x + y)$ [6x – 8y]

---

3) بسط كل عبارة مما يأتي :

1) $8b - 3c + 4b + 9c$ [12b – 6c]
2) $-2\alpha + 9d - 5\alpha - 6d$ [– 7α + 3d]
3) $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$ [40x – 20y]
4) $6(9\alpha - 3b) - 8(2\alpha + 4b)$ [38α – 50b]
5) $-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k)$ [28g – 48k]
6) $-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z)$ [– 74x +2z]

---

4) أوجد النظير الجمعي والنظير ألضربي لكل عدد مما يأتي :

1) -8 (8 ، $-\frac{1}{8}$) 2) 12·1 (– 12·1 ، $\frac{1}{12\cdot1}$)

3) – 0·25 (0·25 ، – 4) 4) $\frac{6}{13}$ ($-\frac{6}{13}$ ، $\frac{13}{6}$)

5) $-\frac{3}{8}$ ($\frac{3}{8}$ ، $\frac{8}{3}$) 6) $\sqrt{15}$ ($-\sqrt{15}$ ، $\frac{1}{\sqrt{15}}$)

---

5) حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :

1) $-\frac{4}{3}$ (Q , R) 2) – 8·13 (I , R)

3) $\sqrt{25}$ (N , W , Z , Q , R) 4) 0/·61 (Q , R)

5) $\frac{9}{3}$ (N , W , Z , Q , R) 6) $-\sqrt{144}$ (Z , Q , R)

7) $\frac{21}{7}$ (N , W , Z , Q , R) 8) $\sqrt{17}$ (I , R)

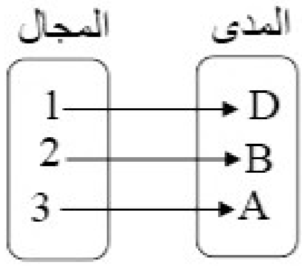
العلاقات والدوال 2 ـ 1

العلاقات والدوال : تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدي

مفهوم أساسي **الدالة المتباينة**

الدالة المتباينة

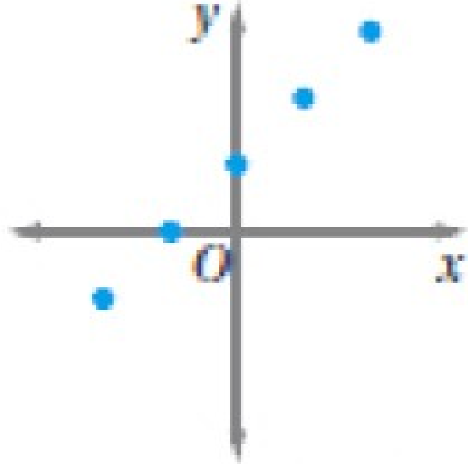
كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدي أي أنه لايرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى



ملاحظة :

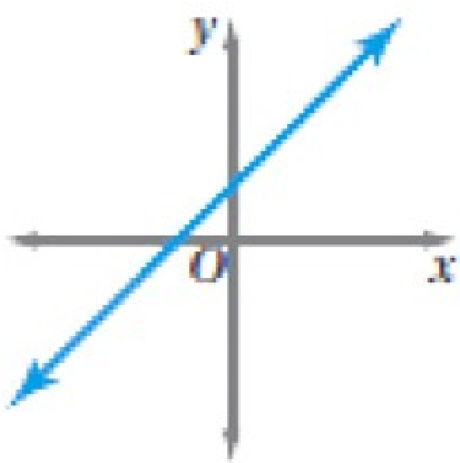
العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة مثل العلاقة A أدناه تسمي علاقة منفردة ولاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة ، وإذا احتوي مجال العلاقة عددا لانهائيا من العناصر وأمكن تمثيلها بيانيا بمستقيم أو بمنحني متصل فإنها تكون علاقة متصلة

العلاقة A



علاقة منفصلة

العلاقة B



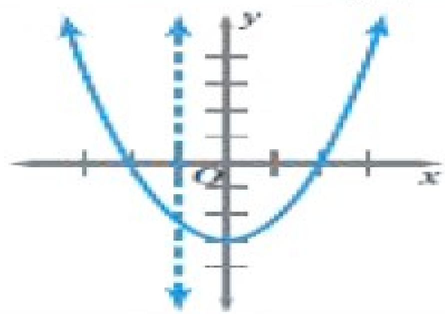
علاقة متصلة

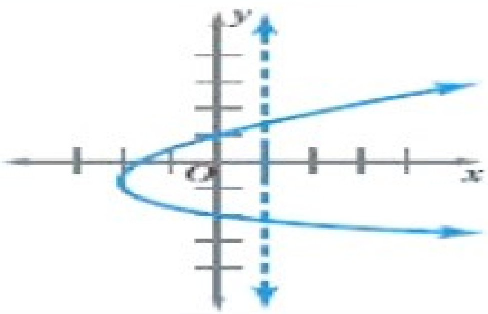
مفهوم أساسي **اختبار الخط الرأسي**

التعبير اللفظي : إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة فالعلاقة دالة

إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر فالعلاقة ليست دالة

النموذج :





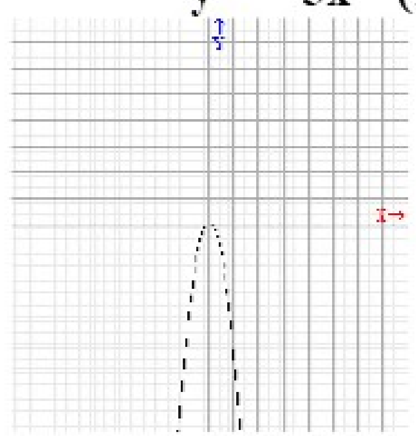
معادلات العلاقات والدوال :

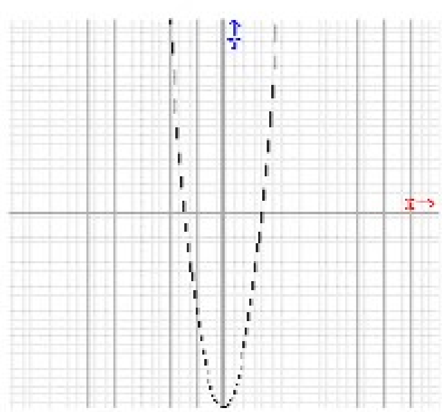
يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x , y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x , y) التي تحقق المعادلة ، ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني

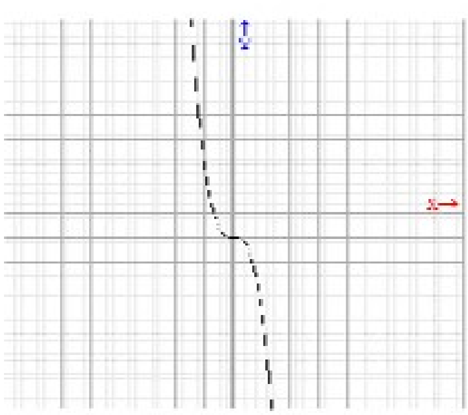
---

1) مثل كل معادلة فيما يأتي بيانيا ، ثم حدد مجالها ومداها ، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا ، وإذا كانت كذلك ، فهل هي متباينة أم لا ؟ ثم حدد إن كانت منفصلة أم متصلة

1) $y = -5x^2$ **2)** $y = 4x^2 - 8$ **3)** $y = -3x^3 - 1$







1) المجال = R ، المدى = $\{ y \mid y \leq 0 \}$ ، دالة ، متصلة ، ليست متباينة

2) المجال = R ، المدى = $\{ y \mid y \geq -8 \}$ ، دالة ، متصلة ، ليست متباينة

3) المجال = R ، المدى = R ، دالة ، متصلة ، متباينة

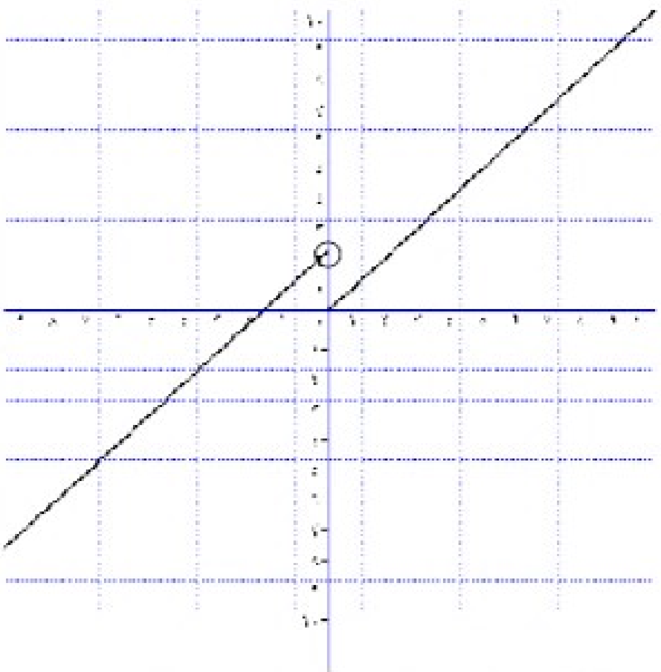
دوال خاصة 3 ـ 1

الدالة المتعددة التعريف :

هي دوال معرفة بأكثر من قاعدة منها المتصلة ومنها المنفصلة وتوضع دائرة غير مظللة في التمثيل البياني عند النقطة التي لاتنتمي إلي التمثيل البياني

1) مثل الدالة : $f(x) = \begin{cases} x + 2 , x<0 \\ x \quad , x\geqslant 0 \end{cases}$ بيانيا ، ثم حدد كلا من مجالها ومداها

الحل :



1)مثل$f(x) = x + 2$ عندما $x<0$ ، $f(0) =2$

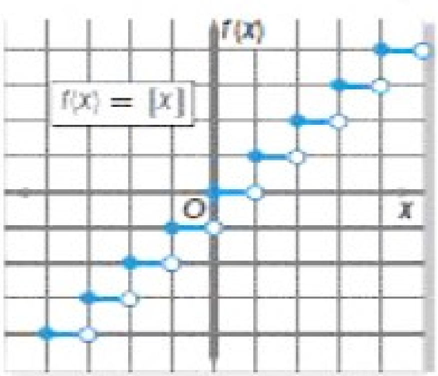
العدد 0 لايحقق المتباينة لذا نرسم دائرة غير مظللة عند النقطة $(0, 2)$

2) مثل$f(x) = x$ عندما $x\geqslant 0$ ، $f(0) =0$

العدد 0 يحقق المتباينة لذا نرسم دائرة مظللة عند النقطة $(0, 0)$

3) الدالة معرفة عند جميع قيم x لذا نجد المجال والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقيةR

*** الدالة الدرجية :** (دالة أكبر عدد صحيح)



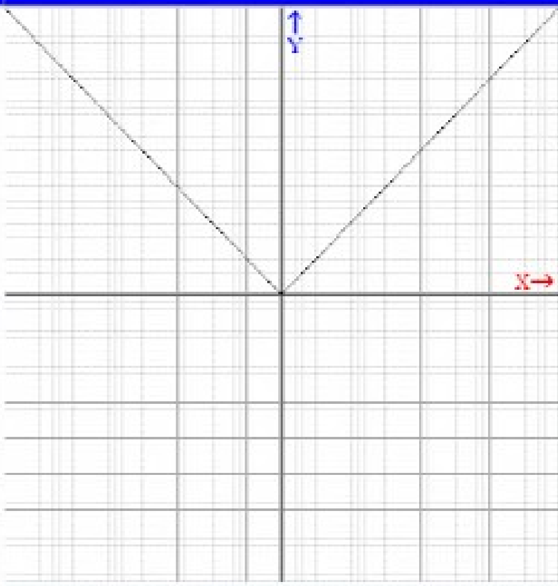
تتكون من قطع مستقيمة أفقية وتكتب الدالة علي الصورة $f(x) = [\,x\,]$ حيث يعني [x] أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x

فعلي سبيل المثال :

$[\,3 \cdot 25\,] = 3$ وكذلك $[\,- 4 \cdot 6\,] = - 5$

* * دالة القيمة المطلقة :

مفهوم أساسي



دالة القيمة المطلقة الأساسية

الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = |x|$ وتعرف علي النحو الآتي :

$$f(x) = \begin{cases} x , & x > 0 \\ 0 , & x = 0 \\ -x , & x < 0 \end{cases}$$

شكل التمثيل البياني : علي شكل حرف v

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

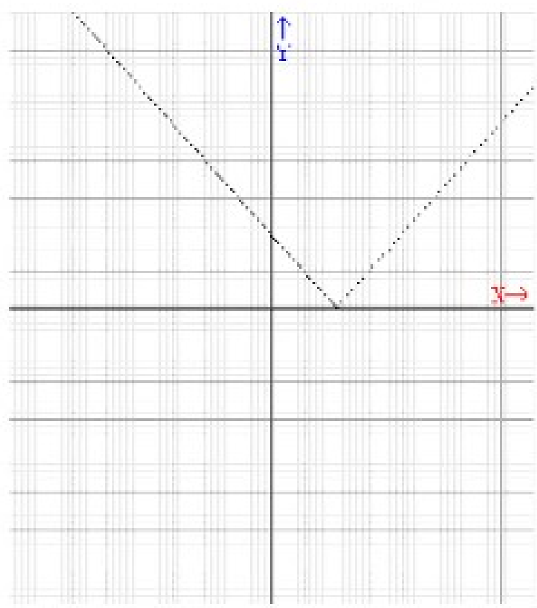
المدي : مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان : $x = 0 , f(x) = 0$ ، ولايمكن أن تكون $f(x) < 0$

‘‘

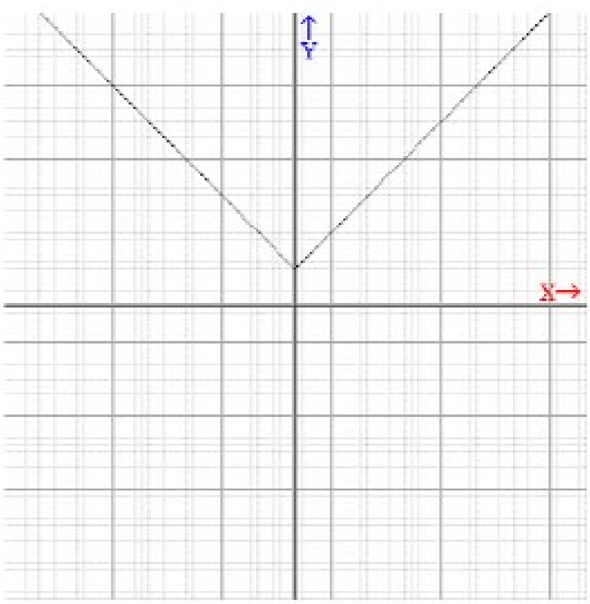
مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، ثم حدد كلا من مجالها ومداها :

1) $f(x) = |x - 2|$



المجال : R ، المدي = [0 ، ∞)

2) $f(x) = |x| + 1$



المجال : R ، المدي = [1، ∞)

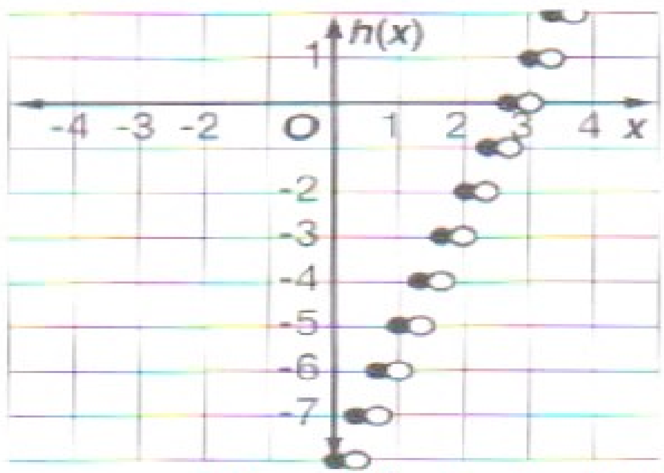
‘‘

مثل كل دالة فيما يأتي بيانيا ، ثم حدد كلا من مجالها ومداها :

