المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات 3

التعليم الثانوي - نظام المسارات
السنة الثالثة

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة 1445-2023

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٣– التعليم الثانوي – نظام المسارات – السنة الثالثة./
وزارة التعليم. – الرياض، ١٤٤٤هـ .
٤٠٤ص ؛ ٢١ X ٢٧,٥ سم
ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٥١١-٤٠٤-٢

١ـ الرياضيات – مناهج – السعودية ٢ـ الرياضيات – كتب دراسية

أ. العنوان

ديوي ٣٧٢.٧ ١٤٤٤/٧٨١٢

رقم الإيداع : ١٤٤٤/٧٨١٢
ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٥١١-٤٠٤-٢

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم:
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.

fb.ien.edu.sa

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن هذه المناهج والكتب سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدِّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

فهرس أقسام الكتاب

وزارة التعليم

Ministry of Education

2023 - 1445

القسم الأول

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفهرس

الفصل 1 تحليل الدوال

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفصل 1

تحليل الدوال
Analyzing Functions

فيما سبق:

درستُ الدوال وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أتعرف الدوال وخصائصها وتمثيلاتها البيانية.
- أتعرف الدوال الرئيسة، والتحويلات الهندسية عليها.
- أجد كلًّا من: متوسط معدل تغير دالة، تركيب الدوال، الدالة العكسية.

لماذا؟

إدارة أعمال: تُستعملُ الدوالُ في عالم الأعمال والتجارة لتحليل التكلفة، والتنبُّؤ بالمبيعات، وحساب الأرباح، وتوقُّع التكاليف، وتقدير الانخفاض في القوة الشرائية ... إلخ.

قراءة سابقة: كوِّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 1

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

1) $x > -3$
2) $x \leq -2$
3) $x \leq -5$
4) $x > 1$
5) $7 \geq x$
6) $-4 < x$

حل كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

7) $y - 3x = 2$
8) $y + 4x = -5$
9) $2x - y^2 = 7$
10) $y^2 + 5 = -3x$
11) $9 + y^3 = -x$
12) $y^3 - 9 = 11x$

13) **حلوى:** يستعملُ صانع حلوى المعادلة $12D = n$ لحساب العدد الكلي المبيع من قطع الحلوى؛ حيث D عدد عبوات الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة من الحلوى تم بيعها إذا كان عدد القطع المبيعة 312 قطعة؟

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

14) $3y - 4, y = 2$
15) $2b + 7, b = -3$
16) $x^2 + 2x - 3, x = -4a$
17) $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$
18) $-4c^2 + 7, c = 7a^2$
19) $2 + 3p^2, p = -5 + 2n$

20) **درجات حرارة:** تُستعملُ المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي؛ حيث تمثّل C الدرجات السيليزية، و F الدرجات الفهرنهايتية، فإذا كانت درجة الحرارة $73°F$ ، فأوجد درجة الحرارة السيليزية المقابلة لها مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

مراجعة المفردات

القانون العام (quadratic formula):

تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، حيث $a \neq 0$

الميل (slope):

يعطي الميل m لمستقيم يحوي النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بالصيغة: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، حيث $x_2 \neq x_1$.

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):

هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ،

حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ، n عدد كلي.

الدالة النسبية (rational function):

هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$

الجذر النوني (nth root):

العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

ويشير الرمز $\sqrt[n]{}$ إلى الجذر النوني.

الدليل

رمز الجذر

$$\sqrt[n]{81}$$

ما تحت الجذر

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

1-1 الدوال
Functions

فيما سبق:
درستُ مجموعات الأعداد ورموزها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات:
الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

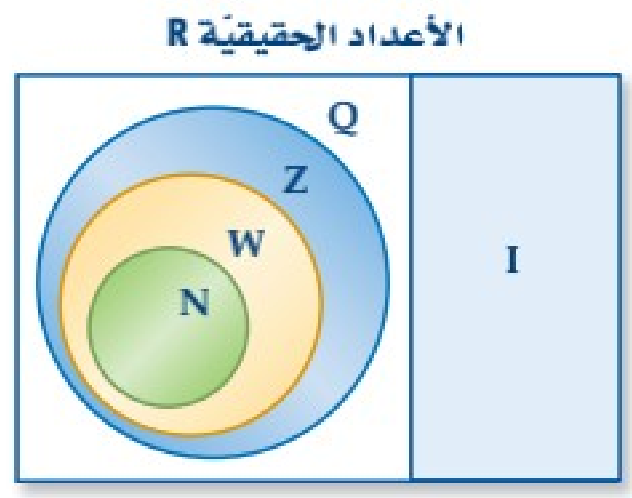
الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function

لماذا؟


تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية: تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي — الأعداد الحقيقية



الرمز	المجموعة	أمثلة
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

يمكنك وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. **ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .**

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

الأعداد x حيث...

x لها هذه الخصائص...

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال 1 استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \ge 8, x \in W\}$ وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على 2− وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

✓ تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ **1B)** $x \le -3$ **1C)** $-1 \le x \le 5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

قراءة الرياضيات

غير محدودة: تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف).

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

مثال 2 استعمال رمز الفترة

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \le 16$ $\quad$ $(-8, 16]$

b) $x < 11$ $\quad$ $(-\infty, 11)$

c) $x \le -16$ أو $x > 5$ $\quad$ $(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

تحقق من فهمك

2A) $-4 \le y < -1$ $\quad$ 2B) $a \ge -3$ $\quad$ 2C) $x > 9$ أو $x < -2$

إرشادات للدراسة

الرمزان $\cup$، $\cap$:
يُقرأ الرمز "$\cup$" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين.
يُقرأ الرمز "$\cap$" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.
مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.

4) **جبريًا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

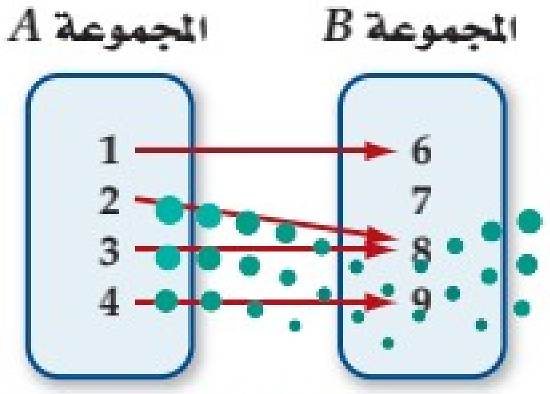
أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثّلة في المخطط المجاور تمثّل دالةً.
حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.
المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى $= \{6, 8, 9\}$.

المجموعة A $\quad$ المجموعة B



إرشادات للدراسة

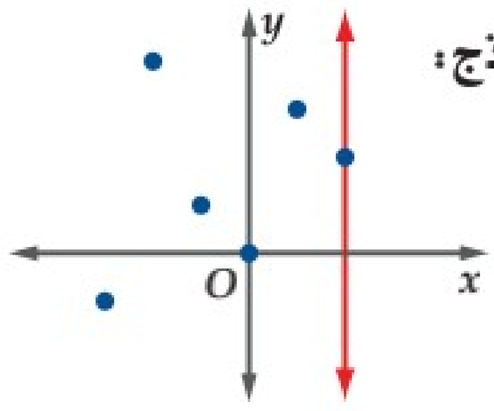
المجال والمدى:
في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعمل الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للتعبير عن المدى، أي أن:
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{6, 8, 9\}$

كما يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي — اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



إرشادات للدراسة

جدوليًّا: إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر من قيمة من قيم y ، كما يوضح الجدول أدناه:

x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

مثال 3 تحديد العلاقات التي تمثل دوال

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

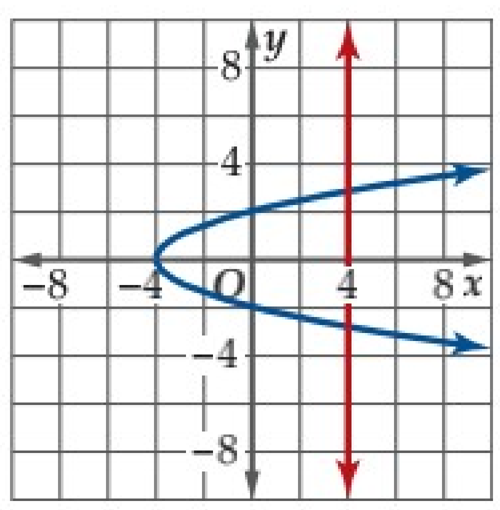
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالةً في x .

b)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ، وعليه فإن y تمثل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة ، فإنّ y لا تمثّل دالةً في x .

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y: لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لِـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لِـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لِـ y.

$y^2 - 2x = 5$ المعادلة الأصلية

$y^2 = 5 + 2x$ أضف $2x$ لكلا الطرفين

$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالةً في x؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لِـ y، إحداها موجبة ، والأخرى سالبة.

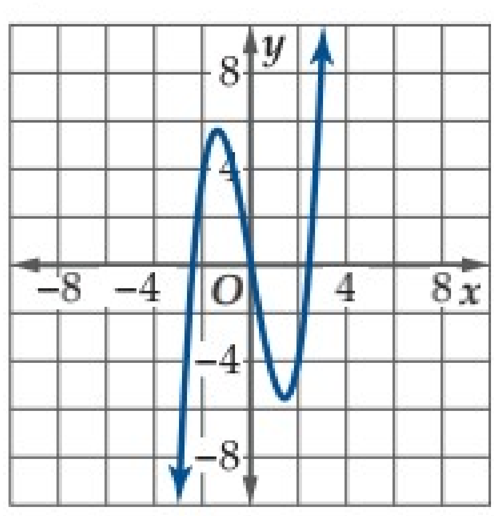
تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)



3D) $3y + 6x = 18$

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x ، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

المعادلة	الدالة المرتبطة بالمعادلة
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

مـثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$ ، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24 \quad \text{عوّض 6 مكان } x$$
$$= 36 + 48 - 24 \quad \text{بسّط}$$
$$= 60 \quad \text{بسّط}$$

b) $f(-4x)$

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24 \quad \text{عوّض } -4x \text{ مكان } x$$
$$= 16x^2 - 32x - 24 \quad \text{بسّط}$$

c) $f(5c + 4)$

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24 \quad \text{عوّض } (5c+4) \text{ مكان } x$$
$$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24 \quad \text{فك الأقواس } (5c+4)^2 \text{ و } 8(5c+4)$$
$$= 25c^2 + 80c + 24 \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

4A) $f(12)$ **4B)** $f(6x)$ **4C)** $f(-3a + 8)$

الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1707م - 1783م)
عالم رياضي سويسري كتب أكثر من 800 بحث في الرياضيات، وهو أول من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًا.