1) $f(x) = [\,x\,] - 6$

1) المجال : R ، ألمدي = Z

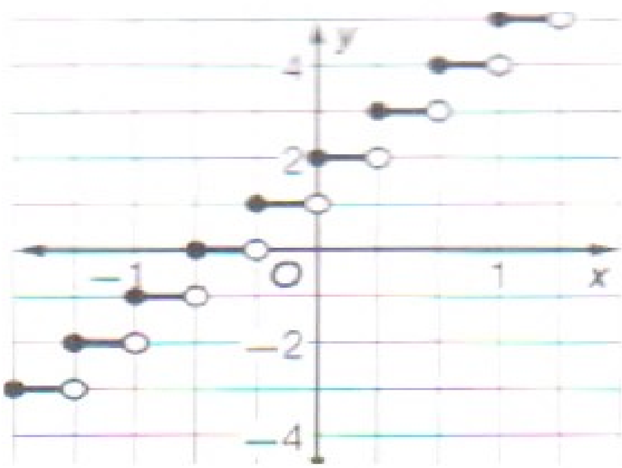
2) $h(x) = [\,3x\,] - 8$



2) المجال : R ، ألمدي = Z

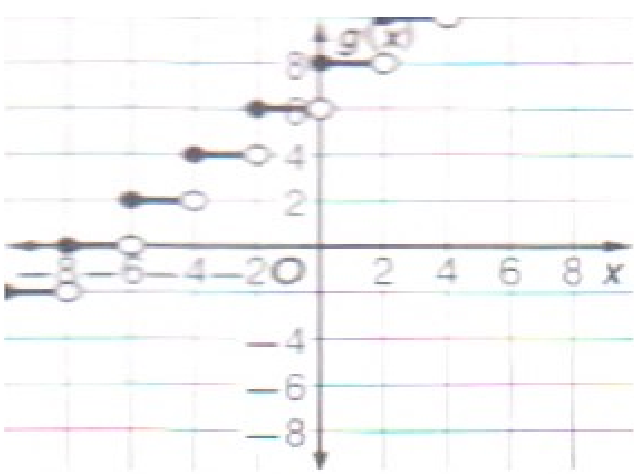
---

3) $f(x) = [3x + 2]$



3) المجال : R ، ألمدي = Z

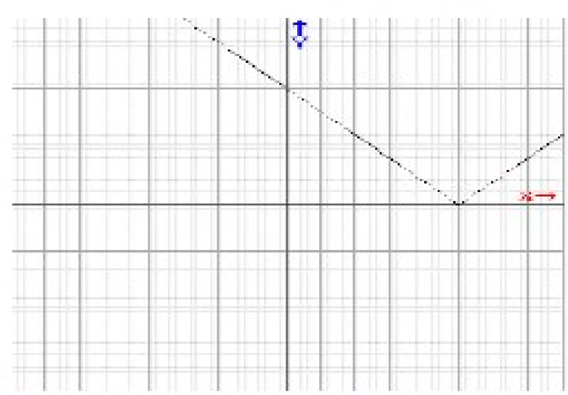
4) $g(x) = 2[\,0 \cdot 5x + 4\,]$



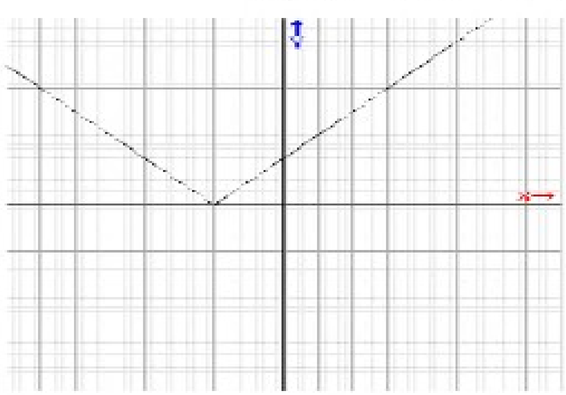
4) المجال : R ، ألمدي = جميع الأعداد الزوجية

---

5) $f(x) = |\,x - 5\,|$



6) $g(x) = |\,x + 2\,|$



5) المجال : R ، ألمدي = $\{ f(x) \mid f(x) \geqslant 0 \}$

6) المجال : R ، ألمدي = $\{ g(x) \mid g(x) \geqslant 0 \}$

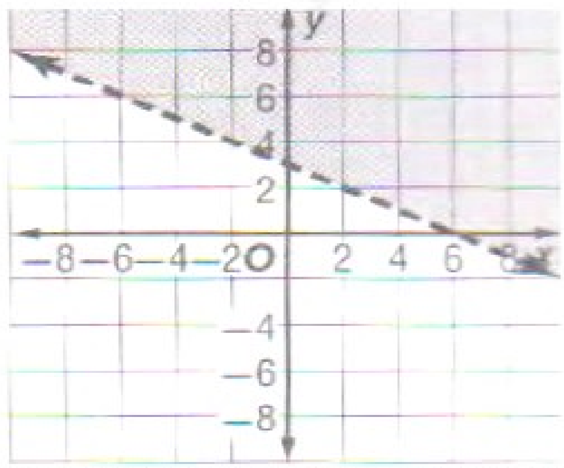
تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا 4 ـ 1

تعريف : تمثيل المتباينات الخطية بيانيا :

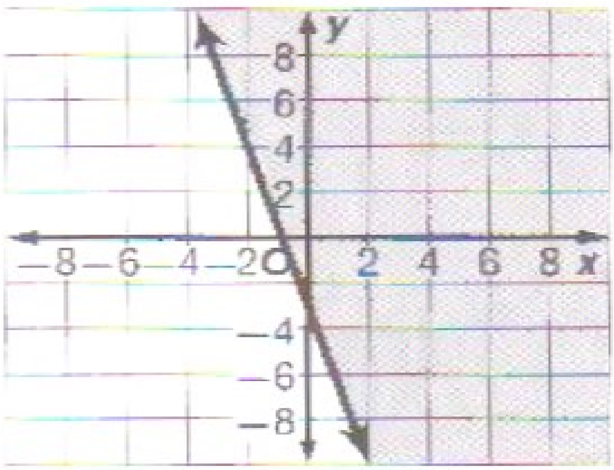
تشبه المتباينة الخطية المعادلة الخطية ، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلا من رمز المساواة وتمثل بيانيا بمنطقة مظللة كل نقطة فيها تحقق المتباينة فإذا كانت المتباينة تحتوي علي أحد الرمزين (> أو <) فإننا نرسم خط متقطع وتكون منطقة الحل علي يمين أو يسار الخط المتقطع وكل نقطة تقع علية لاتحقق المتباينة أما أذا كانت المتباينة تحتوي علي أحد الرمزين (⩾ أو ⩽)فإننا نرسم خط مستقيم وكل نقطة تقع علية تحقق المتباينة

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانيا :

8) $x + 2y > 6$



9) $y \geqslant -3x - 2$

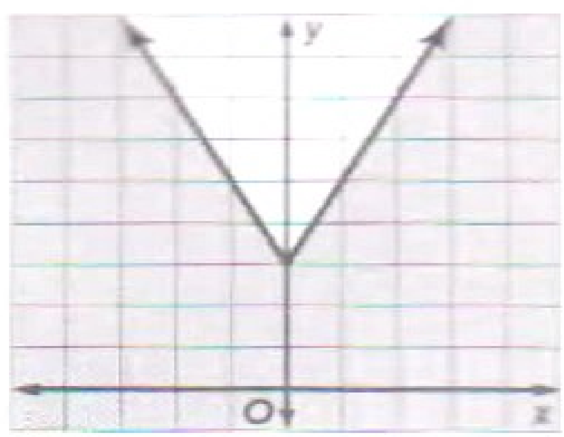


تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيا :

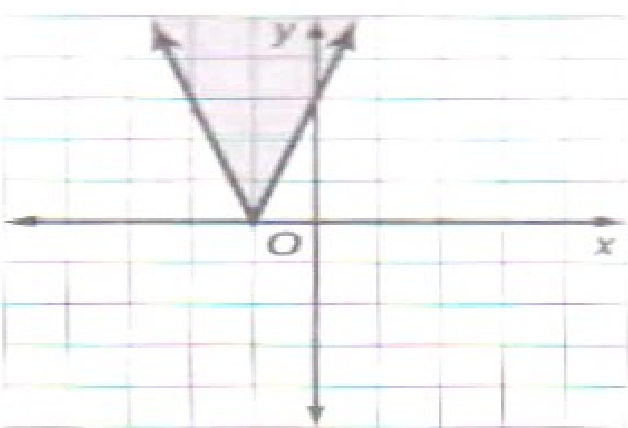
تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية ، أولا مثل بيانيا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدد إذا كان المستقيم الذي يمثل حد المتباينة متقطعا أو متصلا ، ثم حدد المنطقة التي يجب تظليلها باختيار نقطة ما .

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانيا :

1) $y \leqslant 2|x| + 3$



2) $y \geqslant 3|x + 1|$



حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا 1 - 5

تعريف :

نظام المتباينات الخطية : حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

،،،

مفهوم أساسي	حل أنظمة المتباينات الخطية
الخطوة 1 : مثل كل متباينة في النظام بيانيا ، وظلل منطقة الحل. الخطوة 2: حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام .	

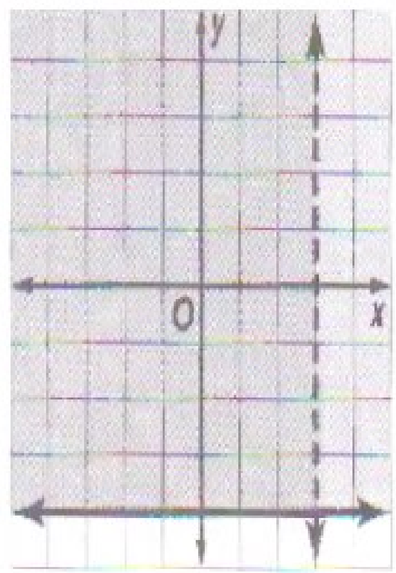
،،،

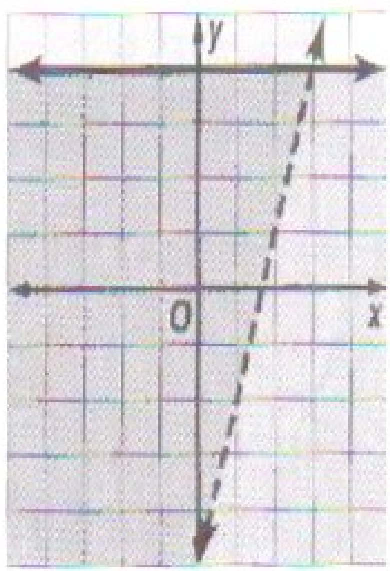
حل كل نظام مما يأتي بيانيا :

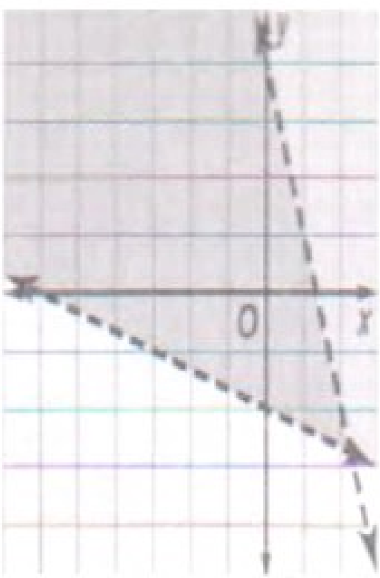
(1 $x < 3$ ، $y \geqslant -4$

(2 $y > 3x - 5$ ، $y \leqslant 4$

(3 $y < -3x + 4$ ، $3y + x > -6$







،،،

البرمجة الخطية والحل الأمثل 1 - 6

البرمجة الخطية :

هي طريقة لإيجاد القيمة العظمي أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية ، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيا ، وتوجد القيمة العظمي أوالصغري للدالة ذات الصلة دائما عند أحد رؤوس منطقة الحل .

،،،

مثل كل نظام مما يأتي بيانيا ، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل ، وأوجد القيمة العظمي والصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة :

1) $-2 \leqslant x \leqslant 6$

$1 \leqslant y \leqslant 5$

$y \leqslant x + 3$

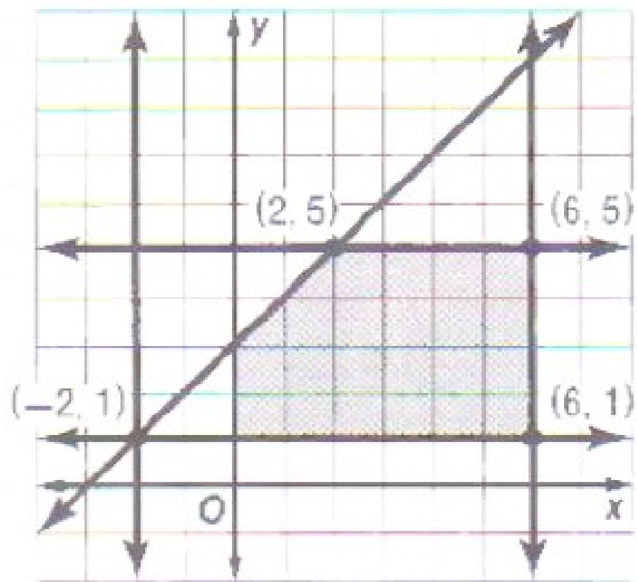
$f(x , y) = -5x + 2y$

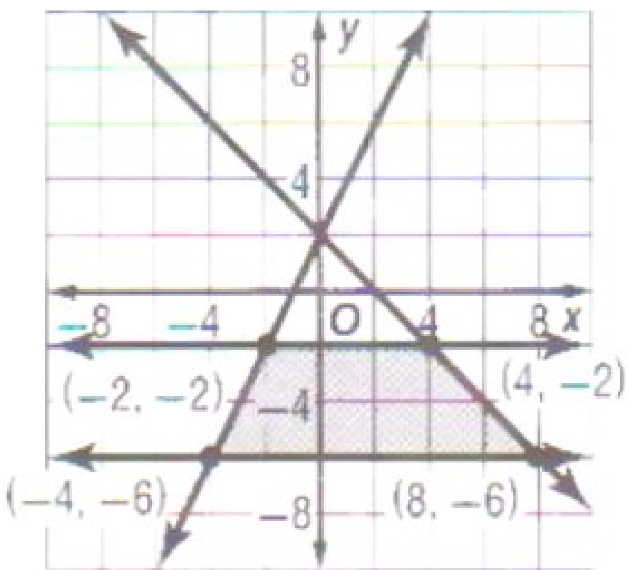
2) $-6 \leqslant y \leqslant -2$

$y \leqslant -x + 2$

$y \leqslant 2x + 2$

$f(x , y) = 6x + 4y$





1)القيمة الصغرى 28 ـ عند النقطة (1 , 6)،القيمة العظمي 12 عند النقطة (3 , 0)

2) القيمة الصغرى 48 ـ عند (6 ـ , 4 ـ) ،القيمة العظمي 24 عند النقطة (6 ـ , 8)

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1	الأعداد التي على الصورة العشرية وتكون غير منتهية أو غير دورية هي : A) I B) N C) Z D) W
2	الخاصية المستخدمة في $-7y + 7y = 0$ هي خاصية : A) النظير ألضربي B) التجميع C) النظير الجمعي D) التوزيع
3	العدد المختلف عن باقي الأعداد هو : A) $\sqrt{21}$ B) $\sqrt{35}$ C) $\sqrt{67}$ D) $\sqrt{81}$
4	مجال القيمة المطلقة هو A) R B) N C) Z D) W
5	إذا كان $f(x) = -4x + 6$ فإن $f(2c)$ يساوي A) $-8c - 6$ B) $8c - 6$ C) $-8c + 6$ D) $8c + 6$
6	الدالة $f(x) = x$ تسمي دالة A) ثابتة B) محايدة C) النظير الجمعي D) التوزيع
7	العدد $\sqrt{7}$ ينتمي لأي من المجموعات التالية : A) I B) N C) Z D) W
8	العدد الذي ينتمي لمجموعة الأعداد الغير نسبية هو A) $\frac{3}{4}$ B) $\sqrt{51}$ C) 5 D) $3 \cdot 2$
9	الخاصية الموضحة في العبارة : $(\frac{7}{22})(\frac{22}{7})$ هي خاصية A) النظير الجمعي B) التجميع C) النظير ألضربي D) التوزيع
10	الخاصية الموضحة في العبارة : $(8 + 5)\sqrt{11} = 5\sqrt{11} + 8\sqrt{11}$ هي خاصية A) النظير الجمعي B) التجميع C) النظير ألضربي D) التوزيع
11	مجال الدالة $y = 4x^2 - 8$ هو A) I B) N C) Z D) R
12	الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة تسمي دالة A) ثابتة B) متعددة التعريف C) تربيعية D) محايدة
13	إذا كان $f(x) = = 3x + 2$ فإن$f(x)$ فإن $f(2c)$ يساوي A) $-6c - 2$ B) $6c - 2$ C) $6c + 2$ D) $-6c + 2$
14	العدد 3π ينتمي لأي من المجموعات التالية : A) I B) N C) Z D) W
15	الخاصية الموضحة في العبارة $(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23)$ هي خاصية A) النظير الجمعي B) التوزيع C) النظير ألضربي D) التجميع

16	الخاصية الموضحة في العبارة : $a(b+c) = a\,b + ac$ هي خاصية A)الانغلاق B) التوزيع C) التجميع D) الإبدال
17	مجال الدالة $\{(3,5), (3,0), (-1,0), (-4,3)\}$ هو A) $\{-1 \cdot 3\}$ B) $\{-1, 5 \cdot 4\}$ C) $\{-1, 5 \cdot 3\}$ D) $\{-1, 5\}$
18	العدد (25 ـ) لاينتمي إلي مجموعة الأعداد A) W B) R C) Z D) Q
19	إذا كان $3m + 5 = 23$ فإن $2m - 3$ تساوي A) 6 B) 9 C) 15 D) 47
20	إذا كان $x = 3 , y = -1$ فإن قيمة $(x+2)\,x + y^{2}$ تساوي A) -2 B) 6 C) -3 D) 8

،،،

أكمل العبارات الآتية :

1	تكون الدالة ....إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطا بعنصر واحد فقط في المدى ، علي أن لايكون لأكثر من عنصر في المجال الصورة نفسها. (متباينة)
2	.... العلاقة هو مجموعة إحداثيات محور x للأزواج المرتبة التي تكون العلاقة (مجال)
3	الدالة .... هي الدالة الخطية $f(x) = x$. (المحايدة)
4	تسمي الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة.........(متعددة التعريف)
5	.... هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمي لدالة تحت شروط معينة يعبر عنها بنظام من المتباينات (البرمجة)
6	إيجاد .... يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة الأنسب باستعمال البرمجة الخطية. (الحل الأمثل)
7	تسمي منطقة الحل المفتوحة .... (غير المحدودة)
8	لأي عددين حقيقيين a, b فإن $a + b$ هو .... وتسمي خاصية .... (عدد حقيقي ، الانغلاق)
9	الخاصية الموضحة في : $2(x+3) = 2x + 6$ هي ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,, (خاصية توزيع الضرب علي الجمع)
10	الخاصية الموضحة في : $(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23)$ هي ,,,,,,,,,,,, (التجميع في الجمع)
11	مجال الدالة: $\{(6,4), (-2,5), (0,4), (-3,0)\}$ هو .... $\{-3, -2, 0, 6\}$
12	إذا كان مجال الدالة مجموعة من النقاط المنفردة فإنها تسمي دالة .... (منفصلة)

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخاطئة

1	خاصيتي الإبدال والتجميع متحققة في جمع وطرح الأعداد الحقيقية	(x)
2	خاصية الانغلاق للضرب تتحقق في ضرب الأعداد غير النسبية	(x)
3	الدالة الدرجية تتكون من قطع مستقيم أفقية متطابقة مفتوحة من احدي طرفيها	(✓)
4	كل نقطة تقع في منطقة الحل للمتباينة لاتحقق المتباينة	(x)
5	حل نظام المتباينات الخطية هو إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق جميع المتباينات في النظام	(✓)
6	الدالة المتباينة فيها كل عنصر من عناصر المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المدي	(x)
7	$\sqrt{12}$ ينتمي إلي مجموعة الأعداد النسبية	(x)
8	تحتوي مجموعة الأعداد النسبية علي الكسور العشرية المنتهية والدورية	(x)
9	في التمثيل البياني للدالة توضع دائرة غير مظللة عند النقطة التي لاتنتمي إلي التمثيل البياني	(✓)
10	مجال العلاقة هو مجموعة إحداثيات محور X للأزواج المرتبة التي تكون العلاقة	(✓)
11	العدد الطبيعي هو عدد كلي وصحيح ونسبي وحقيقي	(✓)
12	ناتج ضرب العدد ونظيرة ألضربي يساوي صفر	(x)
13	تحتوي مجموعة الأعداد النسبية علي الكسور العشرية المنتهية والدورية	(x)
14	مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة بالنسبة لعملية الضرب	(✓)
15	إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد	(✓)
16	إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر فالعلاقة دالة	(x)
17	مجال دالة القيمة المطلقة هو مجموعة الأعداد الحقيقية	(✓)
18	تعرف مجموعة الحل للمتباينة الخطية علي أنها مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل المتباينة صحيحة	(✓)
19	يمكن للخط الذي يمثل حدود منطقة الحل أن يكون ضمن مجموعة الحل	(✓)
20	إذا لم توجد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام فإن الحل هو $\varnothing$	(✓)

21	في البرمجية الخطية تسمى المتباينات في النظام بالقيود	(✓)
22	تسمي نقاط تقاطع حدود الخطوط برؤوس منطقة الحل	(✓)
23	$\sqrt{-144}$ ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية R	(×)

اختار من العبارة B مايناسبها من العبارة A:

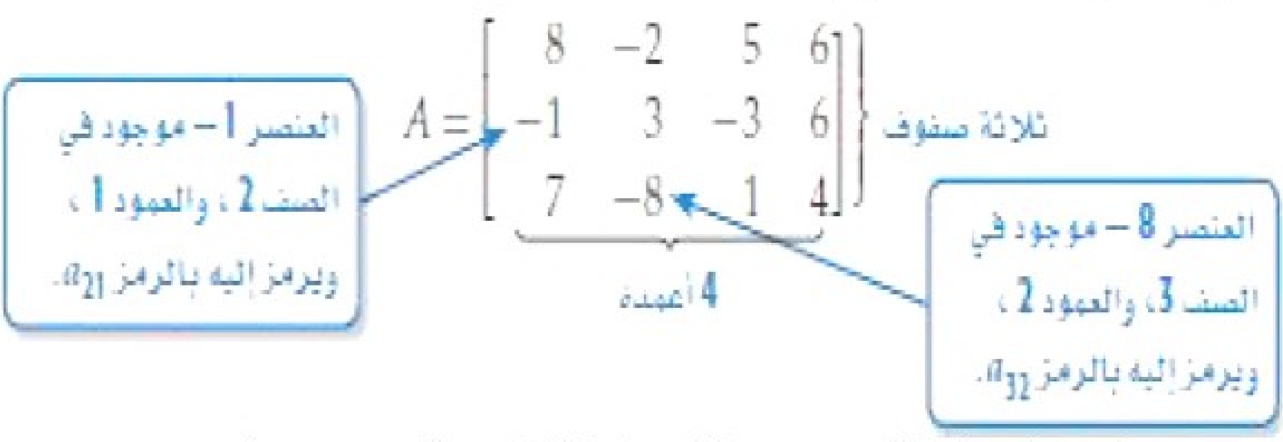
	العبارة A		العبارة B
1	إذا كان $f(x) = -7x + 8$ فإن $f(-9)$	2	عند أحد رؤوس منطقة الحل
2	في البرمجية الخطية تكون القيمة العظمي أوالصغري	3	$3a + 2$
3	إذا كان $f(x) = -3x + 2$ فإن $f(-a)$	4	Z
4	مدي الدالة $f(x) = [\,x + 3\,]$	1	71

الفصل الثاني المصفوفات

2 – 1 مقدمة في المصفوفات

المصفوفة :

هي ترتيب علي هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين ، وتنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معني ، وتسمي كل قيمة في المصفوفة عنصرا ، ويرمز إلي المصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة



يمكن تحديد نوع المصفوفة برتبتها ، فالمصفوفة المكونة من m صفا و n عمودا تسمي مصفوفة من النوع $m \times n$ (تقرأ " m في n ") فالمصفوفة A هي مصفوفة من النوع

4×3 أو من الرتبة 4×3 ، لأنها تحتوي علي 3 صفوف و4 أعمدة ، ويدل الرمز a_{12} علي عنصر في المصفوفة A ، علي حين يدل الرمز b_{12} علي عنصر في المصفوفة B

''

بعض أنواع المصفوفات :

1) **مصفوفة الصف :** هي مصفوفة تحتوي علي صف واحد وأي عدد من الأعمدة
2) **مصفوفة العمود :** هي مصفوفة تحتوي علي عمود واحد وأي عدد من الصفوف
3) **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة
4) **المصفوفة الصفرية :** هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار

''

تساوي مصفوفتان :

تكون المصفوفتان متساويتان إذا كانتا من الرتبة نفسها وتساوت عناصرهما المتناظرة

''

1) حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي :

1) $[6 \quad -9]$ (1×2) 2) $[115]$ (1×1)

3) $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ (2×2) 4) $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (2×4)

5) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ (3×3) 6) $\begin{bmatrix} 2 \\ X \\ -3 \end{bmatrix}$ (3×1)

''

2) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر فيما يأتي :

1) a_{21} (-9) 2) b_{22} (19)

3) b_{13} $(2x)$ 4) a_{12} (y)

''

3) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر فيما يأتي :

1) a_{32} **(15)**　　2) b_{21} **(4x)**　　3) b_{12} **(– 3)**　　4) a_{21} **(x)**

---

4) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر فيما يأتي

1) a_{11} **($x^2 + 4$)**　　2) a_{22} **(2 – y)**

3) b_{31} **(– y)**　　4) b_{23} **(– 4x)**

العمليات علي المصفوفات　　2 – 2

جمع المصفوفات وطرحها : يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها :

مفهوم أساسي　　**جمع المصفوفات وطرحها**

التعبير اللفظي : إذا كانت A , B مصفوفتين من الرتبة m×n فإن A + B هي مصفوفة أيضا من الرتبة m×n ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A , B وكذلك A – B هي مصفوفة من الرتبة m×n أيضا ونحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة

الرموز :

A + B = A + B

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

A – B = A – B

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

الضرب في عدد ثابت :

يمكن ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت ، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت وتسمي هذه العملية **الضرب في عدد ثابت**

مفهوم أساسي	الضرب بعدد ثابت

التعبير اللفظي : حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة m×n في عدد ثابت K هي مصفوفة KA وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفةA مضروبا في العدد الثابت K

الرموز : $K \cdot A = KA$

$$K\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

،،،

خصائص جمع المصفوفات :

مفهوم أساسي	خصائص جمع المصفوفات

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A . B . C لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت K

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات: $A + B = B + A$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات : $(A + B) + C = A + (B + C)$

خاصية التوزيع للضرب في عدد : $K(A + B) = KA + KB$

،،،

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا :

1) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

الحل: لايمكن الجمع لأنهما مختلفين في الرتبة

،،،

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن ، وإذا تعذر ذلك فاكتب لايمكن مع ذكر السبب :

1) $\begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} 24 \\ -10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 3 & 17 & -2 \\ 1 & -23 & 14 \\ 13 & -40 & -5 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 34 & 76 & -13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix}$

الحل: لايمكن الجمع لأنهما مختلفين في الرتبة

4) $\begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} -6 & 13 & 14 \\ -11 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} -7 \\ -32 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

الحل: لايمكن الجمع والطرح لأنهما مختلفين في الرتبة

7) $\begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix} -3$

الحل: $\begin{bmatrix} -54 & 18 & 24 \\ 15 & 9 & -36 \\ 0 & -9x & 3y \end{bmatrix}$

8) $-4\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} -16 \\ 4x+14 \\ -75 \end{bmatrix}$

9) $-5\left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\right)$

الحل: $\begin{bmatrix} -40 & 50 \\ -25 & 75 \end{bmatrix}$

10) $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ -\frac{167}{12} & -10 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات 3 – 2

ضرب المصفوفات : يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولي يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة m×r بالمصفوفة B ذات الرتبة r×t ، فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة m×t

$$A \qquad\qquad B \quad = \quad AB$$

$$m \times r \qquad\qquad r \times t \qquad\qquad m \times r$$

متساويان

رتبة AB

ضرب المصفوفات :

يمكن إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولي في أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج

مفهوم أساسي	ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي : العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة AB هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة A بعناصر العمود r من المصفوفة B بالترتيب

الرموز : $\quad A \quad \bullet \quad B \quad = \quad AB$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

خصائص ضرب المصفوفات :

مفهوم أساسي	خصائص ضرب المصفوفات
تعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A . B . C ، ولأي عدد K ، على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أي منها معرفا خاصية التجميع لضرب المصفوفات : $(AB)C = A(BC)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد : $K(AB) = (KA)B = A(KB)$ خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات : $C(A+B) = CA + CB$ خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات : $(A+B)C = AC + BC$	

ملاحظة : الخاصية الإبدالية لضرب المصفوفات غير متحققة أي أن : $AB \neq BA$

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا ، وإذا كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة

1) $P_{2\times3} \bullet Q_{3\times4}$ (2×4)

2) $A_{5\times5} \bullet B_{5\times5}$ (5×5)

3) $M_{3\times1} \cdot N_{2\times3}$ (غير معرفة)

4) $X_{2\times6} \cdot Y_{6\times3}$ (2×3)

5) $J_{2\times1} \cdot K_{2\times1}$ (غير معرفة)

6) $S_{5\times2} \cdot T_{2\times4}$ (5×4)

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنا :

1) $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-10 \\ 6\end{bmatrix}$

الحل : [26]

2) $\begin{bmatrix}6 \\ -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$

الحل : $\begin{bmatrix}12 & -42 \\ -5 & 21\end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix}-3 & -7 \\ -2 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & 4 \\ 9 & -3\end{bmatrix}$

الحل : $\begin{bmatrix}-75 & 9 \\ -17 & -5\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **الحل :** $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 44 & -19 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix}$ **الحل :** غير معرفة

6) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ **الحل :** $\begin{bmatrix} -70 \\ 58 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **الحل :** $\begin{bmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ **الحل :** $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -24 & -8 \end{bmatrix}$

المحددات وقاعدة كرامر 4 – 2

المحددات : كل مصفوفة مربعة لها **محددة** ، وتسمي محددة المصفوفة من النوع 2×2 **بمحددة الدرجة الثانية**

مفهوم أساسي	محددة الدرجة الثانية
التعبير اللفظي : قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر	
بالرموز : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$	

ملاحظة :

تسمي محددات المصفوفات من النوع 3×3 **محددات من الدرجة الثالثة** ، ويمكن حساب هذه المحددات باستعمال **قاعدة الأقطار** .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة الأقطار

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

جد قيمة كل محددة فيما يلي :

1) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$ **(22)**

2) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$ **(- 73)**

جد قيمة كل محددة فيما يلي :

1) $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **(- 48)**

2) $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **(- 60)**

ملاحظة :

تستعمل المحددات أيضا لإيجاد مساحة المثلث ، فإذا كانت رؤوس المثلث معلومة فيمكن استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث .

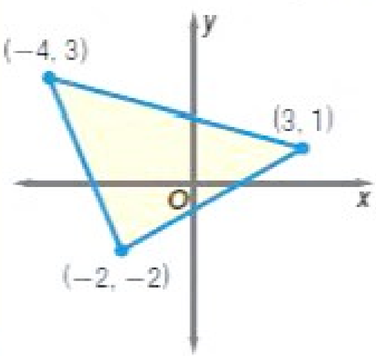
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي $|A|$ ، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



مثال:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

ملاحظة : تسمي المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **بمصفوفة المعاملات** .

''

قاعدة كرامر :

يمكنك استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات ، فإذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لاتساوي صفرا ، فإن للنظام حلا وحيدا ، وإذا كانت قيمة المحددة صفرا ، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لاحل له ، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تسمي **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي	قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $ax+by = m$

$fx + gy = n$

حيث $C = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$ ، $Y = \begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}$ ، $X = \begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}$ فإن حل هذا النظام هو :

$x = \frac{|X|}{|C|}$ ، $Y = \frac{|y|}{|C|}$ ، وذلك إذا كانت $C \neq 0$

''

حل كل نظام فيما يأتي باستعمال قاعدة كرامر :

1) $7x + 3y = 37$

$-5x - 7y = -41$ $(4 , 3)$

2) $8x - 5y = 70$

$9x + 7y = 3$ $(5 , -6)$

''

مفهوم أساسي — استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات — أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام

$$ax + by + cz = m$$
$$fx + gy + hz = n$$
$$jx + ky + \ell z = p$$

، حيث $C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{vmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

''

جد قيمه كل محددة فيما يأتي :

1) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ **(- 102)**

2) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$ **(3)**

3) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$ **(83)**

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ **(- 135)**

5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ **(124)**

6) $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$ **(- 459)**

7) $\begin{vmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$ **(63)**

8) $\begin{vmatrix} -8 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ **(0)**

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي :

1) $6x - 5y = 73$ $-7x + 3y = -71$ **(8, - 5)**	2) $10a - 3b = -34$ $3a + 8b = -28$ **(- 4 , - 2)**
3) $-4c - 5d = -39$ $5c + 8d = 54$ **(6 , 3)**	4) $-6f - 8g = -22$ $-11f + 5g = -60$ **(5 , - 1)**
5) $5x - 4y + 6z = 58$ $-4x + 6y + 3z = -13$ $6x + 3y + 7z = 53$ **(4 , - 2 , 5)**	6) $8x - 4y + 7z = 34$ $5x + 6y + 3z = -21$ $3x + 7y - 8z = -85$ **(- 3 , - 4 , 6)**

النظير ألضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 5 ــ 2

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة ألضربي :

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة بحيث إذا ضربت في أي مصفوفة أخري من الرتبة كان الناتج هو المصفوفة الأخرى

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

،،،

مفهوم أساسي **المصفوفة المحايدة لعملية الضرب**

التعبير اللفظي : المصفوفة المحايدة لعملية الضرب I هي مصفوفة الوحدة وهي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد (من أعلي اليسار إلي أسفل اليمين) وباقي العناصر أصفار

لأي مصفوفة مربعة A لها رتبة مصفوفة الوحدة I نفسها فإن :

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{I} = \mathbf{I} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

الرمـــــــوز : إذا كانت $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بحيث أن :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

،،،

ملاحظة :

إذا كانت المصفوفتان B , A مربعتين ولهما الرتبة نفسها ، وكان AB = BA = I فإن المصفوفة B تسمي **نظيرا ضربيا للمصفوفة** A ، وكذلك تسمي المصفوفة A نظيرا ضربيا للمصفوفة B , وإذا كان للمصفوفة A نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز A^{-1} حيث : I =

$$\mathbf{A} \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet \mathbf{A}$$

،،،

حدد إذا كان كل من المصفوفتين كلا منهما نظيرا ضربيا للاخري :

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} . Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

الحل: (كلا من X , Y نظير ضربي للاخري لان : X• Y = Y• X = I)

،،،

مفهوم أساسي **النظير ألضربي للمصفوفة من النوع 2×2**

النظير الصرب للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

وذلك عندما $ad - bc \neq 0$

،،،

أوجد النظير ألضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد :

1) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ **الحل :** $\begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **الحل:** $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

،،،

المعادلات المصفوفية : يمكن استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله . فمثلا ، يمكن كتابة معادلة مصفوفية لحل نظام المعادلتين الآتيتين : $x + 2y = 9$

$3x - 6y = 3$

يمكن كتابة المعادلات السابقة علي الشكل :

$$\begin{array}{ccccc} A & \bullet & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} & \square & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث مصفوفة المعاملات = A ، مصفوفة المتغيرات = X ، مصفوفة الثوابت = B

ولحل المعادلات نوجد النظير ألضربي للمصفوفة A ويكون الحل هو: $X = A^{-1} \bullet B$

،،،

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيرا ضربيا للاخري فيم يأتي :

1) $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ الحل: (لا)

2) $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ الحل: (لا)

3) $S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ الحل: (لا)

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد :

1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ الحل : $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ الحل: $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$
3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$ الحل: $\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$	4) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ الحل: $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي :

1) $-x + y = 4$ $-x + y = -4$ (لايوجد حل)	2) $-x + y = 3$ $-2x + y = 6$ $(-3 , 0)$
3) $x + y = 4$ $-4x + y = 9$ $(-1 , 5)$	4) $3x + y = 3$ $5x + 3y = 6$ $\left(\frac{3}{4} , \frac{3}{4}\right)$
5) $y - x = 5$ $2y - 2x = 8$ (لايوجد حل)	6) $4x + 2y = 6$ $6x - 3y = 9$ (1•5 , 0)