إرشادات للدراسة

مجال الدالة:
يمكنك كتابة مجال الدالة في المثال 5a بالطريقة المختصرة بالشكل:
$D = R - \{0, 7\}$

مـثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$

تكون العبارة $\dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2 - 7x = 0$ ، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$ و $x = 7$ ، أي $D = \{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, \infty)$.

b) $g(t) = \sqrt{t - 5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D = \{x \mid x \geq 5, x \in R\}$ أو $D = [5, \infty)$.

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال:
يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا، $f(x) = \sqrt{x - 5}$ و $g(t) = \sqrt{t - 5}$ يعبران عن الدالة نفسها.

c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

تكون هذه الدالة معرّفة إذا كان المقام معرّفًا، وقيمته لا تساوي صفرًا، وهذا يعني أنها معرفة عندما يكون $x^2 - 9 > 0$ ، وعليه فإن $x^2 > 9$ وهذا يعني أن $|x| > 3$ ؛ لأن $\sqrt{x^2} = |x|$ ، ويكون مجال $h(x)$ هو $D = \{x \mid x < -3$ أو $x > 3, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ 5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ 5C) $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوالّ المتعددة التعريف**.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

تحقق من فهمك

6) **سرعة:** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t \ , & 0 \le t \le 15 \\ 60 \ , & 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 \ , & 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ 6B) $v(15)$ 6C) $v(245)$

إرشادات للدراسة

سرعة السيارة: تقاس سرعة السيارة عادة بالميل أو بالكيلومتر لكل ساعة، ويمكن أن تتغير كل ثانية ما لم يستعمل مثبت السرعة.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2)

1) $x > 50$

2) $x < -13$

3) $x \leq -4$

4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$

5) $-31 < x \leq 64$

6) $x > 21$ أو $x < -19$

7) $x \geq 67$ أو $x \leq 61$

8) $x > 86$ أو $x \leq -45$

9) المضاعفات الموجبة للعدد 5

10) $x \geq 32$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالةً في x أم لا: (مثال 3)

11) المتغير المستقل x يمثّل رقم الحساب في البنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب.

12)

x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

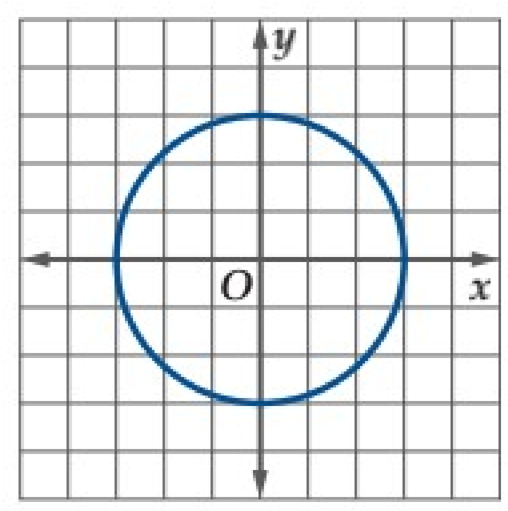
13) $\frac{1}{x} = y$

14) $x^2 = y + 2$

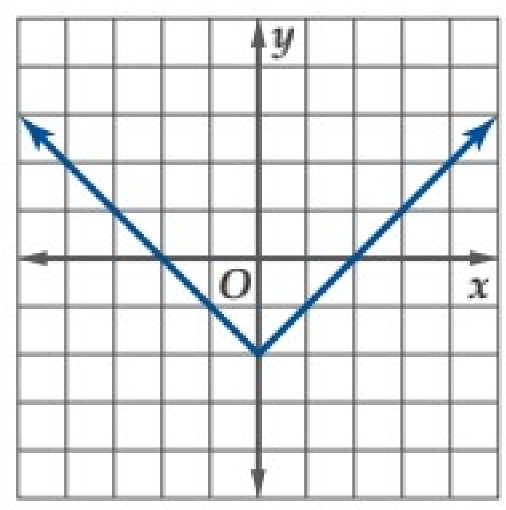
15) $\sqrt{48y} = x$

16) $\frac{x}{y} = y - 6$

17)



18)



أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

a) $g(9)$

b) $g(3x)$

c) $g(1 + 5m)$

20) $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$

a) $h(4)$

b) $h(-2y)$

c) $h(5b + 3)$

21) $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$

a) $f(-6)$

b) $f(4t)$

c) $f(3 - 2a)$

22) $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$

a) $g(-2)$

b) $g(5x)$

c) $g(8 - 4b)$

23) $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$

a) $g(-2)$

b) $g(3m)$

c) $g(4m - 2)$

24) $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$

a) $t(-4)$

b) $t(2x)$

c) $t(7 + n)$

25) **مبيعات:** قُدرت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

السنة	المبيعات بملايين الريالات
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a) أوجد $f(1)$.

b) أوجد $f(5)$.

c) هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنة الأولى، أم في السنة الأخيرة؟ برِّر إجابتك.

حدّد مجال كل دالة مما يأتي: (مثال 5)

26) $f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$

27) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$

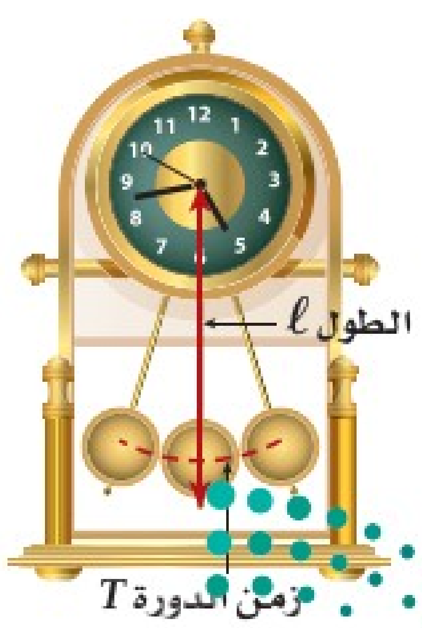
28) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$

29) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

30) $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$

31) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 1}$

32) **فيزياء:** يعطى زمن الدورة T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، فهل تمثّل T دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدِّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيِّن السبب. (مثال 5)



أوجد $f(-5)$ وَ $f(12)$ لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (مثال 6)

33) $$f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , \quad x<3\\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , \quad x>8\end{cases}$$

34) $$f(x)=\begin{cases}-15 & , \quad x<-5\\ \sqrt{x+6} & , \quad -5\le x\le 10\\ \dfrac{2}{x}+8 & , \quad x>10\end{cases}$$

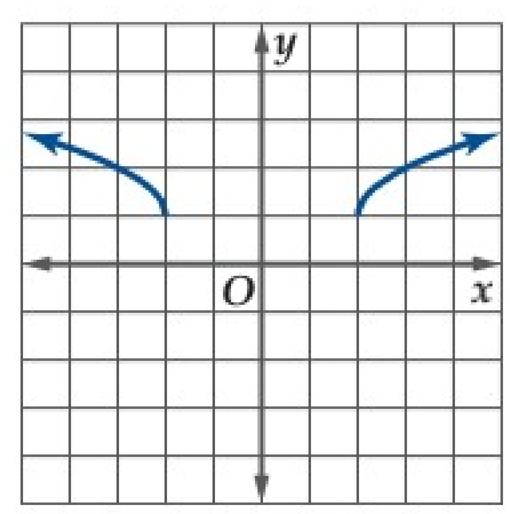
35) **عمل:** تمثل الدالة $T(x)$ أدناه الربح (بالريال) الذي تكسبه شركة توزيع لأجهزة هاتف:

$$T(x)=\begin{cases}2.1x & , \quad 0<x\le 7000\\ 500+2.4 & , \quad 7000<x\le 20000\\ 800+3x & , \quad 20000<x\le 80000\end{cases}$$

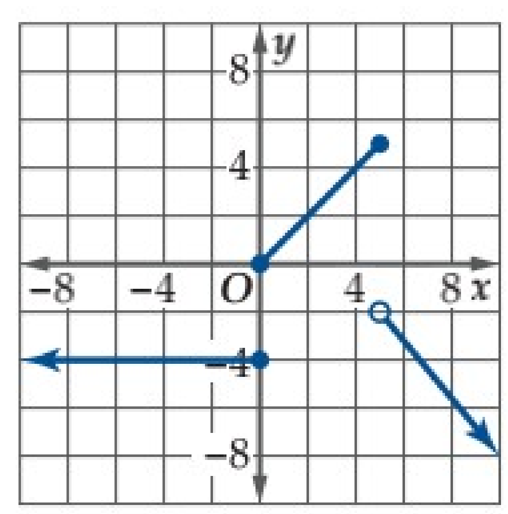
حيث x تمثّل عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد:
$T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.

معتمدًا على اختبار الخط الرأسي ، حدِّد ما إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثل دالة أم لا، وبرِّر إجابتك.

36)



37)



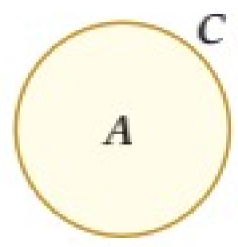
38) **رياضة:** تتكون مسابقة رياضية من ثلاث مراحل: سباحة مسافة 0.4 mi، وقيادة دراجة هوائية مسافة 5 mi، وجري مسافة 2.6 mi . فإذا كان معدل سرعة عزام في كل مرحلة من المراحل الثلاث كما في الجدول أدناه:

المرحلة	معدل السرعة
السباحة	4 mi/ h
قيادة الدراجة	20 mi/ h
الجري	6 mi/ h

a) اكتب دالة متعددة التعريف تمثّل المسافة D التي قطعها عزام بدلالة الزمن t.

b) حدِّد مجال الدالة.