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & -19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ هو A) 3×2 B) 3×2 C) 2×2 D) 3×3	1
قيمة b_{32} من المصفوفة $\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & -19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ A) -1 B) 10 C) 6 D) -2	2
المصفوفة $[6 \quad -9]$ هي مصفوفة A) عمود B) مربعة C) صفرية D) صف	3
المصفوفة $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة A) عمود B) مربعة C) صفرية D) صف	4
المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 \\ X \\ -3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة A) صفرية B) مربعة C) عمود D) صف	5
رتبة المصفوفة الناتجة من حاصل ضرب المصفوفتين $B_{6\times2}$, $A_{4\times6}$ هي A) 4×2 B) 3×2 C) 2×2 D) غير معرفة	6
رتبة المصفوفة الناتجة من حاصل ضرب المصفوفتين $B_{3\times2}$, $A_{3\times2}$ هي A) 3×2 B) 2×2 C) غير معرفة D) 3×3	7
رتبة المصفوفة الناتجة من حاصل ضرب المصفوفتين $N_{2\times3}$ □ $M_{3\times1}$ هي A) 3×2 B) 2×2 C) 3×3 D) غير معرفة	8
إذا كان $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ فإن قيمة a تساوي A) 4 B) 3 C) 2 D) 5	9

10	قيمة المحددة $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} =$ A) 104 B) 22 C) - 22 D) 118
11	قيمة المحددة $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} =$ A) 26 B) - 53 C) - 73 D) 14
12	قيمة x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي هو A) - 6 B) 3 C) 2 D) 6
13	قيمة x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} x & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي هو A) - 8 B) 4 C) - 4 D) 2
14	قيمة x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي هو A) - 9 B) 9 C) - 6 D) 1
15	قيمة المحددة $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} =$ A) 26 B) 7 C) - 34 D) 14

أكمل العبارات الآتية :

1	.... هي ترتيب مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين (المصفوفة)
2	عند .... فإننا نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد (ضرب عدد في مصفوفة)
3	تسمي المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات .... (مصفوفة الثوابت)
4	كل قيمة في المصفوفة تسمي .... (عنصر)
5	يسمي عدد الصفوف × عدد الأعمدة في المصفوفة .... المصفوفة (رتبة)
6	.... هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي فيها العدد 1 وباقي

	العناصر أصفار (مصفوفة الوحدة)
7	.... هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار (المصفوفة الصفرية)
8	قيمة .... المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ تساوي 1 - (محددة)
9	إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة فإن كلتا المصفوفتين تكون .... للأخرى (نظير ضربي للاخري)
10	المصفوفات .... لها الرتبة نفسها وعناصرها المتناظرة .... (المتساوية ، متساوية)
11	يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لها .... نفسها وذلك .... العناصر المتناظرة أو .... (الرتبة ، بجمع ، طرحها)
12	يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد .... الأولي يساوي عدد ....الثانية (أعمدة ، صفوف)
13	يوجد نظير ضربي للمصفوفة إذا كان محددها .... (لايساوي صفر)

،،

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخاطئة

1	مصفوفة الصف هي مصفوفة تحتوي علي عمود واحد وأي عدد من الصفوف(✗)
2	المصفوفة المربعة هي مصفوفة عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة (✓)
3	مصفوفة العمود : هي مصفوفة تحتوي علي عمودين وصف واحد (✗)
4	المصفوفة الصفرية : هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار (✓)
5	يمكن جمع مصفوفتين إذا كان مختلفين في الرتبة (✗)
6	الخاصية الإبدالية لضرب المصفوفات غير متحققة (✓)
7	محددة الدرجة الثانية هي مصفوفة من النوع 2×2 (✓)
8	تسمي المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام بمصفوفة المعاملات (✓)
9	مصفوفة الوحدة وهي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد وباقي العناصر أعداد غير الصفر (✗)
10	المصفوفة المحايدة لعملية الضرب I هي مصفوفة الوحدة (✓)
11	يوجد نظير ضربي للمصفوفة المربعة من النوع 2×2 إذا كان محددها يساوي صفر (✗)

الأعداد المركبة 1 ـ 3 complex numbers

تمهيد : عند إيجاد جذور المعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ نجد أن المعادلة ليس لها حلول في R كما إن التمثيل البياني للمعادلة لايقطع محور x لذلك نبحث عن أعداد أخري بكون للمعادلة حل فيها

،،،

الأعداد التخيلية البحتة :

قادت المعادلات كالمعادلة السابقة الرياضيين إلي تعريف الأعداد التخيلية وتعرف الوحدة التخيلية I علي أنها الجذر التربيعي الأساسي للعدد 1 ـ ، وبعبارة أخري فإن : $i^2 = -1$ أو $i = \sqrt{-1}$ ، وتسمي الأعداد علي الصورة $i\sqrt{3}$, $-2i$, $6i$ أعدادا تخيلية بحتة ، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة

إذن لأي عدد حقيفي موجب مثل b فإن $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = bi$

والجدول الآتي يبين قوي الوحدة التخيلية i

$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^2 = -1$	$i^1 = i$
$i^8 = (i^2)^4 = 1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^5 = i^4 \cdot i^1 = i$

،،،

العمليات علي الأعداد المركبة :

العدد $2 + 3i$ حيث 2 عدد حقيقي , 3i عدد تخيلي وهما جذران غير متشابهان ولا يمكن جمعهما ويسمي هذا النوع من العبارات بالعدد المركب

مفهوم أساسي العدد المركب
التعبير اللفظي : العدد المركب هو أي عدد يمكن علي الصورة $\alpha + bi$ حيث α , b عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية ، ويسمي α الجزء الحقيقي , b الجزء التخيلي
مثل : $5 + 2i$ ، $1 - 3i$

،،،

تساوي عددان مركبان :

يتساوي عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوي الجزأين الحقيقيين ،والجزأين التخيليين أي أن :

$\alpha + bi = c + di$ إذا وفقط إذا $b = d$ ، $\alpha = c$

،،،

جمع وطرح الأعداد المركبة :

عند جمع أو طرح الأعداد المركبة نجمع أو نطرح الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء التخيلية معا ويمكن استعمال خاصية الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع الأعداد المركبة

،،

ضرب الأعداد المركبة :

تستعمل طريقة فك الأقواس لإيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة

،،،

ملاحظة :

يسمي العددان المركبان $\alpha + bi\ ,\ \alpha - bi$ مترافقين مركبين ، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائما ، ويمكن استعمال هذه الحقيقة لتبسيط قسمة عددين مركبين

،،

1) أوجد قيمتي x ، y اللتين تجعلان المعادلة $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة $(x = -1 \text{ ، } y = -9)$

،،

2) بسط كل مما يأتي :

1) $(-3 + i) + (-4 - i)$ $\quad (-7)$

2) $(11 - 8i) - (2 - 8i)$ $\quad (9)$

3) $(1 + 2i)(1 - 2i)$ $\quad (5)$

4) $(3 + 5i)(5 - 3i)$ $\quad (30 + 16i)$

5) $(4 - i)(6 - 6i)$ $\quad (18 - 30i)$

6) $\dfrac{2i}{1 + i}$ $\quad (1 + i)$

7) $\dfrac{5}{2 + 4i}$ $\quad (\frac{1}{2} - i)$

8) $\dfrac{5 + i}{3i}$ $\quad (\frac{1}{3} - \frac{5}{3} i)$

،،

3) حل كل معادلة مما يأتي :

1) $4x^2 + 4 = 0$ $\quad (\pm i)$

2) $3x^2 + 48 = 0$ $\quad (\pm 4i)$

3) $2x^2 + 10 = 0$ $\quad (\pm \sqrt{5}\, i)$

4) $6x^2 + 108 = 0$ $\quad (\pm 3\sqrt{2}\, i)$

،،

4) أوجد قيمتي x ، y اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة :

1) $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$ $\quad (x = 2 \text{ ، } y = -3)$

2) $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$ $\quad (x = -5.5 \text{ ، } y = -3)$

3) $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$ $\quad (x = \frac{4}{3} \text{ ، } y = 4)$

4) $(2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i$ $\quad (x = 25 \text{ ، } y = -2)$

،،

5) بسط كل مما يأتي :

1) $\sqrt{-10}\cdot\sqrt{-24}$ ($-4\sqrt{15}$)

2) $4i(\frac{1}{2})\ i^2\ (-2i)^2$ (4i)

3) i^{41} (i)

4) $(4-6i)+(4+6i)$ (8)

5) $(8-5i)-(7+i)$ (7 – 6i)

6) $(-6-i)(3-3i)$

القانون العام والمميز 2 – 3

القانون العام :

مفهوم أساسي	القانون العام لحل المعادلة التربيعية
التعبير اللفظي :	
يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة ، $\alpha x^2 + bx + c = 0\ ,\ \alpha \neq 0$	
باستعمال القانون : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
مثال : $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$	

حل كلا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام :

1) $x^2 + 6x = 16$ (2 , – 8)

2) $2x^2 + 25x + 33 = 0$ ($-\frac{3}{2}$, – 11)

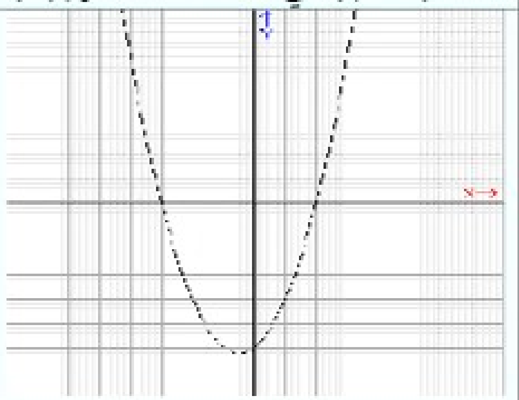
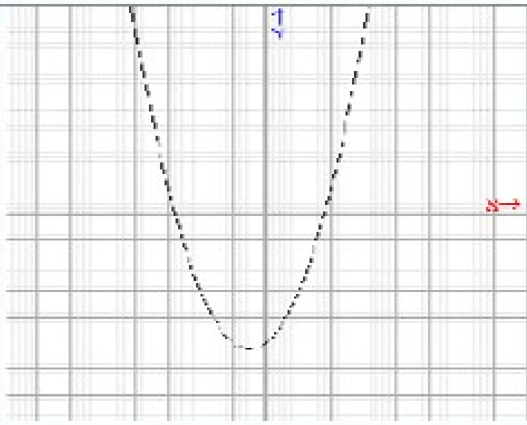
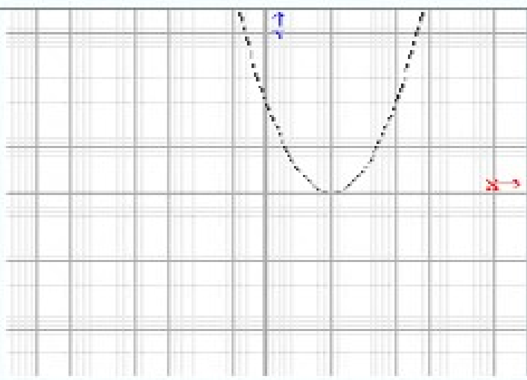
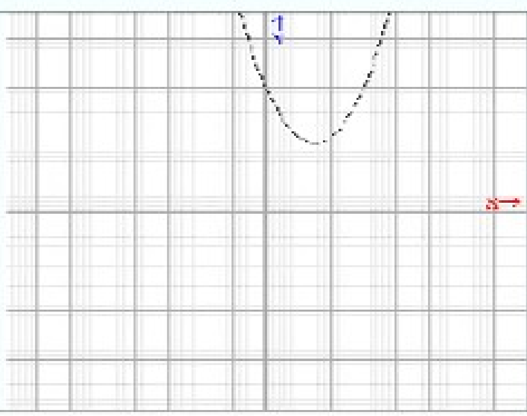
3) $x^2 - 16x + 64 = 0$ (8)

4) $x^2 + 34x + 289 = 0$ (– 17)

5) $x^2 - 8x + 9 = 0$ ($4 \pm \sqrt{7}$)

6) $x^2 - 4x = -13$ ($2 \pm 3i$)

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية :

مفهوم أساسي	المميز	
في المعادلة $\alpha x^2 + bx + c = 0$ حيث α , b , c أعداد نسبية ، $\alpha \neq 0$		
قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	التمثيل البياني للمعادلة التربيعية
$b^2 - 4\alpha c > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4\alpha c$ مربع كامل	حذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4\alpha c > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4\alpha c$ ليست مربع كامل	حذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4\alpha c = 0$	جذر حقيقي واحد	
$b^2 - 4\alpha c < 0$ التمثيـــل البيـــاني للمعادلـــة لايساعدك علي إيجاد الحل	جذران مركبان	

أجب عن الفروع a ـ c لكل معادلة تربيعية مما يأتي :

a) أوجد قيمة المميز

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام

1) $2x^2 + 3x - 3 = 0$ (33 ، جذران غير نسبيين ، $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$)

2) $4x^2 - 6x + 2 = 0$ (4 ، جذران نسبيان ، 1 , $\frac{1}{2}$)

3) $6x^2 + 5x - 1 = 0$ (49 ، جذران نسبيان ، 1- , $\frac{1}{6}$)

4) $3x^2 - 3x + 8 = 0$ (87 - ، جذران مركبان ، $\frac{3 \pm i\sqrt{87}}{6}$)

5) $2x^2 + 4x + 7 = 0$ (40 - ، جذران مركبان ، $\frac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$)

6) $x^2 - 6x = -9$ (0 ، جذر نسبي واحد ، 3)

7) $x^2 + 2x - 4 = 0$ (16 - ، جذران مركبان ، $-1 \pm 2i$)

………………………………………………………………………………

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما 3 ـ 2

تعريف :

مفهوم أساسي	مجموع جذري المعادلة وحاصل ضربهما
إذا كان r_1, r_2 هما جذرا المعادلة $a x^2 + bx + c = 0 , a \neq 0$ فإن :	
$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$ (حاصل ضرب الجذرين) ، $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ (مجموع الجذرين)	

………………………………………………………………………………

ملاحظة :

يمكن تكوين المعادلة التربيعية من مجموع الجذرين وحاصل ضربهما أي يمكن معرفة c ، b ، a ، والتعويض في المعادلة التربيعية $a x^2 + bx + c = 0$

………………………………………………………………………………

أكتب المعادلة التربيعية التي جذراها كما هو معطى في كل مما يأتي :

1) $\frac{5}{8}$ ، $\frac{3}{4}$ $(32x^2 + 4x - 15 = 0)$

2) $\frac{2}{3}$ ، -7 $(3x^2 + 19x - 14 = 0)$

3) $\pm\frac{2}{5}$ $(25x^2 - 4 = 0)$

4) $4 \pm \sqrt{3}$ $(x^2 - 8x + 13 = 0)$

أكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلا مما يأتي :

19) مجموع جذريها 4 ، وحاصل ضربهما $\frac{12}{13}$ $(12x^2 - 48x + 13 = 0)$

2) مجموع جذريها $\frac{1}{6}$ ، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$ $(42x^2 - 7x + 10 = 0)$

العمليات علي كثيرات الحدود 3 ـ 3

ضرب وحيدات الحد وقسمتها :

تعني عملية تبسيط عبارات تتضمن قوي إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة ، والأسس السالبة هي طريقة للتعبير عن النظير ألضربي لعدد ، ويلخص الجدول الآتي

خصائص الأسس :

ملخص المفهوم	خصائص الأسس	
لأي عددين حقيقيين x , y وعددين صحيحين α , b		
الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوي	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوي	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسس السالبة	$\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ ، $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ حيث $x \neq 0$	$\frac{1}{b^{-7}} = b^7$ ، $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3\cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2\cdot 4} = d^8$

$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$	$(xy)^a = x^a y^a$	قوة ناتج الضرب
$(\frac{x}{y})^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $(\frac{a}{b})^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$	$(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}$ ، $y \neq 0$ $(\frac{x}{y})^{-a} = (\frac{y}{x})^a = \frac{y^a}{x^a}$ ، $x \neq 0, y \neq 0$	قوة ناتج القسمة
$7^0 = 1$	$x^0 = 1$ ، $x \neq 0$	القوة الصفرية

تذكر أن وحيدة الحد هي : عدد أو متغير، أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر، وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة

،،،

تبسيط وحيدات الحد :

عند تبسيط وحيدات الحد تأكد أنك بسطتها عي نحو كامل

مفهوم أساسي تبسيط وحيدات الحد
تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما • لاتتضمن قوي القوة • يظهر كل أساس مرة واحدة • تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة • لاتتضمن أسس سالبة

،،،

1) حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا ، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها :

1) $2x^2 - 3x+5$ (نعم ، 2) 2) $\alpha^3 - 11$ (نعم ، 3)

3) $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$ (لا) 4) $\sqrt{m-7}$ (لا)

،،،

2)بسط كلا مما يأتي :

1) $(6\alpha^2+5\alpha+10)-(4\alpha^2+6\alpha+12)$ $(2\alpha^2-\alpha-2)$

2) $4x(2x^2+y)$ $(8x^3+4xy)$

3) $-2\alpha(3\alpha^2-11\alpha+20)$ $(6\alpha^3+22\alpha^2-40\alpha)$

4) $(-x^2-3x+4)-(x^2+2x+5)$ $(-2x^2-5x-1)$

5) $(3x^2-6)(-x+1)$ $(3x^2-x-5)$

بسط كلا مما يأتي مفترضا أن أي من المتغيرات لايساوي صفرا :

1) $(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2})^4$ ($\frac{y^4}{81x^4}$)   2) $(\frac{12a^3b^5}{4a^6b^3})^3$ ($\frac{27b^6}{a^9}$)