39) **هندسة:** يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحتها A ومحيطها C.



a) اكتب المساحة كدالة في المحيط.

b) أوجد $A(4)$, $A(0.5)$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟

40) **حسابات:** تتناقص قيمة أجهزة الحاسوب بعد شرائها مع مرور الزمن. وتُستعملُ الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t)=1800-30t$ تمثّل قيمة حاسوب بالريال، بعد t شهر من شراءه. فحدِّد مجال هذه الدالة.

أوجد $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f(a)$, $f(a+h)$ ، حيث $h\neq 0$ لكلٍّ مما يأتي:

41) $f(x)=-5$

42) $f(x)=\sqrt{x}$

43) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$

44) $f(x)=x^2-6x+8$

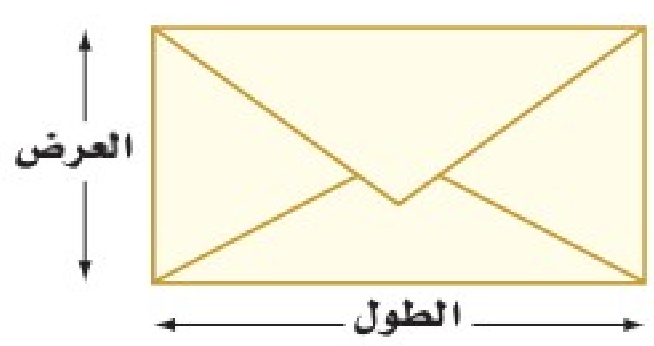
45) $f(x)=-14x+6$

46) $f(x)=x^3+9$

47) $f(x)=5x^2$

48) $f(x)=x^3$

49) **صناعة:** في أحد المعامل الوطنية يتم صنع أغلفة بريدية متفاوتة الأبعاد، بحيث تكون نسبة طول الغلاف إلى عرضه من 1.3 إلى 2.5، فإذا كانت أصغر قيمة لطول الأغلفة المنتجة 5 in، وأكبر قيمة $11\frac{1}{2}$ in ، فأجب عما يأتي:



a) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في طوله ℓ، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 1.8 ، ثم اكتب مجال الدالة.

b) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في عرضه h، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 2.1 ، ثم اكتب مجال الدالة.

c) أوجد مساحة الغلاف عند أكبر طول ممكن له ، وأكبر نسبة بين طوله وعرضه.

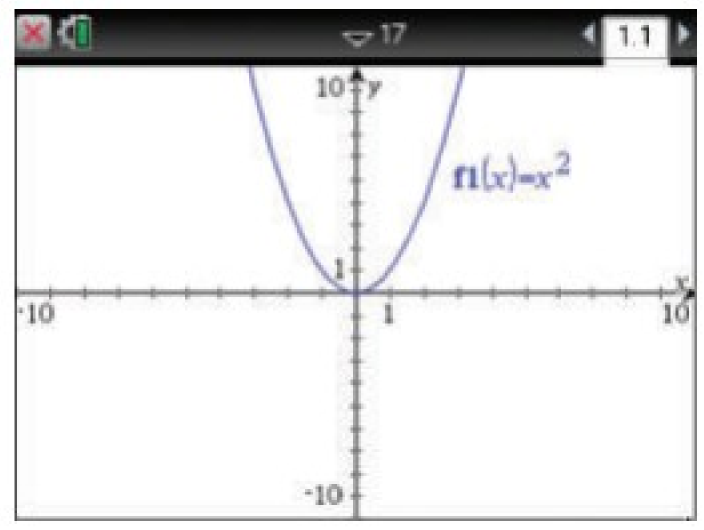
في كلٍّ من العلاقتين الآتيتين، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالة في x أم لا. برِّر إجابتك.

50) $x=|y|$

51) $x=y^3$

52) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى الدالة $f(x) = x^n$، حيث $n \in N$.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًّا لقيم n الصحيحة من 1 إلى 6.



b) **جدوليًا:** تنبأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثّلتها في الفرع a، واعرضه في جدول يتضمن قيم n، والمدى المرتبط بكل منها.

c) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n زوجيًّا.

d) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

55) **تحدٍّ:** إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3$ و $G(x+1) = \frac{G(x-2)\,G(x-1) + 1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$، فأوجد $G(6)$.

تبرير: أيُّ الجمل الآتية تصف الدالة المعرَّفة من المجموعة X إلى المجموعة Y بشكل صحيح، وأيها خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعد كتابتها لتصبح صحيحة.

56) يرتبط كل عنصر من Y بعنصر واحد من X.

57) لا يرتبط عنصران أو أكثر من X بالعنصر نفسه من Y.

58) لا يرتبط عنصران أو أكثر من Y بالعنصر نفسه من X.

اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد الدالة من خلال:

59) جملة لفظية تبيّن العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

60) مجموعة أزواج مرتبة.

61) جدول قيم.

62) تمثيل بياني.

63) معادلة.

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

64) $\frac{2r - 4}{r - 2}$

65) $\frac{r^2 - 7r - 30}{r^2 - 5r - 24}$

66) $\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$

67) $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{16}}$

68) $\frac{6x^2 - 11x + 4}{6x^2 + x - 2} \cdot \frac{12x^2 + 11x + 2}{8x^2 + 14x + 3}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

69) $\frac{8}{x} = 1 + \frac{2}{x - 2}$

70) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

حل كلًّا من المتباينتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

71) $\frac{x + 1}{x - 3} - 1 \leq 2$

72) $\frac{6}{x} + 2 \geq 0$

تدريب على اختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x - 3}}{x - 5}$$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات
Analyzing Graphs of Functions and Relations

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمها.
(الدرس 1-1)

والآن:

- أستعملُ التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات:

الأصفار
zeros
الجذور
roots
التماثل حول مستقيم
line symmetry
التماثل حول نقطة
point symmetry
الدالة الزوجية
even function
الدالة الفردية
odd function

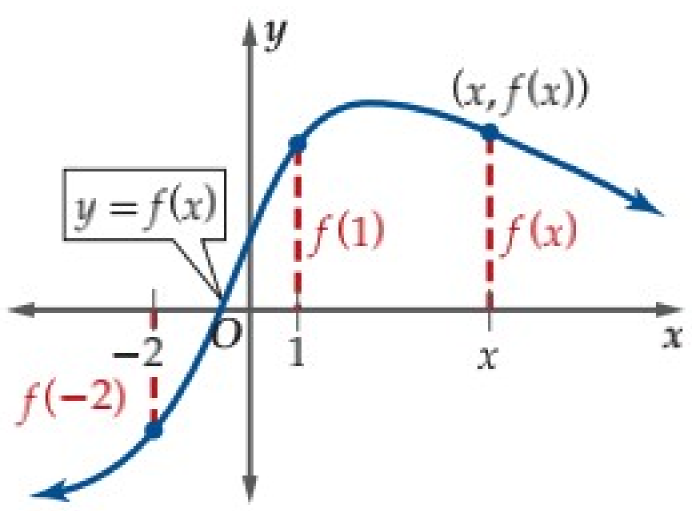
لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1433 – 1440) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07\ ,\ 1 \le x \le 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1433هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

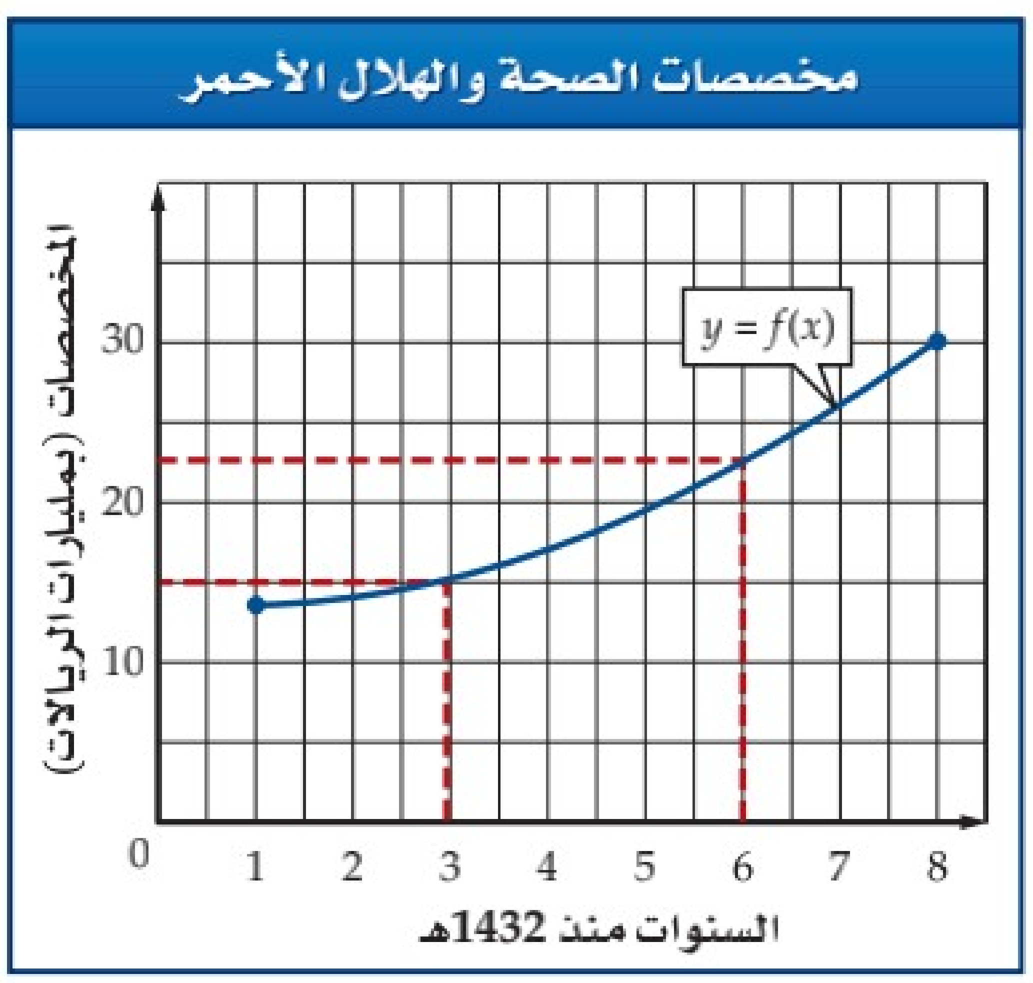
تحليل التمثيل البياني للدالة: التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$، حيث x أحد عناصر مجال f. وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. ومن ثم تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساويةً طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

مثال 1 من واقع الحياة — تقدير قيم الدوال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:



a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1438 هـ ، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.