3) $(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}})^{-2}$ ($\frac{x^6}{16y^{14}}$)   4) $(\frac{5a^{-7}b^3}{a\,b^{-6}})^{-3}$ ($\frac{a^{24}}{125b^{24}}$)

''

قسمة كثيرات الحدود 4 – 3

القسمة الطويلة :

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد الناتج في كل مما يأتي :

1) $(x^2+7x-30) \div (x-3)$ 2) $(x^2-13x+12) \div (x-1)$

الحل: 2A)

$x+10$

$x-3\overline{)\ x^2+7x-30}$

$\underline{x^2 \pm 3x}$ لى   بضرب المقسوم عليه في x

$10x-30$ بالطرح ثم إنزال الحد التالي

$\underline{10x \pm 30}$لى   بضرب المقسوم عليه في 10

0 بالطرح

ناتج القسمة هو $x+10$ ، والباقي 0

الحل : ناتج القسمة هو $x-12$ ، والباقي 0

''

القسمة التركيبية :

مفهوم أساسي القسمة التركيبية
الخطوة1 : أكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده بحسب درجتها ، تأكد من أن المقسوم علية علي الصورة $x-r$ ، ثم أكتب الثابت r في الصندوق ، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي
الخطوة 2 : اضرب المعامل الأول في r ، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني
الخطوة 3 : اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني
الخطوة 4 : كررالخطوتين3 ,2 حتى تصل إلي ناتج جمع العددين في العمود الأخير، لأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة ، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم ، والعدد الأخير هو الباقي

''

1) استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي :

1) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x+3)$ $\quad$ $(2x^2 - 3x + 5)$

2) $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 3)$ $\quad$ $(3x^2 - 2x + 7)$

3) $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a+2)$ $\quad$ $(4a^3 - 8a^2 + 18a - 40 + \frac{92}{a+2})$

4) $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b-2)$ $\quad$ $(6b^3 + 4b^2 + 8b + 28 + \frac{42}{b-2})$

---

2) استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي :

1) $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$ $\quad$ $(4x^3 - 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{2x+1})$

2) $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$ $\quad$ $(2y^4 - 4y - 1 + \frac{3}{4y-1})$

3) $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$ $\quad$ $(3b^2 + 4b - 1 + \frac{2}{5b-4})$

4) $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$ $\quad$ $(2c^2 - 3c - 2)$

---

3) بسط كل عبارة فيما يلي :

1) $\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$ $\quad$ $(3a^2 b - 2ab^2)$

2) $\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy}$ $\quad$ $(x + 3y - 2)$

3) $\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh}$ $\quad$ $(7g^2 h + 3g - 2h^2)$

4) $\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab}$ $\quad$ $(2a^2 + b - 3)$

دوال كثيرات الحدود 5 – 3

دوال كثيرات الحدود:

كثيرة الحدود بمتغير واحد هي عبارة جبرية علي الصورة :

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ **حيث** $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$

أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب ، وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كان أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبا تنازليا ، ودرجة كثيرة الحدود هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها ، ويسمي معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعامل الرئيسي

كثيرة الحدود	العبارة	الدرجة	المعامل الرئيسي
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	n	a_n

''

حدد الدرجة والمعامل الرئيسي لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي ، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد ، فاذكر السبب :

1) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$

(ليست كثيرة حدود لان أحد الحدود يحتوي علي متغير في المقام)

2) $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ **(درجتها 6 ، المعامل الرئيسي 5)**

3) $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$ **(درجتها 6 ، المعامل الرئيسي 1 –)**

''

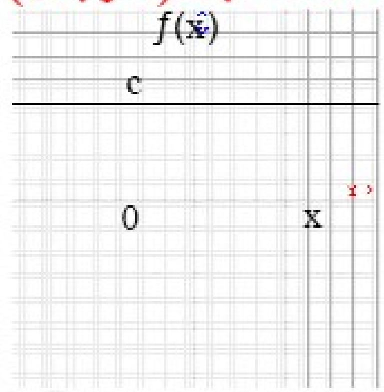
دالة كثيرة الحدود : **هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد ، فمثلا $f(x) = 5x^3 - 4x + 6$ دالة تكعيبية، وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود علي الصورة $f(x) = ax^b$ ، حيث a عدد حقيقي لايساوي الصفر ، b عدد صحيح غير سالب، وتسمي عندئذ دوال القوة ، إذا علمت عنصرا في مجال دالة كثيرة حدود ، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدي**

''

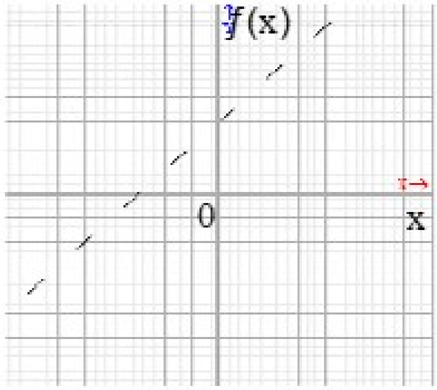
تمثيل دوال كثيرات الحدود :

إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر أكبر عدد من المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود

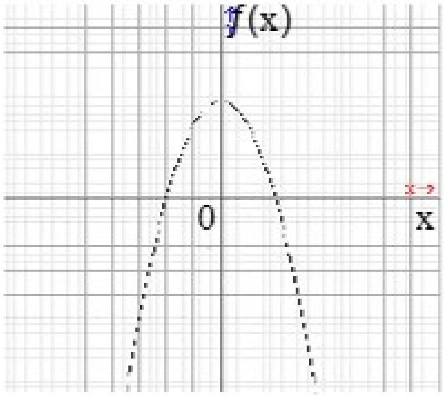
الدالة الثابتة (الدرجة0)



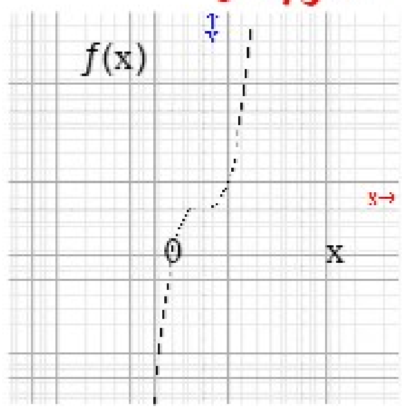
الدالة الخطية (الدرجة1)



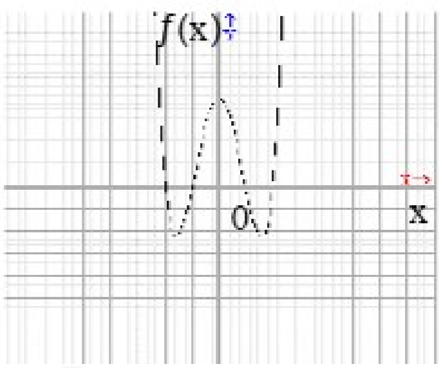
الدالة التربيعية (الدرجة2)



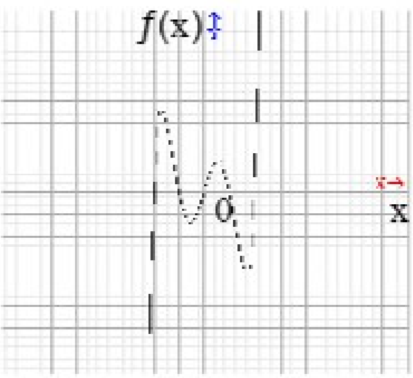
الدالة التكعيبية
الدرجة 3



دالة من الدرجة الرابعة
الدرجة 4



دالة من الدرجة الخامسة
الدرجة 5

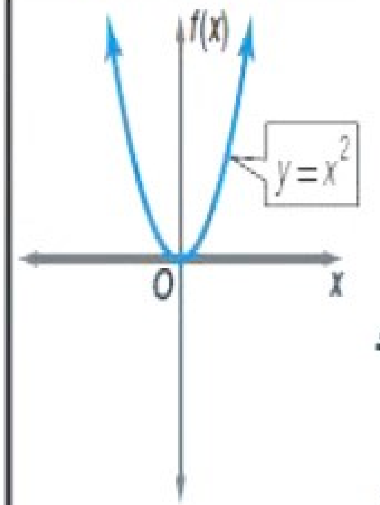


مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ، وسلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك تمثيل f (x) البياني عندما تقترب x من المالانهاية ($x \to +\infty$) ، أو سالب المالانهاية ($x \to -\infty$) ، ويحدد كل من درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيسي لها سلوك طرفي التمثيل البياني لها وكذلك مدي الدالة

مفهوم أساسي

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

أضف إلى مطويتك



الدرجة : زوجية

المعامل الرئيس:

موجب.

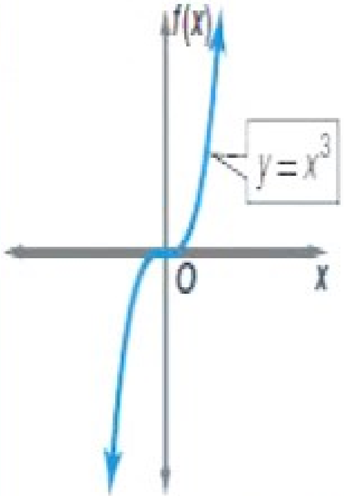
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$



الدرجة : فردية

المعامل الرئيس:

موجب.

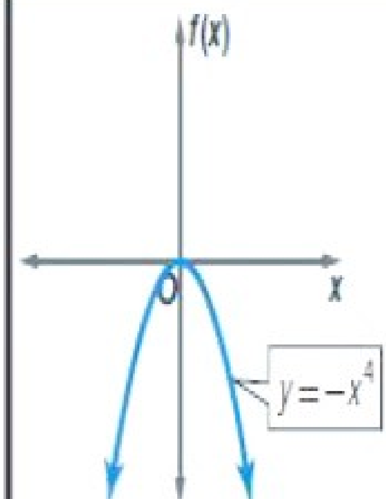
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية.

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$



الدرجة : زوجية

المعامل الرئيس:

سالب

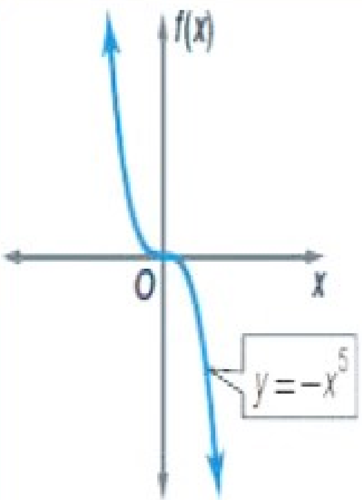
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى.

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$



الدرجة : فردية

المعامل الرئيس:

سالب

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

سلوك طرفي التمثيل البياني:

$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

ملاحظة :

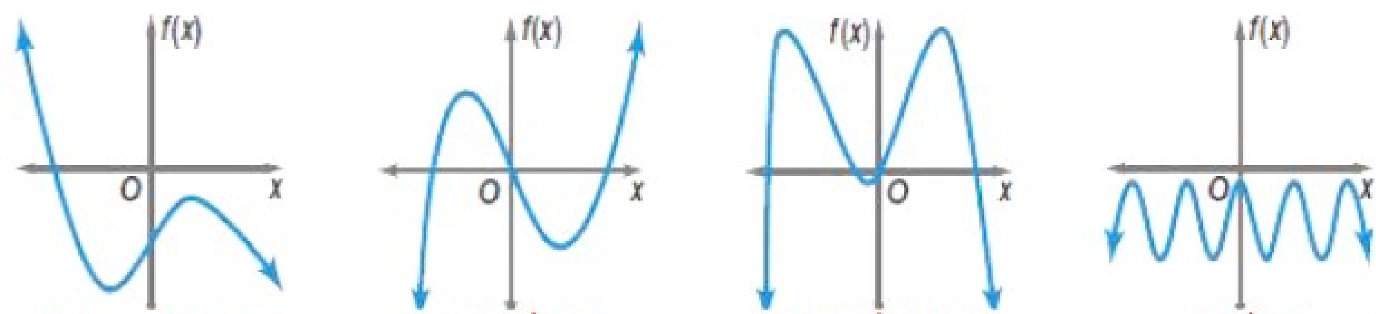
يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها ، تذكر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار ، ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار

أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة:

مفهوم أساسي	أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة
يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لايكون لها أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية	

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة



ليس لها أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية	لها 4 أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية	لها3أصفار تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية	لها صفر واحد تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية

1) حدد الدرجة والمعامل الرئيسي لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي ، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب :

1) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$ (ليست دالة بمتغير واحد فهناك متغيرين x , y)

2) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$ (ليست دالة لوجود متغير في المقام)

3) $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$ (درجتها 6 ، المعامل الرئيسي 12 -)

4) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$ (درجتها 7، المعامل الرئيسي 21 -)

5) $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$ (درجتها 5 ، المعامل الرئيسي 3)

6) $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$ (درجتها 9 ، المعامل الرئيسي 2)

7) $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$ (درجتها 8 ، المعامل الرئيسي 2 -)

2) أوجد $p(-6)$, $p(3)$ لكل دالة مما يأتي :

1) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ (1227 , 66)

2) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$ (2322 , 9)

3) $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$ (319 , - 5)

3) إذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3$ ، $d(x) = -x^3 + x + 1$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي :

1) $c(3\alpha)$ $(18\alpha^2 - 12\alpha + 3)$

2) $5d(2\alpha)$ $(-40\alpha^3 + 10\alpha + 5)$

3) $c(b^2)$ $(2b^4 - 4b^2 + 3)$

4) $d(4\alpha^2)$ $(-64a^6 + 4a^2 + 1)$

حل معادلات كثيرة الحدود 6 — 3

تحليل كثيرات الحدود :

ملخص المفهوم		طرائق التحليل
عدد الحدود	طريقة التحليل	الحالة العامة
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4\alpha^3 b^2 - 8\alpha b = 4\alpha b(\alpha^2 b - 2)$
حدان	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	$\alpha^2 - b^2 = (\alpha + b)(\alpha - b)$ $\alpha^3 + b^3 = (\alpha + b)(\alpha^2 - \alpha b + b^2)$ $\alpha^3 - b^3 = (\alpha - b)(\alpha^2 + \alpha b + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$\alpha^2 + 2\alpha b + b^2 = (\alpha + b)^2$ $\alpha^2 - 2\alpha b + b^2 = (\alpha - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$\alpha c x^2 + (\alpha d + bc)x + bd = (\alpha x + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$\alpha x + bx + \alpha y + by = x(\alpha + b) + y(\alpha + b) = (\alpha + b)(x + y)$

الصورة التربيعية :

مفهوم أساسي	الصورة التربيعية
التعبير اللفظي : الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي : $\alpha u^2 + bu + c$ ، $\alpha \neq 0$ ، α , b , c أعداد حقيقية ، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود التي تتضمن المتغير x علي هذه الصورة وذلك بعد تعريف u بدلالة x	
مثال : $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$	

1) حلل كثيرة حدود مما يأتي تحليلا تاما ، وإذا لم يكن ذلك ممكنا فاكتب " كثير حدود أولية"

1) $8c^3 - 27d^3$ — $(2c - 3d)(4c^2 + 6cd + 9d^2)$

2) $64x^4 + xy^3$ — $x(4x + y)(16x^2 - 4xy + y^2)$

3) $a^8 - a^2b^6$ — $a^2(a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$

4) $x^6y^3 + y^9$ — $y^3(x^2 + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

5) $18x^6 + 5y^6$ — (كثيرة حدود أولية)

6) $w^3 - 2y^3$ — (كثيرة حدود أولية)

2) حل كل معادلة مما يأتي :

1) $x^4 + x^2 - 90 = 0$ — $(-3 ، 3 ، \pm i\sqrt{10})$

2) $x^4 - 16x^2 - 720 = 0$ — $(-6 ، 6 ، \pm 2i\sqrt{5})$

3) $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$ — $(\pm 2i ، \pm\sqrt{11})$

4) $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$ — $(\pm\sqrt{7} ، \pm i\sqrt{13})$

3) اكتب كل عبارة مما يأتي علي الصورة التربيعية إذا كان ذلك ممكنا :

1) $x^4 + 12x^2 - 8$ — $[(x^2)^2 + 12(x^2) - 8]$

2) $-15x^4 + 18x^2 - 4$ — $[-15(x^2)^2 + 18(x^2) - 4]$

3) $8x^6 + 6x^3 + 7$ — $[2(2x^3)^2 + 3(2x^3) + 7]$

4) $9x^8 - 21x^4 + 12$ — $[(3x^4)^2 - 7(3x^4) + 12]$

5) $16x^{10} + 2x^5 + 6$ — $[4(2x^5)^2 + (2x^5) + 6]$

نظريتا الباقي والعوامل 7 – 3

نظرية الباقي :

مفهوم أساسي	نظرية الباقي

التعبير اللفظي :

إذا قسمت كثيرة حدود $p(x)$ علي $x - r$ فإن باقي القسمة ثابت ويساوي $p(r)$ ، وكذلك

الباقي		المقسوم عليه		ناتج القسمة		المقسوم
$p(r)$	$+$	$(x - r)$	$\bullet$	$Q(x)$	$=$	$p(x)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $p(x)$

مثال: $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \bullet (x+10) + 42$

يسمي عملية تطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة التعويض التركيبي ، وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة ، خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية

،،

نظرية العوامل :

مفهوم أساسي	نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملا من عوامل كثيرة الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كان $p(x) = 0$

،،

بين أن $x - 2$ عامل من عوامل كثيرة الحدود : $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$، ثم أوجد عواملها الأخرى

الحل: القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -7 & 4 & 12 \\ & . & 2 & -10 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرا ، فإن $x - 2$ عامل لكثيرة الحدود ، لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ علي النحو الآتي : $(x - 2)(x^2 - 5x - 6)$ وتكون $x^2 - 5x - 6$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ علي $(x - 2)$ تحقق إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا :

$$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$$

وعلية فإن : $x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = (x - 2)(x + 1)(x - 6)$