السنة 1438 هـ هي السنة السادسة بعد 1432 هـ ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1438هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقُّق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.

b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا.

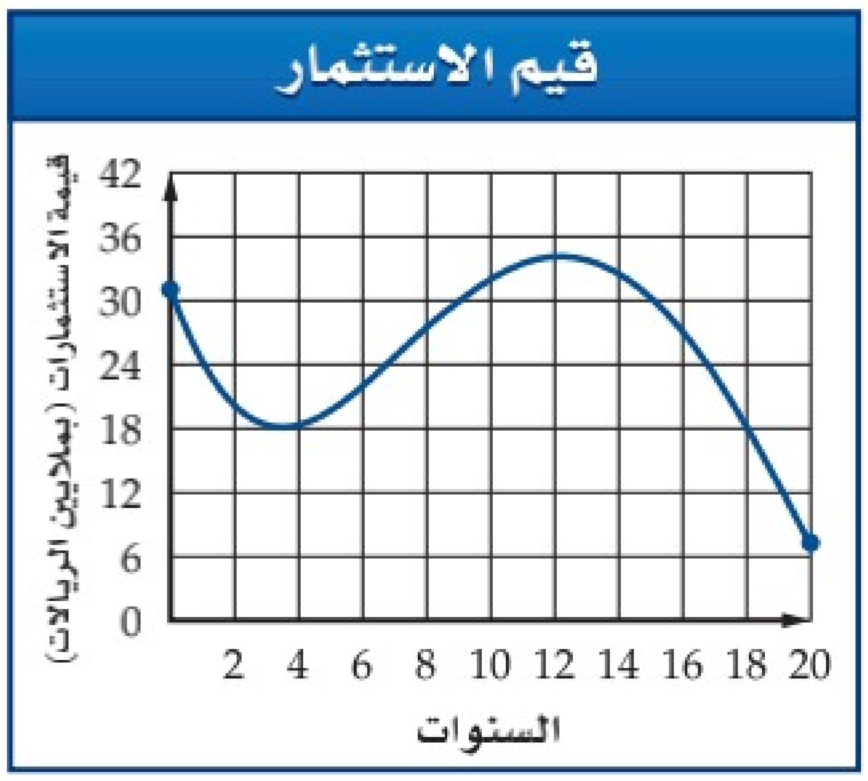
يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3 ، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1435 هـ . وللتحقق جبريًّا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1435هـ معقولة.

تحقق من فهمك

1) **استثمار:** تمثل الدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$ تقديرًا لاستثمارات أحد رجال الأعمال في السوق المحلية؛ حيث $v(d)$ قيمة الاستثمارات بملايين الريالات في السنة d.



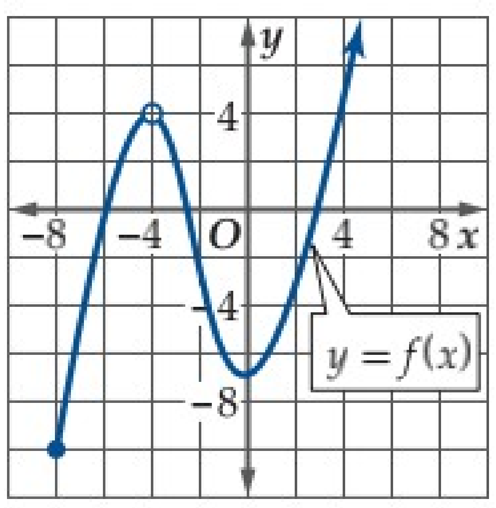
1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة الاستثمارات في السنة العاشرة. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد السنوات التي بلغت فيها قيمة الاستثمارات 30 مليون ريال. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها. حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور.



المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f .
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

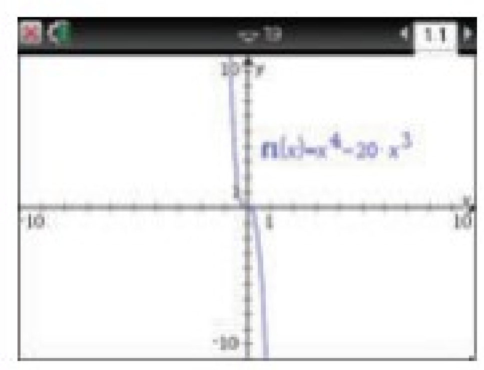
مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid x \ge -8, x \ne -4, x \in R\}$.

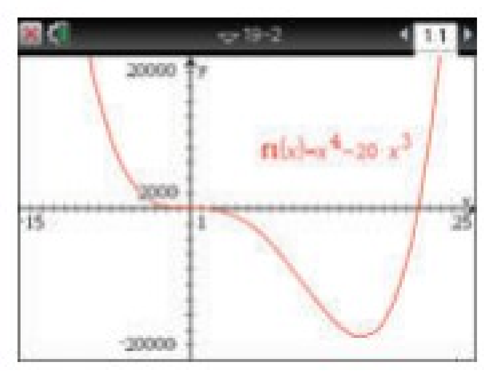
المدى:

إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10 ، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

إرشادات للدراسة

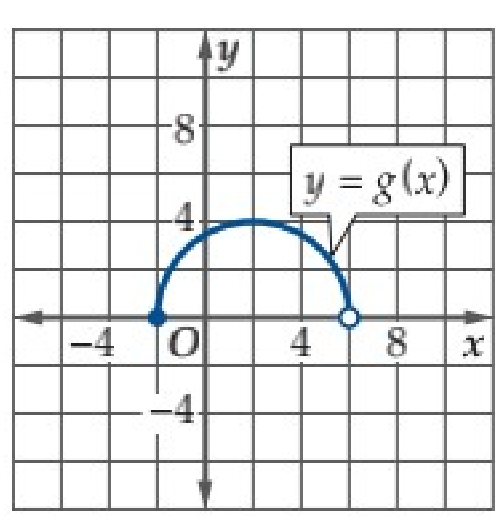
اختيار التدريج المناسب: اختر تدريجًا مناسبًا لكلٍّ من المحورين x, y للتمكن من رؤية منحنى الدالة بوضوح. لاحظ اختلاف التمثيل الظاهر للدالة $f(x) = x^4 - 20x^3$ أدناه.



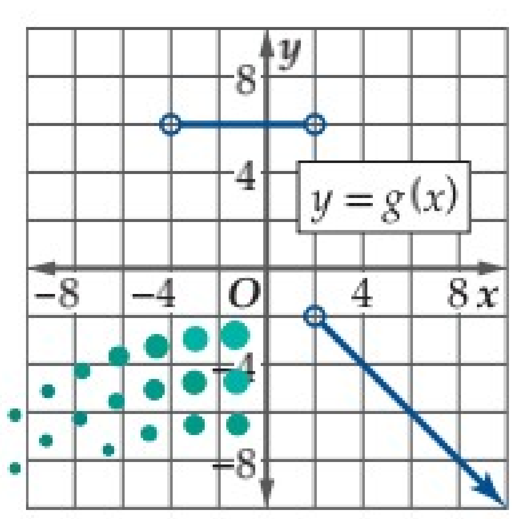


تحقق من فهمك

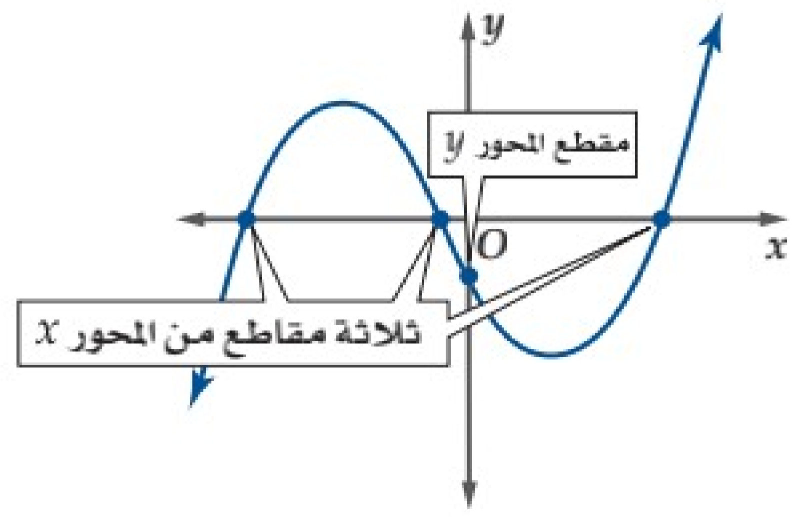
(2A



(2B



النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.

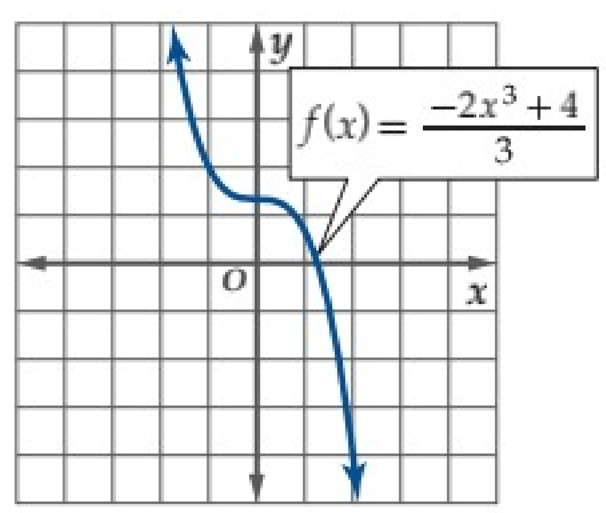


ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نوجد $f(0)$.

مثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

a)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

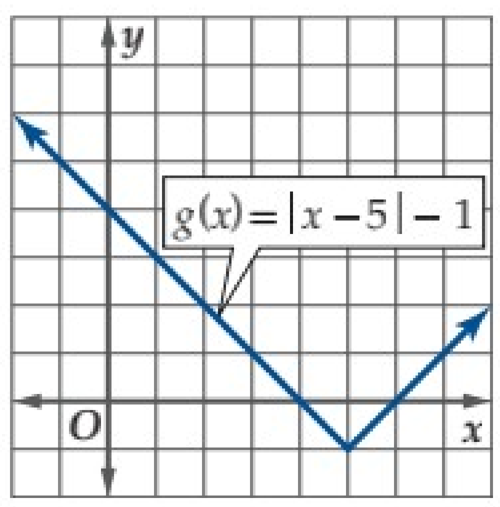
الحل جبريًّا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3+4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

b)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$، وعليه فإن المقطع y هو 4.

الحل جبريًّا:

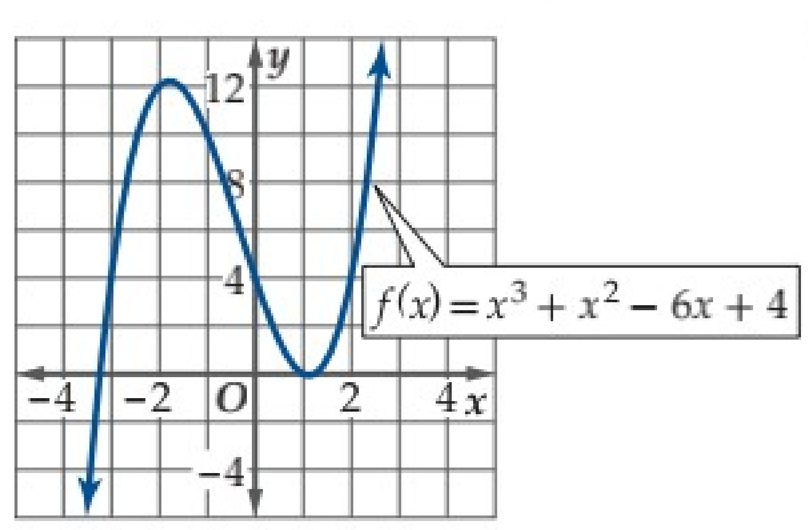
أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 = 4$$

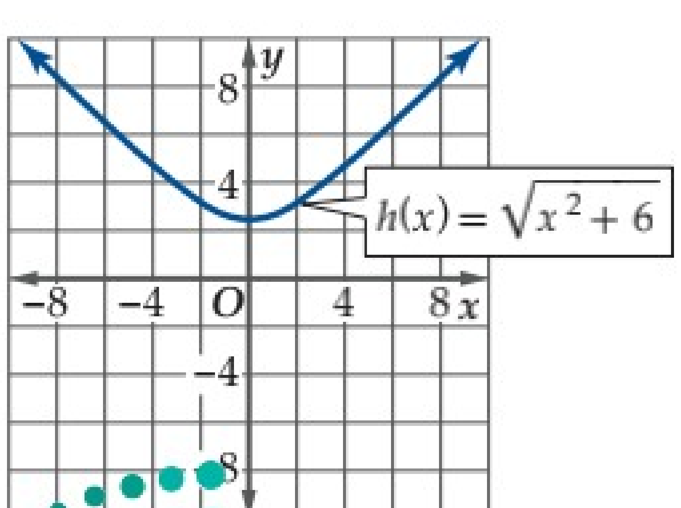
أي أن المقطع y هو 4.

تحقق من فهمك

3A)



3B)

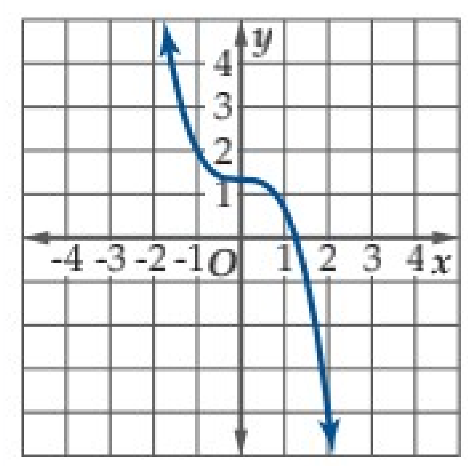


تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

إرشادات للدراسة

تدريج المحورين x ، y:

إذا لم يظهر التدريج على المحورين x ، y في التمثيل البياني، فذلك يعني أن التدريج بالوحدات. انظر المثال 3a:

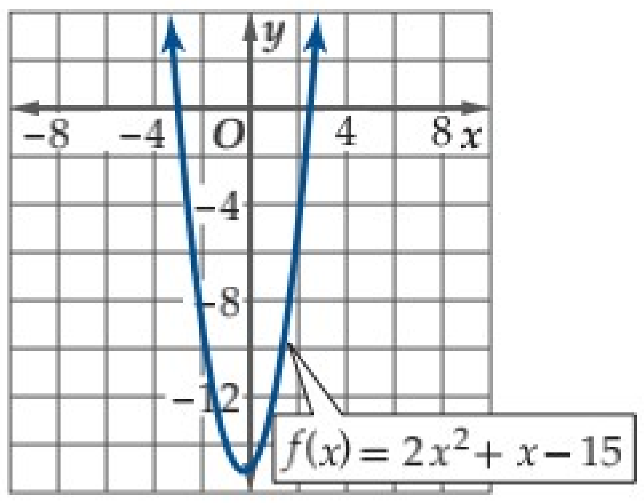


إرشادات للدراسة

تسمية المحورين في التمثيل البياني:

عندما تُسمي المحورين في التمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y. ويمكن أن تستعمل متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. ولكن للتسهيل نسمي عادةً المحور الأفقي x والرأسي y.

مثال 4 إيجاد الأصفار



استعمل التمثيل البياني المجاور، الذي يمثل الدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.

التقدير من المنحنى:

يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 وَ 2.5 تقريبًا.

لذا فإن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5

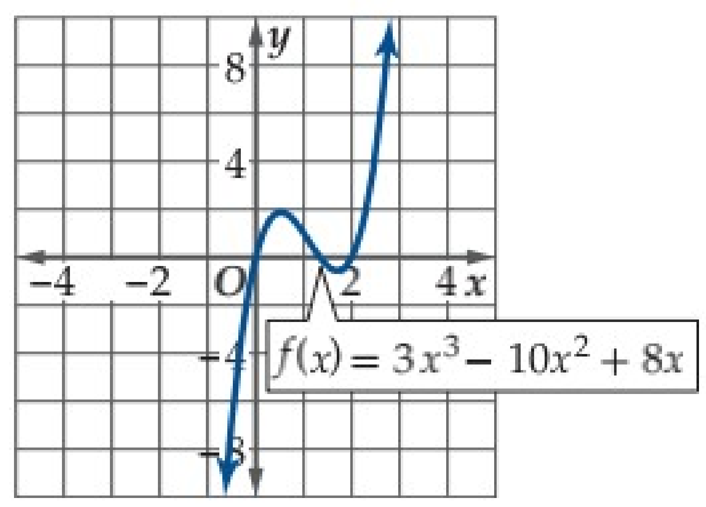
الحل جبريًّا:

$2x^2 + x - 15 = 0$	ضع $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$	حلّل
$2x - 5 = 0$ أو $x + 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2.5$ أو $x = -3$	حل كل معادلة

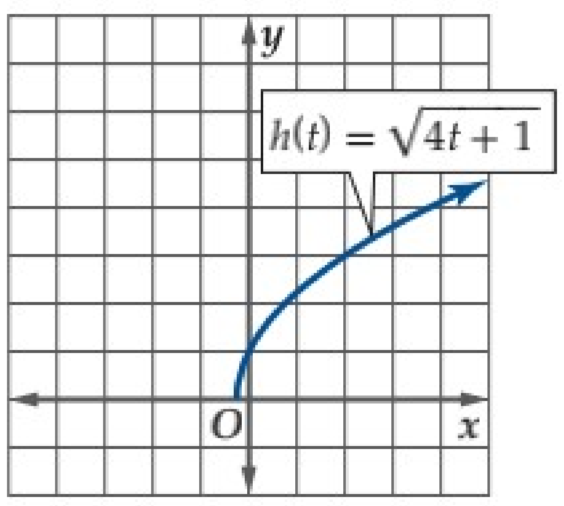
أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 وَ 2.5 وهما صفرا الدالة f .