،،

أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملا التعويض التركيبي

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ $(-59 ، 11)$

2) $f(x) = x^2 - 8x + 6$ $(71 ، -6)$

في كل مما يأتي كثيرة حدود واحد عواملها أوجد عواملها الأخرى :

1) $x^3 - 3x + 2$ ، $x + 2$ $[(x-1)^2]$

2) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16$ ، $x + 2$ $(x + 2 , x^2 - 2x + 4)$

3) $x^3 - x^2 - 10x - 8$ ، $x + 2$ $(x - 4 , x + 1)$

الأصفار والجذور 3 - 8

تعريف :

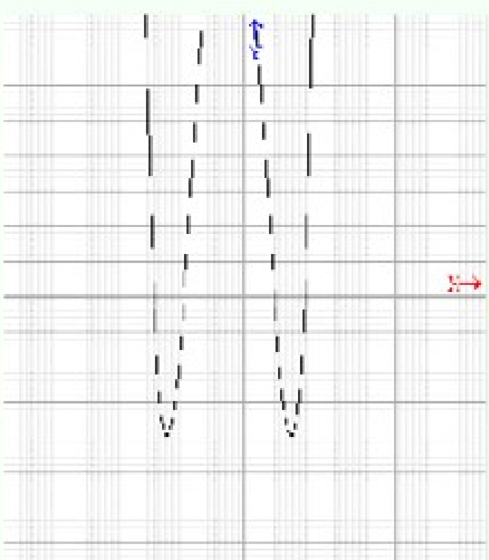
ملخص المفهوم	الأصفار، والعوامل ، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي : إذا كانت $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

دالة كثيرة حدود فإن العبارات الآتية متكافئة

- c صفر للدالة $p(x)$
- c جذر أو حل للمعادلة $p(x) = 0$
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
- إذا كان c عددا حقيقيا فإن $(c , 0)$ هو المقطع x لتمثيل الدالة $p(x)$

مثال : افرض أن دالة كثيرة الحدود هي : $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$



فان أصفار هذه الدالة هي : $-3 , -2 , 1 , 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

هي : $-3 , -2 , 1 , 2$

عوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي : $(x + 3), (x + 2) , (x - 1), (x - 2)$

ومقاطع x للتمثيل البياني للدالة

$p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي : $(-3 , 0) , (-2 , 0), (12 , 0), (2 , 0)$

النظرية الأساسية في الجبر:

مفهوم أساسي	النظرية الأساسية في الجبر
كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد علي الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة	

،،

حل كل معادلة مما يأتي ، واذكر عدد جذورها وأنواعها :

1) $x^3 + 2x = 0$ ($0 , \pm i\sqrt{2}$ ، للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان)

2) $X^4 - 16 = 0$ ($\pm 2 , \pm 2i$ ، للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان)

3) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$ ($-5 , 2 , -1$ ، للمعادلة 3 جذور حقيقية)

4) $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$ ($\pm i\sqrt{3} , \frac{1}{3}$ ، جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان)

،،

الحل: 1) $x^3 + 2x = 0$

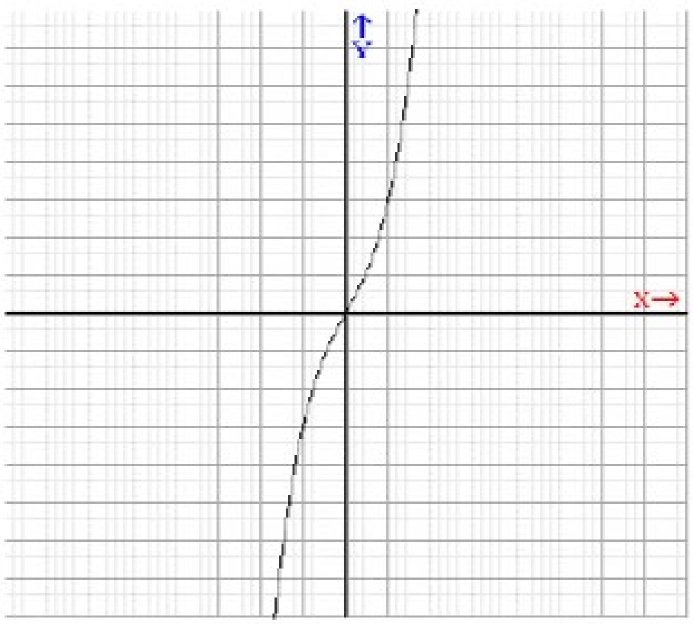
$x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0$

$x = 0$ أو $x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2 \rightarrow x = \mp\sqrt{-2} = \mp\sqrt{2}\, i$

للمعادلة جذر حقيقي واحد هو 0 ،

وجذران تخيليان هما $\mp\sqrt{2}\, i$



تحقق :

يقطع التمثيل البياني للدالة المحورx في نقطة واحدة عندما $x = 0$

،،

النظرية الأساسية في الجبر :

مفهوم أساسي	نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر	
التعبير اللفظي : يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المنتمية لمجموعة الأعداد المركبة بما في ذلك الجذور المكررة		
مثال : $x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

،،

قانون ديكارت للإشارات :

مفهوم أساسي	قانون ديكارت للإشارات
إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن : •عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة$p(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $p(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي •عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة$p(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $p(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي	

أذكر العدد الممكن الأصفار الحقيقية الموجبة ـ والحقيقية السالبة ، والتخيلية للدالة :

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

الحل: بما أن درجة $h(x)$ تساوي 5 فإن لها 4 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما ،
استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها
احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $h(x)$

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

لا لا نعم لا نعم

+ +   + +   + −   − −   − +

نجد أن هناك تغيران في إشارة المعاملات ، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون :
2 أو 0

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $h(-x)$

$$h(-x) = -2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 9$$

نعم نعم لا نعم لا

− +   + −   − −   − +   + +

نجد أن هناك 3 تغيرات في إشارة المعاملات ، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون :
3 أو 1

أنشئ جدول يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
2	3	0	2 + 3 + 0 = 5
2	1	2	2 + 1 + 2 = 5
0	3	2	0 + 3+ 2 = 5
0	1	4	0 + 1 + 4 = 5

نظرية الأعداد المركبة المترافقة :

مفهوم أساسي	نظرية الأعداد المركبة المترافقة
التعبير اللفظي : إذا كان a , b عددين حقيقيين حيث $b \neq 0$ ، وكان $a + bi$ صفرا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضا	
مثال : إذا كان $3 + 4i$ صفرا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$ فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضا	

،،،

ملاحظة :

عندما تعطي جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة ، حول الأصفار إلي عوامل ، ثم اضرب جميع العوامل في بعضها البعض لتحصل علي الدالة كثيرة الحدود المطلوبة

،،،

أكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل مايمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة ، إذا كان العددان $1 + 2i$, $1 -$ من أصفارها

الحل : بما أن $1 + 2i$ صفر للدالة ، فإن $1 - 2i$ أيضا صفر للدالة حسب نظرية الأعداد المركبة المترافقة لذا فإن $x - (1 + 2i)$, $x - (1 - 2i)$, $x + 1$

$$f(x) = (x + 1)\,[\,x - (1 - 2i)\,]\,[\,x - (1 + 2i)\,]$$

$$f(x) = (x + 1)\,[\,(x - 1) - 2i\,]\,[\,(x - 1) + 2i\,]$$

$$f(x) = (x + 1)[\,(x - 1)^2 - 4i^2\,]$$

$$f(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 1 + 4) = (x + 1)(x^2 - 2x + 5)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + x^2 - 2x + 5 = x^3 - x^2 + 3x + 5$$

،،،

أذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة ، والحقيقية السالبة ، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

25) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ (0 أو 2 ، 0 أو 2 ، 0 أو 2 أو 4)

26) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$ (0 أو 2 ، 1 ، 0 أو 2)

27) $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$ (0 أو 2 ، 1 ، 2 أو 4)

،،،

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي :

31) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ $(-6 , -2 , 1)$

$(-3, -3, -8i, 8i)$ $f(x)=x^4+6x^3+73x^2+384x+576$ (32

$(-3, 0, 3, -i, i)$ $f(x)=x^5-8x^3-9x$ (33

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل مايمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة ، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

$(y = x^3 - 2x^2 - 13x - 10)$ $5, -2, -1$ (37

$(y = x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$ $-4, -3, 5$(38

$(y = x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x)$ $0, -5, 3+i$ (41

نظرية الصفر النسبي 3 – 9

مفهوم أساسي **نظرية الصفر النسبي**

التعبير اللفظي : إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة ، فإن أي صفر نسبي للدالة $p(x)$ سيكون علي صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة حيث p أحد عوامل الحد الثابت , q أحد عوامل المعامل الرئيسي

مثال : لتكن $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$ ، فإذا كان العدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفر للدالة فإن 3 أحد عوامل العدد 12 , 2 أحد عوامل العدد2

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذاكانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، والمعامل الرئيسي لها 1 ، وحدها الثابت لايساوي صفرا ، فإن أي صفر نسبي للدالة $p(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت

أكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل مما يأتي :

$(\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32)$ $f(x)=x^4+8x-32$ (1

$(\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2})$ $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 10$ (2

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي :

1) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$ $(-5, -3, -2)$

2) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 100x + 75$ $(\frac{3}{4}, -5, 5)$

3) $f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8$ $(-1, 2)$

''

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1	الوحدة التخيلية I هي الجذر التربيعي الأساسي للعدد A) -2 B) 1 C) -1 D) 0
2	العدد 9i هو عدد A) طبيعي B) تخيلي بحت C) نسبي D) كلي
3	حل المعادلة $x^2 + 4 = 0$ هو A) $\pm 2i$ B) ± 2 C) ± 4 D) $\pm 4i$
4	حاصل ضرب $3i \cdot 4i$ هو A) $12i$ B) $-12i$ C) -12 D) 12
5	إذا كان المميز $b^2 - 4ac$ مربع كامل فإن للمعادلة A) جذران حقيقيان نسبيان B) جذران حقيقيان غير نسبيين C) جذر حقيقي واحد D) جذران مركبان
6	إذا كان المميز $b^2 - 4ac$ ليس مربع كامل فإن للمعادلة A) جذران حقيقيان نسبيان B) جذران حقيقيان غير نسبيين C) جذر حقيقي واحد D) جذران مركبان
7	إذا كان المميز $b^2 - 4ac = 0$ فإن للمعادلة A) جذران حقيقيان نسبيان B) جذران حقيقيان غير نسبيين C) جذر حقيقي واحد D) جذران مركبان
8	إذا كان المميز $b^2 - 4ac < 0$ فإن للمعادلة A) جذران حقيقيان نسبيان B) جذران حقيقيان غير نسبيين C) جذر حقيقي واحد D) جذران مركبان
9	إذا كان r_1, r_2 هما جذرا المعادلة $a x^2 + bx + c = 0 , a \neq 0$ فإن مجموع الجذرين يساوي : A) $\frac{b}{c}$ B) $\frac{c}{a}$ C) $-\frac{b}{a}$ D) $\frac{c}{a}$

10	إذا كان r_1, r_2 هما جذرا المعادلة $a\,x^2 + bx + c = 0\ ,\ a \neq 0$ فإن حاصل ضرب الجذرين يساوي : A) $\frac{c}{a}$ B) $-\frac{b}{a}$ C) $-\frac{c}{a}$ D) $\frac{b}{c}$
11	درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي A) 4 B) 1 C) 3 D) 2
12	إذا كان $5^{k+7} = 5^{2k-3}$ فإن قيمة k A) 10 B) 6 C) 3 D) 4
13	إذا كان $q^{41} = q^{4k} \cdot q^{5}$ فإن قيمة k A) 11 B) 8 C) 9 D) 2
14	المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $8x^3+12x^2 - 3x + 1$ هو A) 12 B) 3 C) -3 D) 8
15	درجة كثبرة الحدود $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$ هو A) 6 B) 8 C) 4 D) 3
16	الدالة الخطية تقطع محور x في A) غبر ذلك B) 3 نقاط C) نقطتين D) نقطة
17	خاصية الإبدال متحققة في عملية .... الأعداد المركبة A) طرح B) جمع C) قسمة D) غير ذلك
18	مرافق العدد المركب $5 + 3i$ هو A) $-5 - 3i$ B) $5 - 3i$ C) $-5 + 3i$ D) $5 + 3i$
19	إذا كان $3 + 2yi = 3 - 6i$ فإن قيمة y تساوي A) 3 B) -3 C) -6 D) 6
20	درجة كثبرة الحدود $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$ A) 10 B) 3 C) -4 D) 6
21	درجة كثبرة الحدود $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$ A) 3 B) 11 C) 2 D) -3
22	المعامل الرئيسي للدالة $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x$ هو A) 4 B) 5 C) -6 D) 6
23	المعامل الرئيسي للدالة $f(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7$ هو A) -3 B) 8 C) -1 D) 2
24	عدد جذور المعادلة $4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$ هي

	A) 2 B) 3 C) 1 D) 4
25	قيمة k التي تجعل باقي قسمة $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$ يساوي 3 هو A) 8 B) 11 C) 2 D) −3

،،

أكمل العبارات الآتية :

1	العدد المركب هو عدد يكتب علي الصورة ،،،،،،،،،، $(a + ib)$
2	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد علي الأقل ينتمي لمجموعة .... (الأعداد المركبة)
3	$3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$ ليست دالة لوجود.......... (متغير في المقام)
4	$x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$ كثيرة حدود من الدرجة .... (7)
5	قيمة k التي تجعل باقي قسمة $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$ يساوي 3 هو .... (3)
6	درجة الدالة $5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$ هو ...... ومعاملها الرئيسي هو.......... (5 , 6)
7	الدالة $6xy^2 - xy + y^2$ كثيرة حدود بمتغيرين في .... (x, y)
8	إذا كان $3 + 4i$ صفرا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$ فإن .... صفر للدالة أيضا $(3 - 4i)$

،،

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخاطئة

1	العدد 6i تخيلي بحت (✓)
2	تسمي المعادلة : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز (x)
3	يسمي معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعامل الرئيسي (✓)
4	تسمي كثيرة الحدود التي لايمكن تحليلها كثيرة حدود بمتغير واحد (x)
5	دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد (✓)

6	تبسيط تعابير تتضمن قوي ، يعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة	(✓)
7	القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود علي ثنائية حد	(✓)
8	$(x^3)^2 + 3x^3 - 8 = 0$ هي دالة قوة	(✗)
9	يتساوي العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوي الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيلين	(✓)
10	عند جمع أو طرح الأعداد المركبة نجمع أو نطرح الأجزاء الحقيقية معا والأجزاء التخيلية معا	(✓)
11	إذا كان $b^2 - 4ac$ مربع كامل فإن جذري المعادلة التربيعية حقيقيان غير نسبيان	(✗)
12	إذا كان $b^2 - 4ac$ سالب فإن جذري المعادلة التربيعية جذران مركبان	(✓)
13	تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملا من عوامل كثيرة الحدود $p(x)$ إذا وفقط إذا كان $p(x) = 0$	(✓)

،،،

اختار من العبارة B مايناسبها من العبارة A:

	العبارة A		العبارة B
1	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد علي الأقل	2	تخيلي بحت
2	العدد 6i	3	-3
3	قيمة k التي تجعل باقي قسمة $(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$ يساوي 3 هو	1	ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة
4	الدالة $18x^6 + 5y^6$	5	لايمكن كتابتها علي الصورة التربيعية
5	الدالة $x^4 + 5x + 6$	4	كثيرة حدود أولية
6	$3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$	7	ليست دالة بمتغير واحد فهناك متغيرين x , y
7	$-6x^6 - 4x^5 + 13xy$	6	ليست دالة لوجود متغير في المقام

،،،

الفصل الرابع العلاقات والدوال العكسية والجذرية

العمليات علي الدوال 1 – 4

العمليات علي الدوال :

مفهوم أساسي — العمليات علي الدوال

العملية	التعريف	مثال
		لتكن $f(x) = 2x$ ، $g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10X$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، $g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}$ ، $x \neq 5$

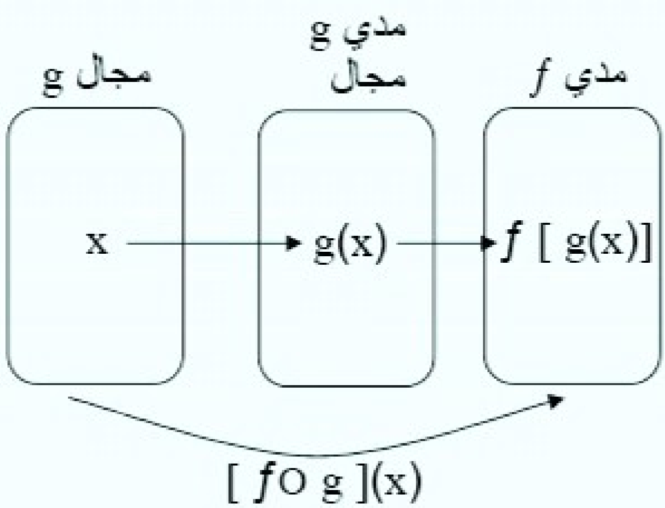
تركيب دالتين :

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

التعبير اللفظي :

إذا كانت f ، g دالتين وكان مدي g مجموعة جزئية من مجال f فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل :

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$



ملاحظة :

يمكن أن يكون تركيب دالتين عير معرف فإذا كانت f, g فإن$[f \circ g](x)$ يكون معرفا فقط إذا كان مدي $g(x)$ مجموعة جزئية من مجال f ، وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرفة فقط إذا كان مدي $f(x)$ مجموعة جزئية من مجال g .

ولاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f\circ g \neq g\circ f$ لذا , فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم .

1) أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي :

1) $f(x) = x - 1$ ، $g(x) = 5x - 2$

الحل : $[\ (f+g)(x) = 6x - 3$ ، $(f-g)(x) = -4x + 1$ ،
$(f\cdot g)(x) = 5x^2 - 7x + 2$ ، $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x-1}{5x-2}$, $x \neq \frac{2}{5}\ ]$

2) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = -x + 1$

الحل : $[\ (f+g)(x) = x^2 - x + 1$ ، $(f-g)(x) = x^2 + x - 1$ ،
$(f\cdot g)(x) = -x^3 + x^2$ ، $x \neq 1$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{-x+1}\ ]$

3) $f(x) = x^2 - 4$ ، $g(x) = x^2 - 8x + 4$

الحل : $(f+g)(x) = 4x^2 - 8x$ ، $(f-g)(x) = 2x^2 + 8x - 8$ ،
$(f\cdot g)(x) = 3x^4 - 24x^3 + 8x^2 + 32x - 16$ ، $x \neq 4 \pm 2\sqrt{3}$,
$[\ (\frac{f}{g})(x) = \frac{3x^2-4}{x^2-8x+4}$

....

2) أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية ، إذا كان ذلك ممكنا :

$f(x) = \{(-8, -4), (0, 4), (2, 6), (2, -2)\}$
$g(x) = \{(4, -4), (-2, -1), (-4, 0), (6, -5)\}$

الحل: $(g\circ f)(x) = \{(-8, 0), (0, -4), (2, -5), (2, -1)\}$
$f\circ g$ غير معرفة

....

$f(x) = \{(-1, 11), (2, -2), (5, -7), (4, -4)\}$
$g(x) = \{(5, -4), (4, -3), (-1, 2), (2, 3)\}$

الحل: $g\circ f$ غير معرفة ، $f\circ g$ غير معرفة

....

3) أوجد $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كل مما يأتي ، إذا كان ذلك ممكنا :

1) $g(x) = 4x + 3$, $f(x) = 2x^2 - x + 1$

الحل: $(g\circ f)(x) = 8x^2 - 4x + 7$ ، $(f\circ g)(x) = 32x^2 + 44x + 16$

،،

2) $f(x) = 4x - 1 , g(x) = x^3 + 2$

الحل: $(g\circ f)(x) = (4x - 1)^3 + 2$ ، $(f\circ g)(x) = 4x^3 + 7$

،،

العلاقات والدوال العكسية 2 – 4

تعريف :

إيجاد العلاقة العكسية : تذكر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة ، والعلاقة العكسية هي مجموعة من الأزواج المرتبة ، يمكن الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة ، فيصبح مجال العلاقة هو مدي العلاقة العكسية لها ، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها

مفهوم أساسي	العلاقة العكسية
التعبير اللفظي :	تكون كل من العلاقتين عكسية بالنسبة للا خري إذا وفقط إذا احتوت إحداهما علي زوج مرتب مثل (a , b) وتحتوي الاخري علي الزوج المرتب (b , a)
مثال :	كل من العلاقتين A , B علاقة عكسية للاخري $A = [(1 , 5) , (2 , 6) , (3 , 7)]$ ، $B = [(5 , 1) , (6 , 2) , (7 , 3)]$

،،

ملاحظة :

إن ماينطبق علي الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية ، ينطبق أيضا علي الأزواج المرتبة في الدالة والدالة العكسية . ويرمز إلي الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$

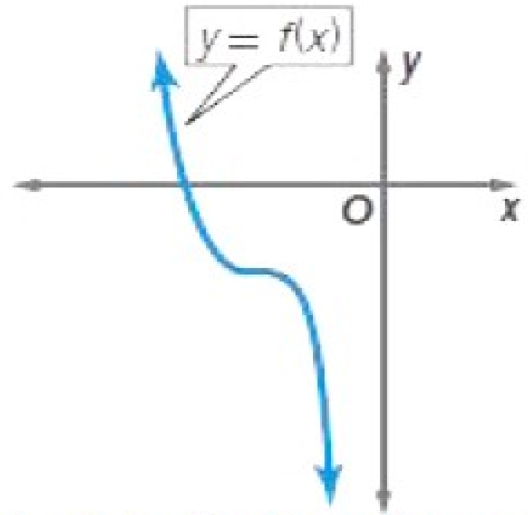
،،

مفهوم أساسي	خواص الدالة العكسية
التعبير اللفظي :	إذا كان كل من f , f^{-1} دالة عكسية للأخرى فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$
مثال :	ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$ أوجد $f(6)$ أوجد $f^{-1}(2)$ $f(6) = 6 - 4 = 2$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$ وبما أن كلا من $f(x) , f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى فإن $f(6) = 2 , f^{-1}(2) = 6$

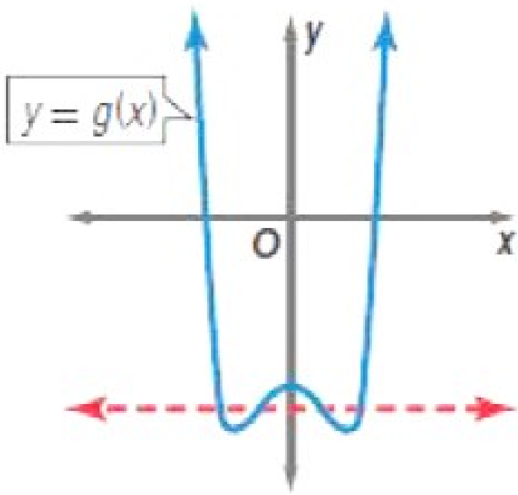
،،

ملاحظة :

إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضا ، فإن الدالة الأصلية تكون دالة واحد لواحد ، تذكر أنه يمكن استعمال الخط الرأسي لمعرفة إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكن استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لايمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحني الدالة في أكثر من نقطة . لذا يكون معكوس الدالة $y = f(x)$ يمثل دالة أيضا



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحني الدالة في أكثر من نقطة . لذا لايكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالة

يمكنك إيجاد الدالة العكسية لدالة بتبديل مجال الدالة ومداها.

التأكد من الدالة العكسية :

يمكن تحديد إذا كانت دالتان تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا ، وذلك بإيجاد كل من تركيبهما . فإذا كان الناتج في كل منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = x$ ، فإن كل من الدالتين تمثل دالة عكسية للأخرى .

مفهوم أساسي	الدالة العكسية
التعبير اللفظي :	تكون كل من الدالتين g , f دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان تركيب كل منهما يساوي الدالة المحايدة .
الرمـــــوز :	الدالتان $f(x)$, $g(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = x$, $[f \circ g](x) = x$

1- أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقتين الآتيتين :

1) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$

<u>الحل:</u> $\{(-5, 1), (6, 2), (-7, 3), (8, 4), (-9, 5)\}$

2) $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$
الحل: $\{(0, 3), (4, 5), (-8, 7), (12, 9), (16, 11)\}$

2- حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى ، مجيبا بـ " نعم أو لا "

1) $f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = 2x - 3$ (لا)

2) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ ، $g(x) = -3x + 9$ (نعم)

3) $f(x) = \frac{x+10}{8}$ ، $g(x) = 8x - 10$ (نعم)

دوال ومتباينات الجذر التربيعي 3 - 4

دوال الجذر التربيعي :

إذا احتوت دالة علي الجذر التربيعي لمتغير ، تسمي دالة الجذر التربيعي . وهي نوع من أنواع الدوال الجذرية ،

مفهوم أساسي الدالة الرئيسية (الأم) لدوال الجذر التربيعي

الدالة الرئيسية (الأم) : $f(x) = \sqrt{x}$

المجال : $\{x \mid x \geqslant 0\}$

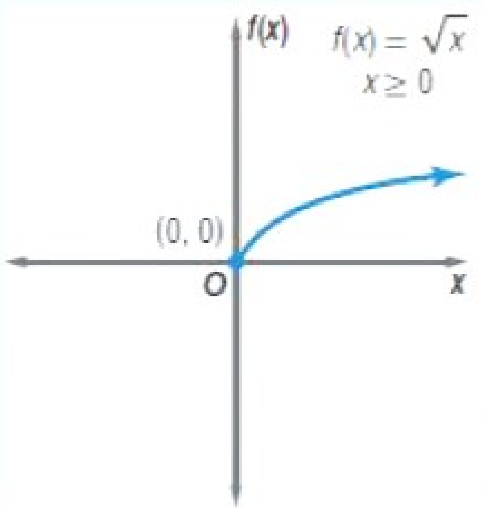
ألمدي : $\{f(x) \mid f(x) \geqslant 0\}$

المقطع x والمقطع y : $x = 0, f(x) = 0$

غير معرفة عندما : $x < 0$

سلوك الدالة عند طرفيها : $x \to 0, f(x) \to 0$

$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$



ملاحظة :

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرفة .

تحويلات الجذر التربيعي:

مفهوم أساسي	تحويلات الجذر التربيعي
$f(x) = a\sqrt{x-h}\ +K$	
h ، إزاحة أفقية إزاحة بمقدار | h | وحدة يمينا إذا كانت h موجبة إزاحة بمقدار | h | وحدة يسارا إذا كانت h سالبة المجال هو $\{x \mid x \geqslant h\}$	k ، إزاحة رأسية إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي أعلي إذا كانت k موجبة إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي أسفل إذا كانت k سالبة المدى $\{f(x) \mid f(x) \geqslant k\}$
a : الشكل والاتجاه • إذا كانت $a<0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x . • إذا كانت $\lvert a \rvert >1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيا . • إذا كانت $0< \lvert a \rvert <1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيا .	

،،

متباينات الجذر التربيعي :

متباينة الجذر التربيعي هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي . ويمكن تمثيلها بيانيا تماما مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى .

،،

عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي :

13) $f(x) = -\sqrt{2x}\ +2$

الحل: المجال = $\{x \mid x \geqslant 0\}$، المدي = $\{f(x)f \mid f(x) \leqslant 2\}$

،،

14) $f(x) = \sqrt{x}\ -6$

الحل: المجال = $\{x \mid x \geqslant 0\}$، المدي = $\{f(x) \mid f(x) \geqslant -6\}$

،،

15) $f(x) = 4\sqrt{x-2}\ -8$

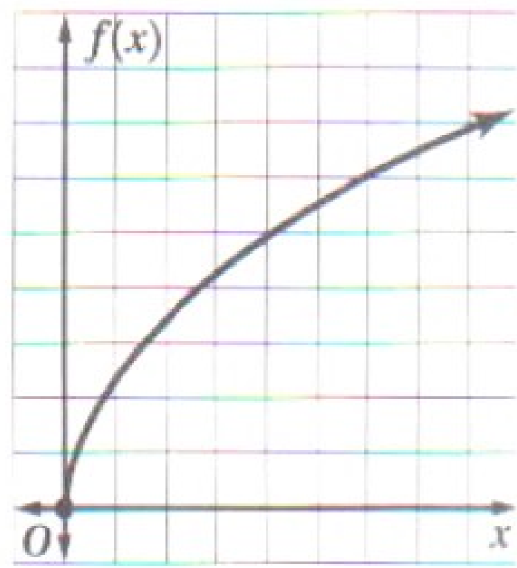
الحل: المجال = $\{x \mid x \geqslant 2\}$، المدي = $\{f(x) \mid f(x) \geqslant -8\}$

،،

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها :

1) $f(\mathbf{x}) = \sqrt{6x}$
2) $f(\mathbf{x}) = -\sqrt{5x}$
3) $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x+1}$
4) $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x-4} - 10$

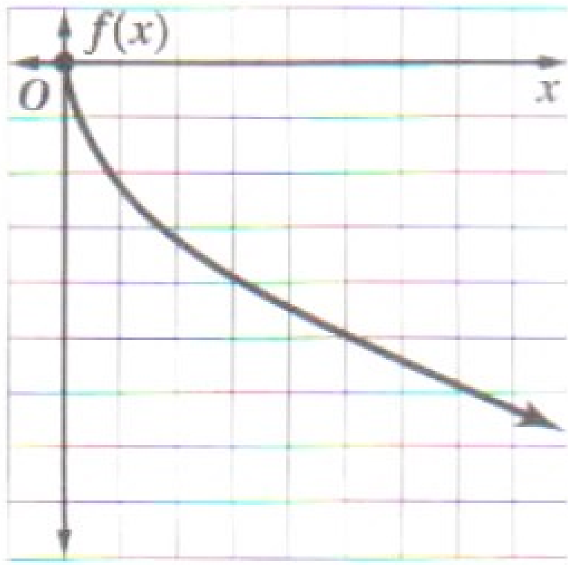
(1



المجال = $\{x \mid x \geqslant 0\}$

المدي = $\{f(x) \mid f(x) \geqslant 0\}$

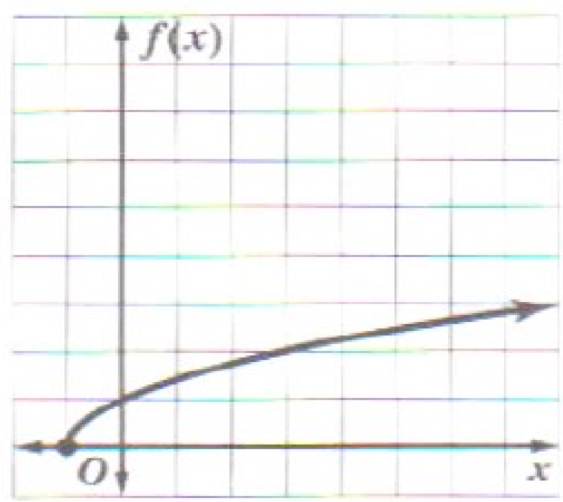
(2



المجال = $\{x \mid x \geqslant 0\}$

المدي = $\{f(x) \mid f(x) \leqslant 0\}$

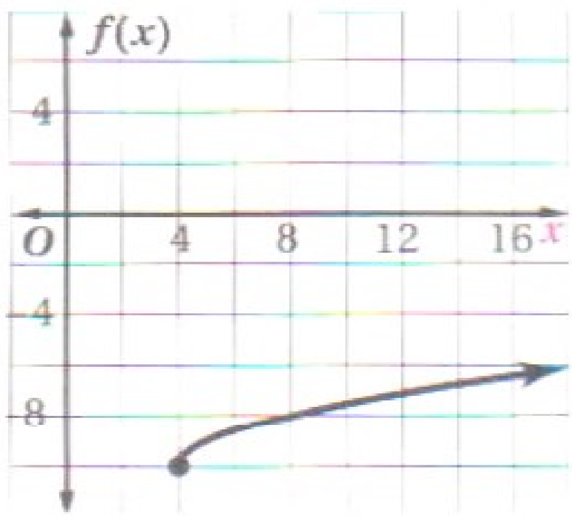
(3



المجال = $\{x \mid x \geqslant -1\}$

المدي = $\{f(x) \mid f(x) \geqslant 0\}$

(4



المجال = $\{x \mid x \geqslant 4\}$

المدي = $\{f(x) \mid f(x) \geqslant -10\}$

مثل كل متباينة مما يأتي بيانيا :

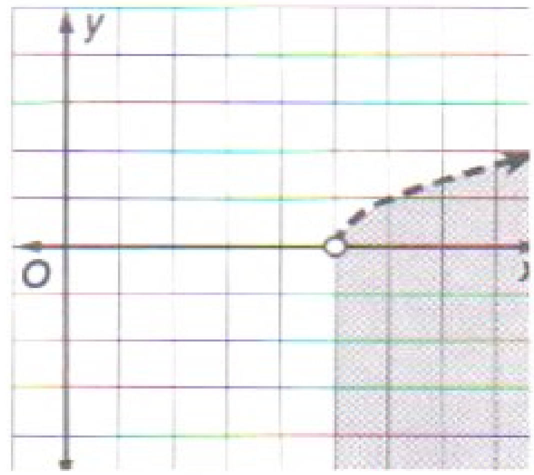
1) $y < \sqrt{x-5}$

2) $y > \sqrt{x+6}$

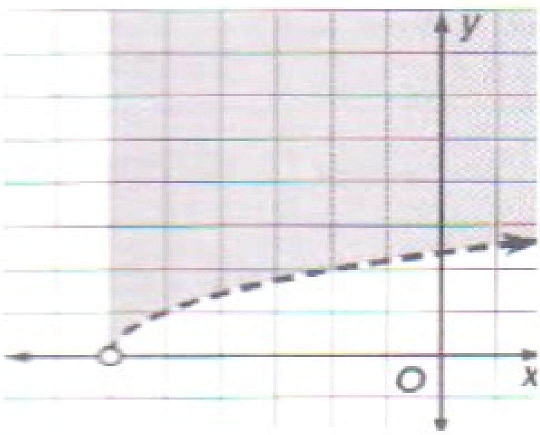
3) $y \geqslant -4\sqrt{x+3}$

4) $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

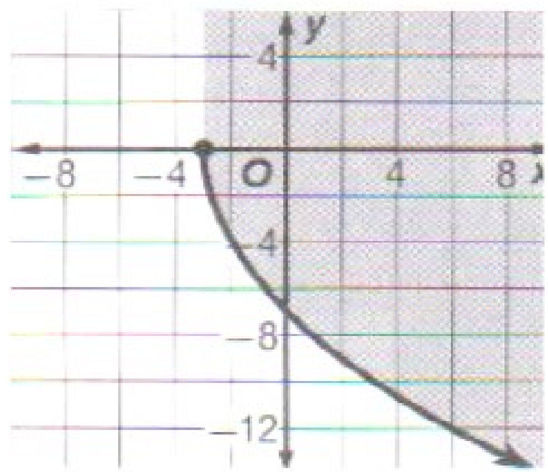
1)