تحقق من فهمك

4A)

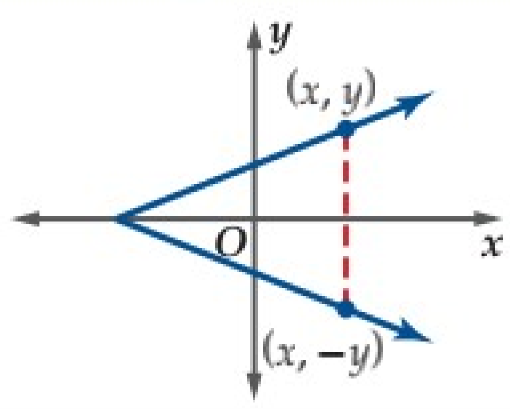
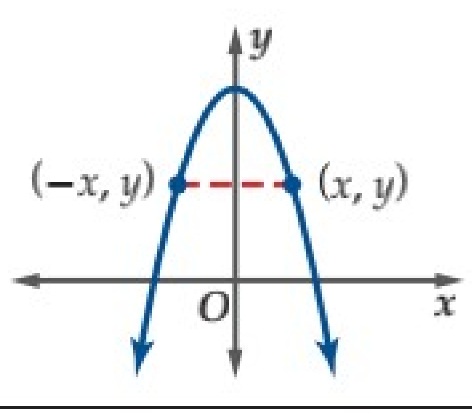
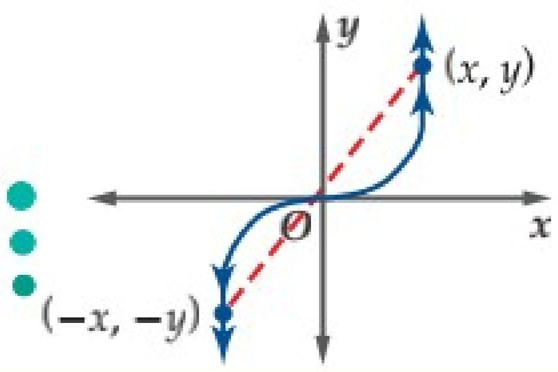


4B)



التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

مفهوم أساسي اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور x، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور y، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال:
يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

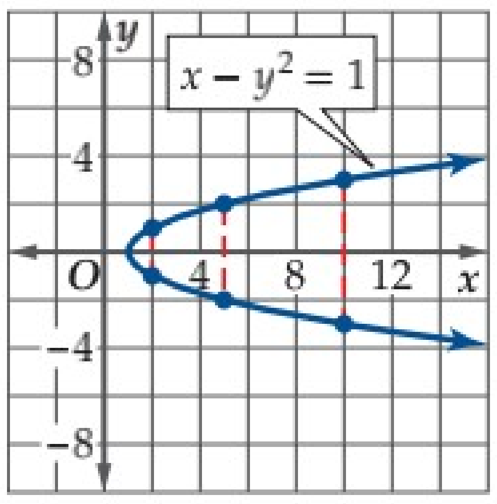
إرشادات للدراسة

التماثل: من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

مـثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا.

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

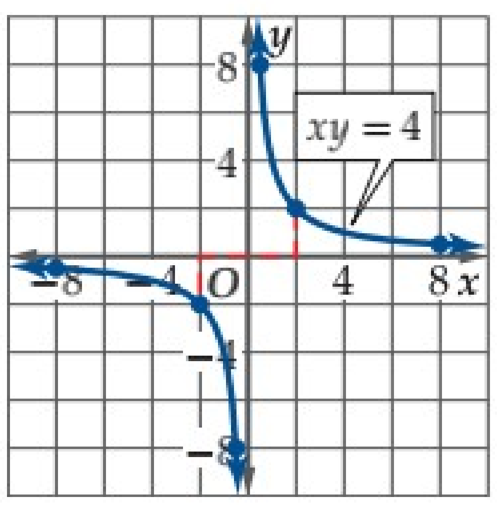
يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x :

x	2	2	5	5	10	10
y	1	-1	2	-2	3	-3
(x, y)	(2, 1)	(2, -1)	(5, 2)	(5, -2)	(10, 3)	(10, -3)

التحقق جبريًّا:

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

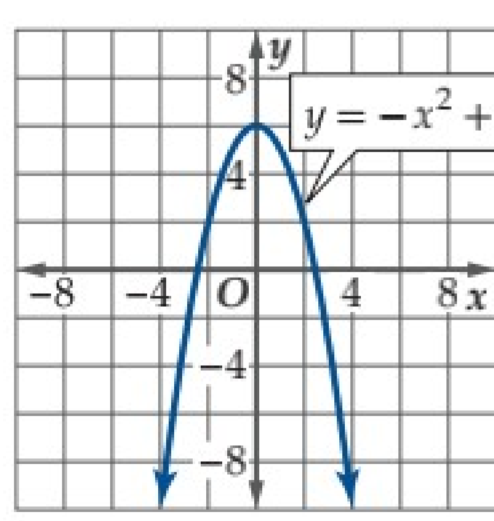
x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	(-8, -0.5)	(-2, -2)	(-0.5, -8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

التحقق جبريًّا:

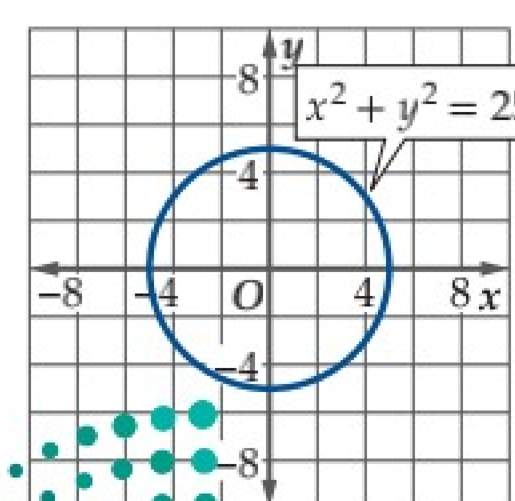
بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

تحقق من فهمك

5A)



5B)



يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

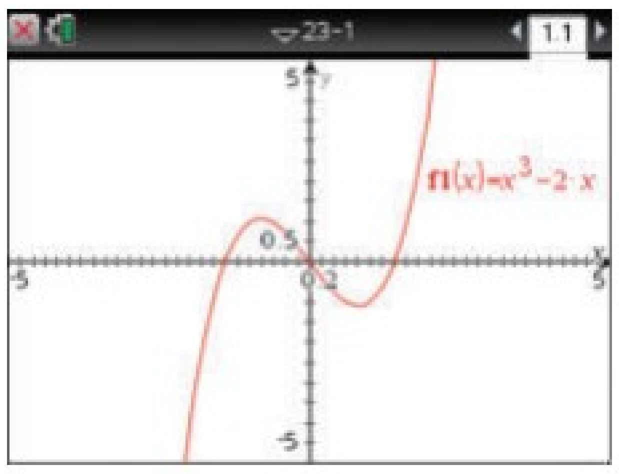
مفهوم أساسي — الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y **الدوال الزوجية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل **الدوال الفردية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

a) $f(x) = x^3 - 2x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

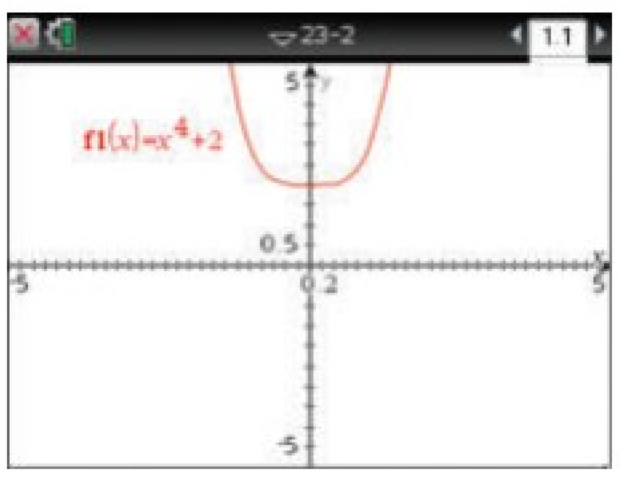
$= -x^3 + 2x$ بسّط

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

b) $f(x) = x^4 + 2$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

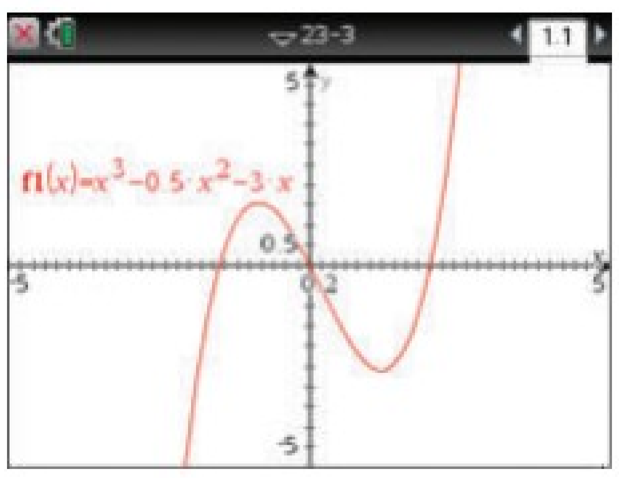
$f(-x) = (-x)^4 + 2$ عوّض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بسّط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

c) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست متماثلة حول المحور y وليست متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ بسّط

وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$،

فإن $f(-x) \neq f(x)$، وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$؛

لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال الفردية:
قد تُظهر لك بعض التمثيلات البيانية تماثلًا والحقيقة غير ذلك؛ لذا عليك التأكد من التماثل جبريًّا في كل مرة.

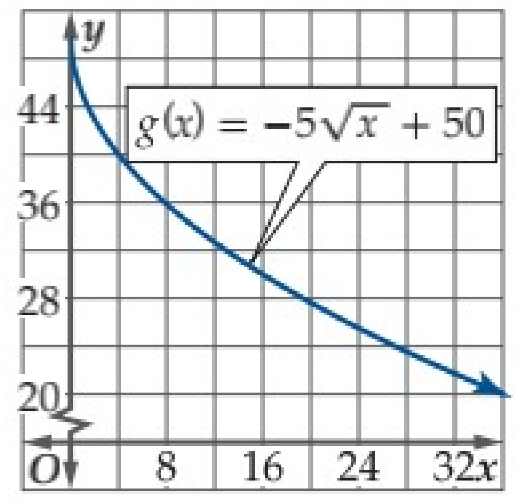
تحقق من فهمك

6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ **6B)** $g(x) = 4\sqrt{x}$ **6C)** $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

تدرب وحل المسائل

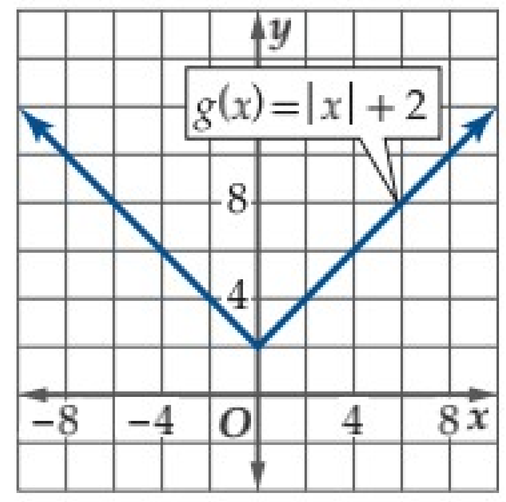
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك: **(مثال 1)**

(1



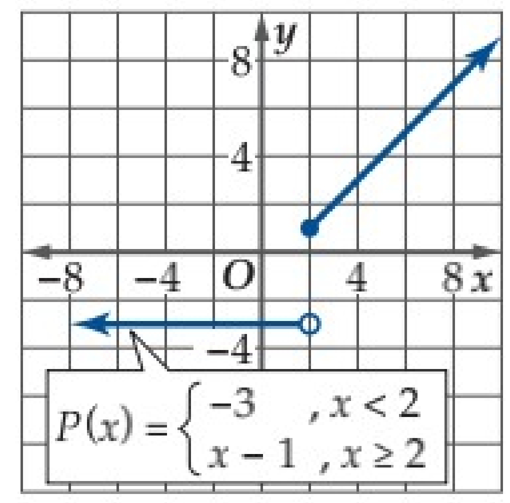
a) $g(6)$ b) $g(12)$ c) $g(19)$

(2



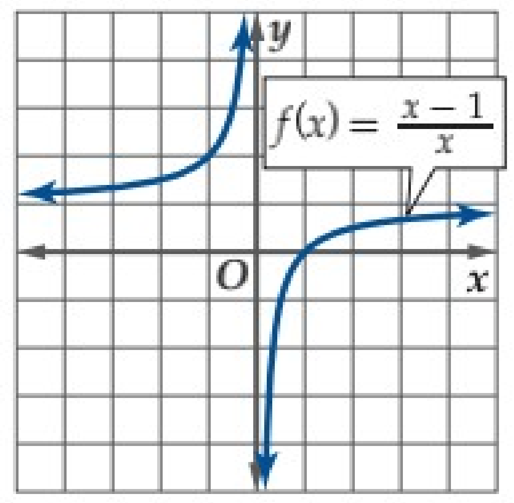
a) $g(-8)$ b) $g(-3)$ c) $g(0)$

(3



a) $P(-6)$ b) $P(2)$ c) $P(9)$

(4

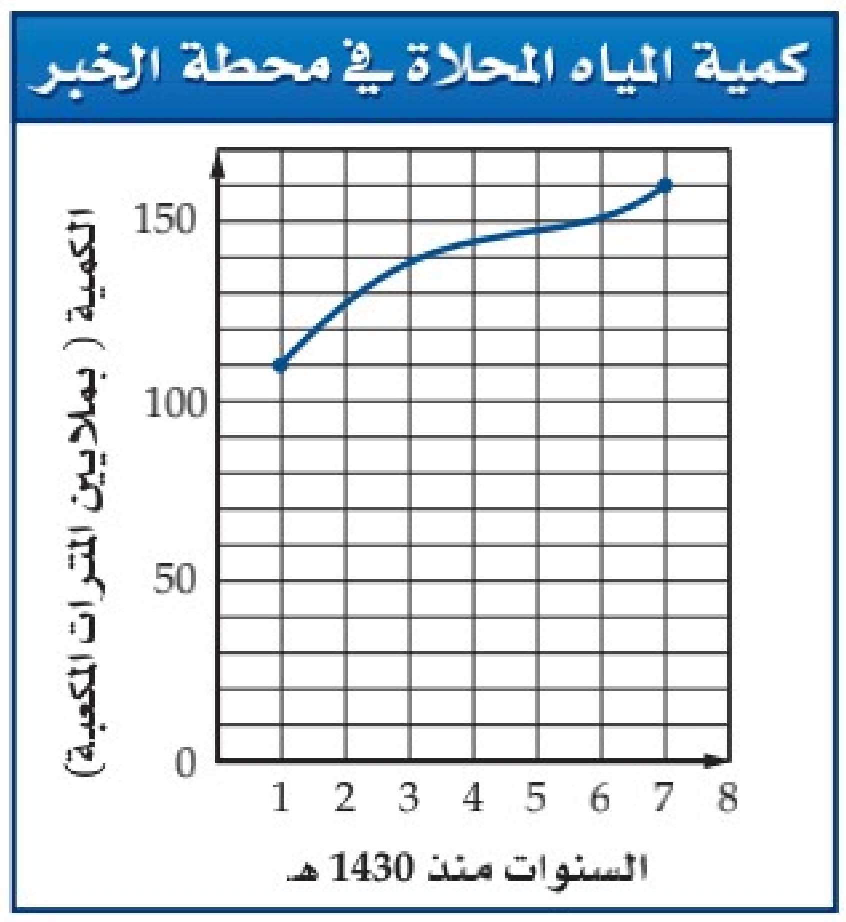


a) $f(-3)$ b) $f(0.5)$ c) $f(1)$

5) مياه: إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1431هـ إلى 1437هـ) معطاة بالدالة

$$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1430 هـ . **(مثال 1)**



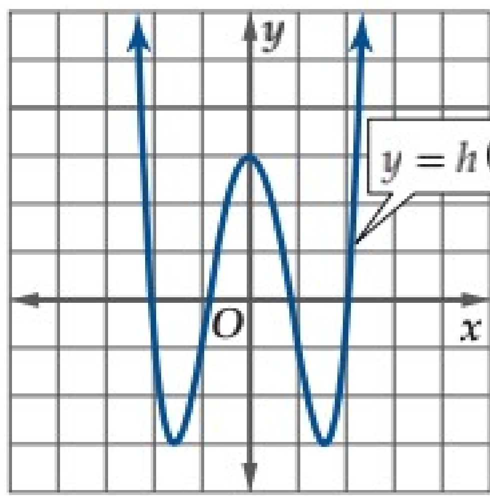
a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1435 هـ باستعمال التمثيل البياني.

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1435 هـ جبريًّا مقرِّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

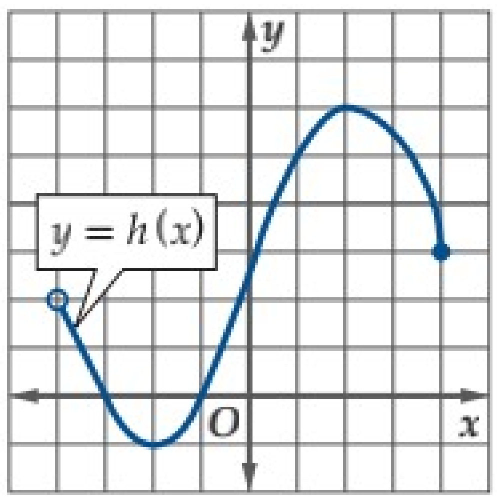
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًّا.

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. **(مثال 2)**

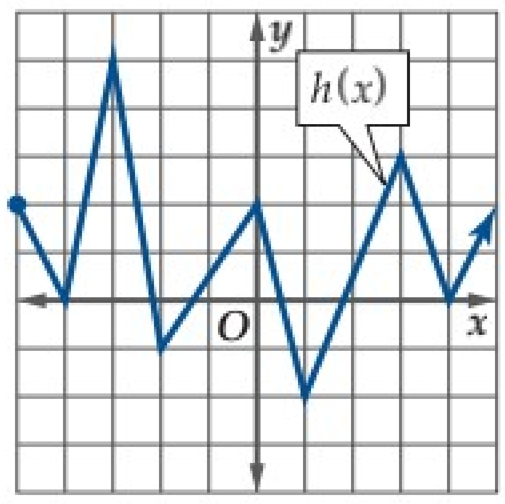
(6



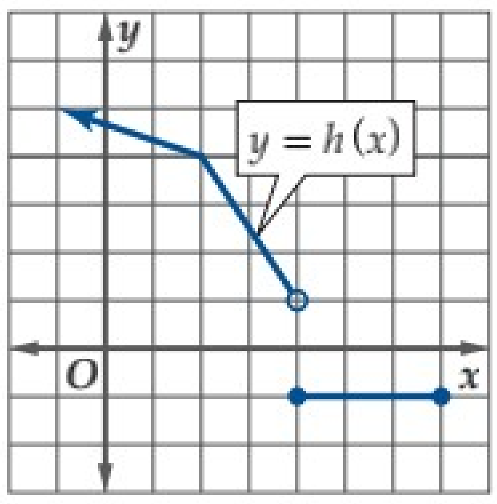
(7



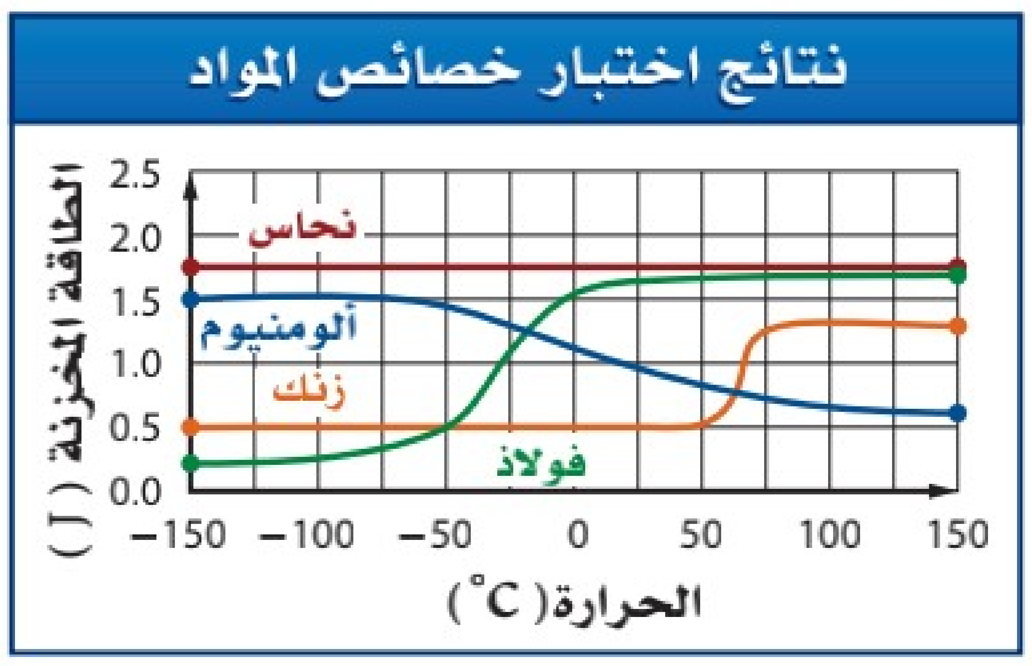
(8



(9



10) هندسة : أُجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أُخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزَّنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضّح في الشكل أدناه، فأجب عما يأتي: **(مثال 2)**