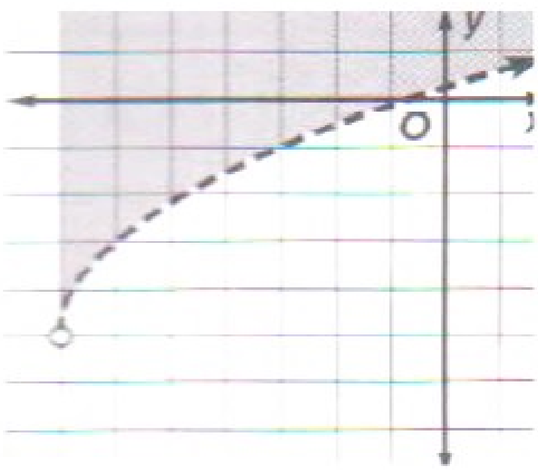
2)



3)



4)



الجذر النونى 4 – 4

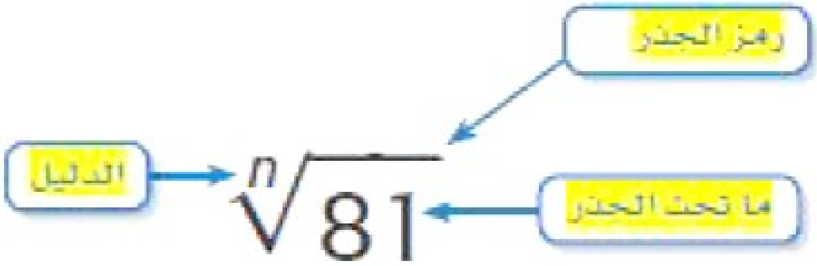
تعريف :

مفهوم أساسي	تعريف الجذر النوني

التعبير اللفظي : لأي عددين a , b ، ولأي عدد صحيح موجب n إذا كان $a^n = b$ فإن a هو جذر نوني للعدد b

مثال : بما أن $81 = (-3)^4$ فإن 3 – هو جذر رابع للعدد 81 والعدد 3 يسمي الجذر الرئيسي

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



ملاحظة :

إذا كان n (دليل الجذر) عدد زوجي فإنه يوجد جذران احدهما موجب والآخر سالب والجذر الموجب يسمي الجذر الرئيسي

تعريف :

مفهوم أساسي	الجذر النوني الحقيقي	
ليكن n عدد صحيح أكبر من 1 ، a عددا حقيقيا		
a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد ، وجذر حقيقي سالب وحيد $\sqrt[n]{a}$ _ ، الجذر الموجب هو الجذر الرئيسي	هناك جذر حقيقي موجب وحيد ، وليس هناك جذر حقيقي سالب $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية	ليس هناك جذور حقيقية موجبة ، وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي : $0 = \sqrt[n]{0}$	هناك فقط جذر حقيقي : $0 = \sqrt[n]{0}$

ملاحظة:

إذا كان دليل الجذر عددا زوجيا وأس ماتحت الجذر عددا زوجيا ، وكان أس الناتج عدد فرديا ، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج للتأكد من أن الجواب ليس سالبا .

بسط كلا مما يأتي :

1) $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ $\quad (\pm 15a^{8}b^{18})$

2) $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ $\quad (-20x^{16}y^{20})$

3) $\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$ [$(a^2+4a)^6$]

4) $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ [$3b^6c^4$]

5) $\sqrt[5]{-243}$ (- 3)

6) $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$ [$-(y-9)^3$]

7) $\sqrt[6]{x^{18}}$ ($|x^3|$)

8) $\sqrt[3]{a^{12}}$ (a^4)

....

بسط كلا مما يأتي :

1) $\sqrt{196c^6d^4}$ ($14\,|c^3|\,d^2$)

2) $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ ($-3a^5b^3$)

3) $\sqrt[4]{-16x^{16}y^8}$ ($\pm 2ix^4y^2$)

4) $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$ [$4(x+y)^2$]

....

العمليات على العبارات الجذرية 4 - 5

تبسيط العبارات الجذرية :

يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورا نونية باستعمال خواص العمليات عليها .

مفهوم أساسي	خاصية ضرب الجذور
التعبير اللفظي : لأي عددين حقيقيين a , b ولأي عدد صحيح n حيث n ≤ 1 فإن : $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\bullet\sqrt[n]{b}$ ، إذا كانت n عددا زوجيا وكان a , b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددا فرديا .	
مثال : $\sqrt[3]{3}\bullet\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{27}=3,\ \sqrt{2}\bullet\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$	

ولكي تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة، يجب أن لايحتوي ماتحت الجذر عوامل هي قوي نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود .

خاصية قسمة الجذور : هي خاصية أخري تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية

مفهوم أساسي	خاصية قسمة الجذور
التعبير اللفظي : لأي عددين حقيقيين a , b ، حيث $b \neq 0$ ، ولأي عدد صحيح n حيث n <1 فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كانت جميع الجذور معرفة	
مثال : $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ ، $\sqrt{\frac{27}{3}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$	

،،

ملاحظة :

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر ، استعمل عملية تسمي **إنطاق المقام** . ولعمل ذلك اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق .

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \bullet \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

،،

ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية :

ملخص المفاهيم	تبسيط العبارات الجبرية
تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية : • إذا كان دليل الجذر n أصغر مايمكن . • إذا لم يتضمن ماتحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب علي صورة قوي نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود . • إذا لم يتضمن ماتحت الجذر كسورا ، • إذا لم توجد جذور في المقام .	

،،

العمليات علي العبارات الجذرية :

يمكنك استعمال خاصيتي الصرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها ،

ملاحظة :

يمكن جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع أحاديات الحدود أو طرحها ولكن بشرط أن تكون الجذور متشابهه ، أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

بسط كل عبارة جذرية فيما يأتي :

1) $\sqrt{72a^8b^5}$ الحل: ($8a^4b^2\sqrt{2b}$)	2) $\sqrt{9a^{15}b^3}$ الحل: ($3a^7b\sqrt{ab}$)
3) $\sqrt{18a^6b^3c^5}$ الحل: ($3a^3bc\sqrt{2bc}$)	4) $\sqrt{\frac{7x}{10y^3}}$ ($\frac{\sqrt{70xy}}{10y^2}$)
5) $\frac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$ ($\frac{\sqrt[3]{150x^2y^2}}{5y}$)	6) $\sqrt[4]{\frac{7x^3}{6b^2}}$ ($\frac{\sqrt[4]{28b^2x^3}}{21b1}$)
7) $3\sqrt{5y} \bullet 8\sqrt{10yz}$ الحل: ($120y\sqrt{2z}$)	8) $2\sqrt{32a^3b^5} \bullet \sqrt{8a^7b^2}$ الحل: ($32a^5b^3\sqrt{b}$)
9) $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$ الحل: ($9\sqrt{10}+8\sqrt{5}+9\sqrt{2}$)	10) $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$ الحل: ($8\sqrt{7}-72\sqrt{10}+2\sqrt{11}$)

بسط كلا من العبارات الجذرية الآتية :

1) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$ الحل: ($56\sqrt{3}+42\sqrt{6}-36\sqrt{2}-54$)	2) $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{6}+3\sqrt{8})$ الحل: ($36\sqrt{2}+36\sqrt{6}+20\sqrt{3}+60$)

3) $\dfrac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **الحل:** $\left(6\sqrt{3}+6\sqrt{2} \right)$	4) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **الحل:** $\left(\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2} \right)$
5) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$ **الحل:** $\left(\dfrac{20-7\sqrt{3}}{11} \right)$	6) $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ **الحل:** (2)

....

بسط كلا من العبارات الجذرية الآتية :

1) $\sqrt[3]{-54x^{6}y^{11}}$ **الحل:** $\left(-3x^{2}y^{3}\sqrt[3]{2y^{2}} \right)$	2) $\sqrt[4]{\dfrac{12x^{3}y^{2}}{5a^{2}b}}$ **الحل:** $\left(\dfrac{\sqrt[4]{1500a^{2}b^{3}x^{3}y^{2}}}{51a1b} \right)$
3) $\dfrac{\sqrt[3]{36xy^{2}}}{\sqrt[3]{10xz}}$ **الحل:** $\left(\dfrac{\sqrt[3]{450y^{2}z^{2}}}{5z} \right)$	4) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ **الحل:** $\left(\dfrac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \right)$

....

بسط كل عبارة جذرية فيما يأتي ، حيث b عدد زوجي :

1) $\sqrt[b]{a^{b}}$ **الحل:** $\lvert \alpha \rvert$	2) $\sqrt[b]{a^{4b}}$ **الحل:** a^{4}
3) $\sqrt[b]{a^{2b}}$ **الحل:** $\lvert \alpha^{2} \rvert$	4) $\sqrt[b]{a^{3b}}$ **الحل:** $\lvert \alpha^{3} \rvert$

....

الأسس النسبية 4 ـ 6

تعريف :

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي : لأي عدد حقيقي b وأي عدد صحيح موجب n فإن : $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ، إلا إذا كانت $b<0$, n عددا زوجيا فإن الجذر النوني قد يكون عددا مركبا .

أمثلة : $(27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ ، $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$

الاسس النسبية :

مفهوم أساسي — **الأسس النسبية**

التعبير اللفظي : يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأي عدد حقيقي b لايساوي صفرا ولأي عددين صحيحين x , y بحيث $y > 1$ ، إلا إذا كانت $b< 0$ ، y عددا زوجيا ، فإن الجذر قد يكون مركبا

مثالان : $(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64i$ ،

$$(27)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = (3)^2 = 9$$

مع ملاحظة أن القوانين التي تنطبق علي الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضا علي الأسس النسبية السالبة

اكتب العبارة الأسية علي الصورة الجذرية ، والعبارة الجذرية علي الصورة الأسية في كل مما يأتي :

1) $8^{\frac{1}{5}}$ ($\sqrt[5]{8}$)	2) $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ ($\sqrt{x^9}$)
3) $\sqrt{17}$ ($17^{\frac{1}{2}}$)	4) $\sqrt[4]{625x^2}$ ($5x^{\frac{1}{2}}$)

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي :

$27^{\frac{1}{3}}$ (1	(3)	$256^{\frac{1}{4}}$ (2	(4)
$16^{-\frac{1}{2}}$ (3	($\frac{1}{4}$)	$(-27)^{-\frac{2}{3}}$ (4	($\frac{1}{9}$)

بسط كل عبارة مما يأتي :

$x^{\frac{1}{3}} \bullet x^{\frac{2}{5}}$ (1	($x^{\frac{11}{5}}$)	$y^{-\frac{4}{5}}$ (2	($\frac{y^{\frac{1}{5}}}{y}$)
$\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ (3	($\sqrt[3]{3}$)	$\sqrt[4]{25x^{2}}$ (4	[$\sqrt{5x}$]

بسط كل عبارة مما يأتي :

$a^{\frac{7}{4}} \bullet a^{\frac{5}{4}}$ (1	$(a^{\frac{11}{4}})$	$(y^{-\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{4}}$ (2	$(y^{\frac{3}{20}})$
$\sqrt[6]{216}$ (3	$(\sqrt{6})$	$w^{-\frac{7}{8}}$ (4	$(\frac{w^{\frac{1}{8}}}{w})$

بسط كل عبارة مما يأتي :

$\frac{f^{-\frac{1}{4}}}{f^{\frac{1}{2}} \bullet f^{-\frac{1}{3}}}$ (1	$(\frac{f^{\frac{7}{12}}}{f})$	$\frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} + 2}$ (2	$(\frac{g^{3}-2g^{\frac{5}{2}}}{g-4})$

(4 $\sqrt{23} \bullet \sqrt[3]{23^2}$ $(23\sqrt[6]{23})$	(3 $\dfrac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ $(c^{\frac{1}{2}})$

حل المعادلات والمتباينات الجذرية 7 – 4

حل المعادلات الجذرية : تحتوي **المعادلات الجذرية** علي عبارات جذرية ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين .

مفهوم أساسي	حل المعادلات الجذرية
الخطوة 1 : اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة. الخطوة 2 : ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر وذلك للتخلص من الجذر. الخطوة 3 : حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة ثم تحقق من صحة الحل .	

عند حل بعض المعادلات الجذرية قد لايحقق الحل المعادلة الأصلية ويسمي مثل هذا الحل **حلا دخيلا** .

،،،

حل المتباينات الجذرية : **المتباينات الجذرية** هي متباينة تحوي متغيرا في الصورة الجذرية ، ولحل متباينة في الصورة الجذرية ، اتبع الخطوات الآتية :

مفهوم أساسي	حل المتباينات الجذرية
الخطوة 1 : إذا كان دليل الجذر عددا زوجيا فعين قيم المتغير التي لاتجعل ماتحت الجذر سالبا . الخطوة 2 : حل المتباينة جبريا. الخطوة 3 : اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل .	

،،،

حل كل معادلة مما يأتي :

(1 $6+\sqrt{3x+1}=11$ **الحل :** (8)	(2 $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$ **الحل :** (3)
(3 $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$ **الحل :** ($\frac{5}{6}$)	(4 $2+\sqrt{3y-5}=10$ **الحل :** (23)

،،،

حل كل معادلة مما يأتي :

1) $(5n-3)^{\frac{1}{3}}+3=4$ الحل : $\left(\frac{7}{5}\right)$	2) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$ الحل : $\left(\frac{40}{3}\right)$
3) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$ الحل : (18)	4) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$ الحل : (24.5)

حل كل متباينة مما يأتي :

1) $\sqrt{2x+14}-6\geqslant 4$ الحل : $(x\geqslant 43)$	2) $10-\sqrt{2x+7}\leqslant 3$ الحل : $(x\geqslant 21)$
3) $6+\sqrt{3y+4}<6$ الحل : : (لايوجد حل حقيقي)	4) $\sqrt{d+3}+\sqrt{d+7}>4$ الحل : $\left(d>-\frac{3}{4}\right)$
5) $\sqrt{2y+5}+3\leqslant 6$ الحل : $\left(-\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 2\right)$	6) $-2+\sqrt{8-4z}\geqslant 8$ الحل : $(z\leqslant -23)$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1	حل المعادلة $4(3x+6)^{\frac{1}{4}}-12=0$ هو A) 7 B) 25 C) 29 D) 37
2	حل المعادلة $1-\sqrt{X-2}=5$ هو A) 25 B) 48 C) 29 D) 38
3	قيمة المقدار $9^{\frac{5}{3}}\bullet 9^{\frac{1}{3}}$ هو A) 36 B) 25 C) 81 D) 16
4	حل المعادلة $18=\frac{9}{8}b$ هو

		16 (A	25 (B	29 (C	44 (D
5	حل المعادلة $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ هو :				
		23(A	53 (B	123 (C	623 (D
6	حل المعادلة $(3n+2)^{\frac{1}{3}}+1=0$ هو				
		-1 (A	7 (B	-3 (C	5 (D
7	حل المعادلة $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$ هو				
		7(A	61 (B	29 (C	37 (D
8	حل المعادلة $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$ هو				
		36(A	25 (B	3 (C	16 (D
9	إذا كان $p(x)=x-2$ فإن $p(-4)$ تساوي				
		-6 (A	7 (B	-3 (C	5 (D
10	قيمة $\sqrt{\sqrt{81}}$ هو				
		7(A	3 (B	6 (C	4 (D

،،

أكمل العبارات الآتية :

1	عند .... تستعمل نواتج دالة منهما لحساب نواتج الدالة الأخرى .	(تركيب دالتين)
2	عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي فإن الجذر غير السالب يسمي	(الجذر الرئيسي)
3	للتخلص من الجذور في المقام فإنك تستعمل عملية تسمي	(إنطاق مقام)
4	عند حل معادلات جذرية تحصل أحيانا علي عدد لايحقق المعادلة الأصلية ويسمي مثل هذا العدد	(الحل الدخيل)
5	دالة الجذر ألتربيعي هي نوع من أنواع	(الدوال الجذرية)
6	.... هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية .	(العلاقة العكسية)
7	إذا ساوي كل من تركيبي دالتين .... فإن كل منهما تكون دالة عكسية للأخرى .	(الدالة المحايدة)
8	تعد $\sqrt{x-3}>5$ مثالا علي	(متباينة الجذر التربيعي)
9	إذا كان $p(x)=x^2+5$ فإن $p(-4)$ تساوي	(21)

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخاطئة

1	حل المعادلة $\sqrt{2x+3} = 3$ هو 5	(✗)
2	حل المعادلة $\sqrt{2m+1} = \sqrt{m+3}$ هو 2	(✓)
3	حل المعادلة $3(3x-1)^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$ هو 3	(✓)
4	قيمة المقدار $\sqrt[3]{-125}$ هو 5	(✗)
5	معكوس الدالة $f(x) = 3x^2$ هو دالة أيضا	(✗)
6	معكوس الدالة $h(x) = x^3 - 3$ هو دالة أيضا	(✓)
7	معكوس الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ هو $f^{-1}(x) = 2x - 6$	(✓)
8	إذا كان $p(x) = x^2 - x$ فإن $p(-4) = 20$	(✓)

اختار من العبارة B مايناسبها من العبارة A:

	العبارة A		العبارة B
1	حل المعادلة $a^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$ هو	2	103
2	حل المعادلة $\sqrt{x-3} + 5 = 15$ هو	3	3
3	قيمة المقدار $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ هو	4	3(x + 3)
4	تبسيط المقدار $\sqrt[3]{27(x+3)^3}$ هو	1	64
5	تبسيط المقدار $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$ هو	6	$(x^2+2)^3$
6	تبسيط المقدار $\sqrt[6]{(x^2+2)^{18}}$ هو	7	- 21
7	إذا كان $p(x) = 6x + 3$ فإن $p(-4)$ تساوي	5	$3x^2y^5$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق

جمال السيد سليمان شويته ـ ثانوية البرود