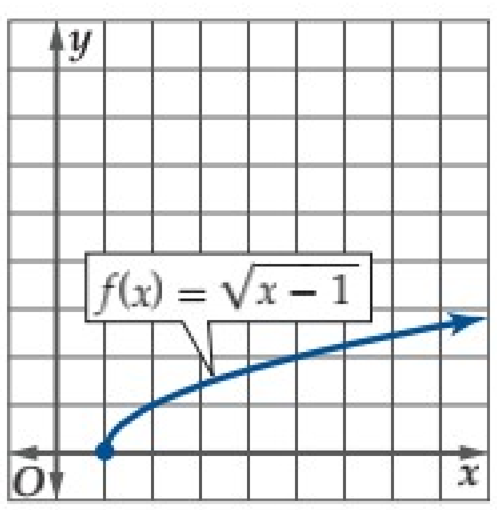


a) أوجد المجال والمدى لكل دالة.

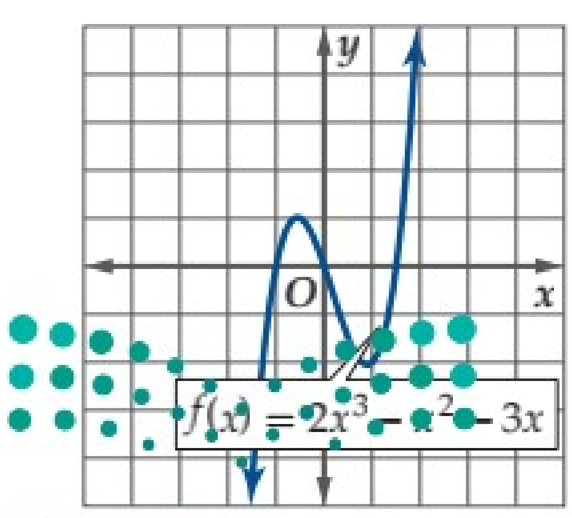
b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y ، وأصفار الدالة، ثم أوجد أصفار الدالة جبريًّا: **(المثالان 3, 4)**

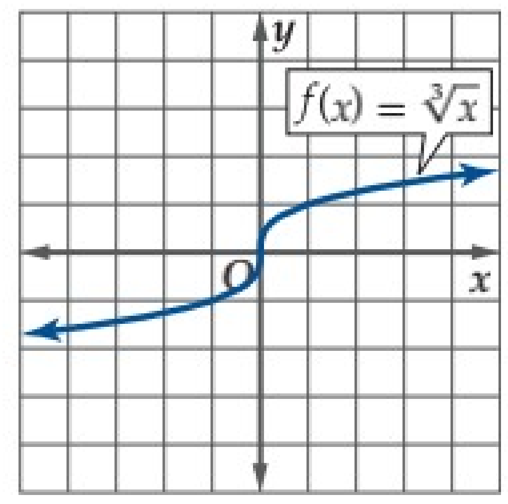
(11



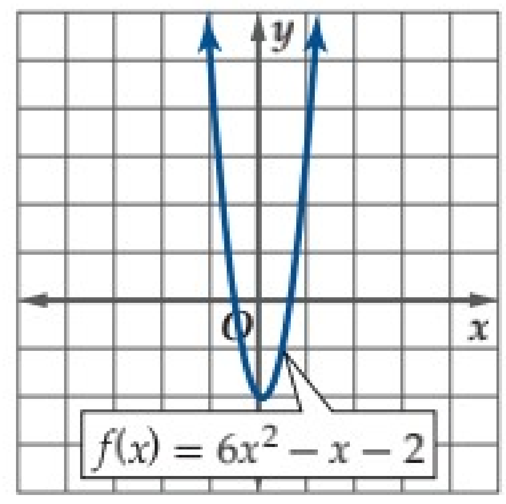
(12



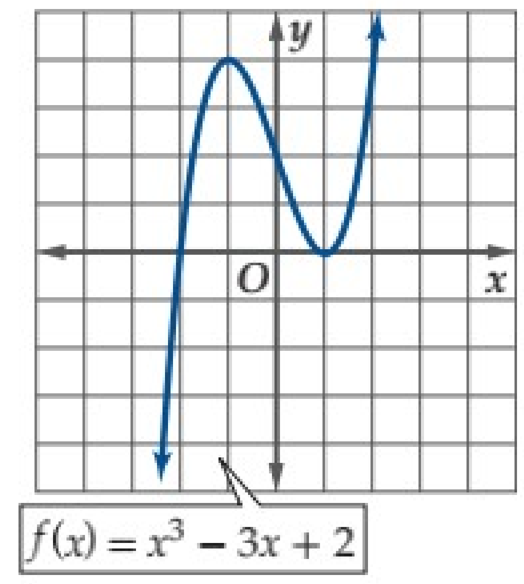
13)



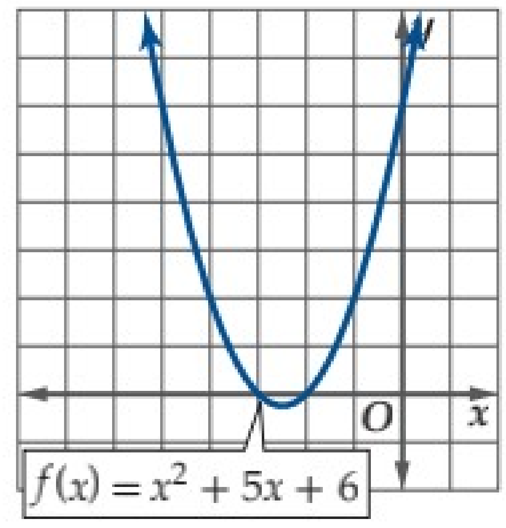
14)



15)

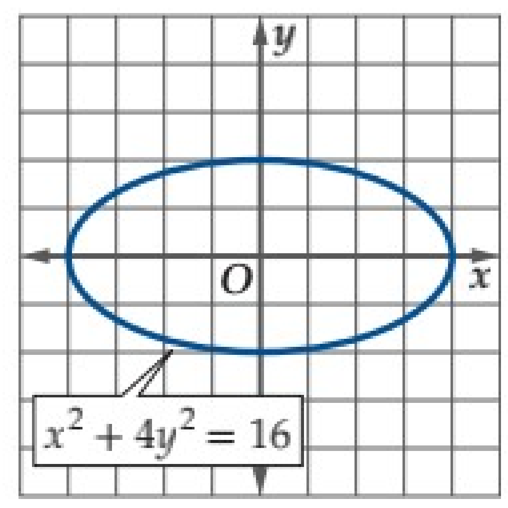


16)

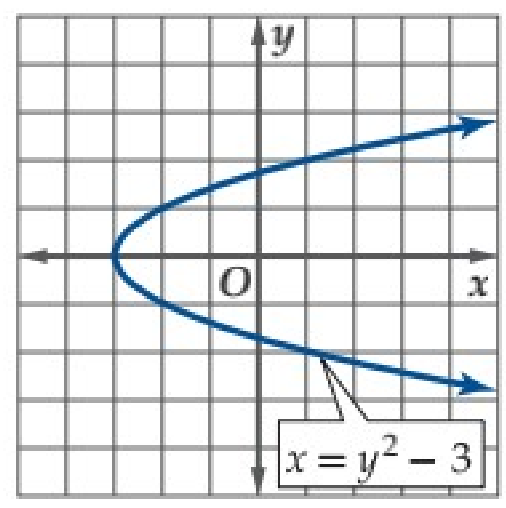


استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًا: (مثال 5)

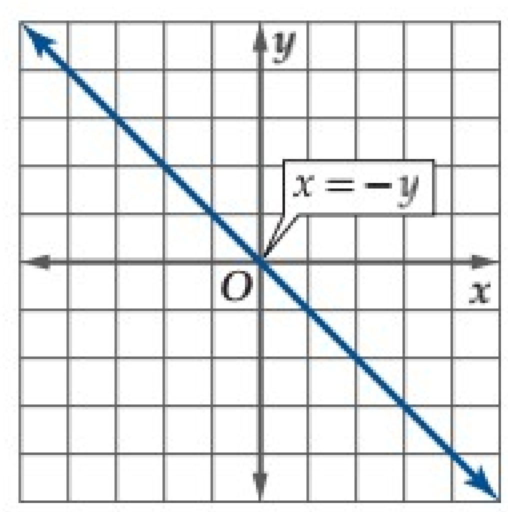
17)



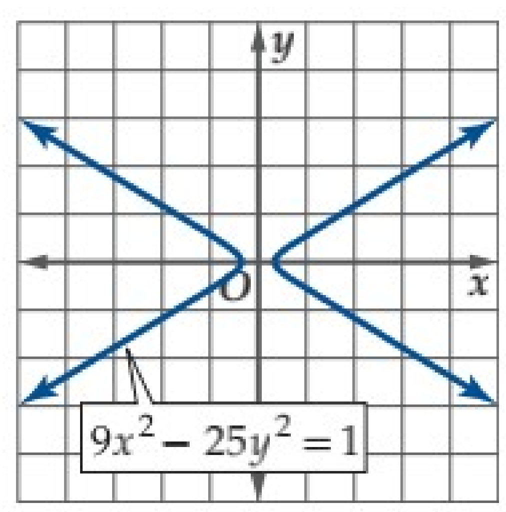
18)



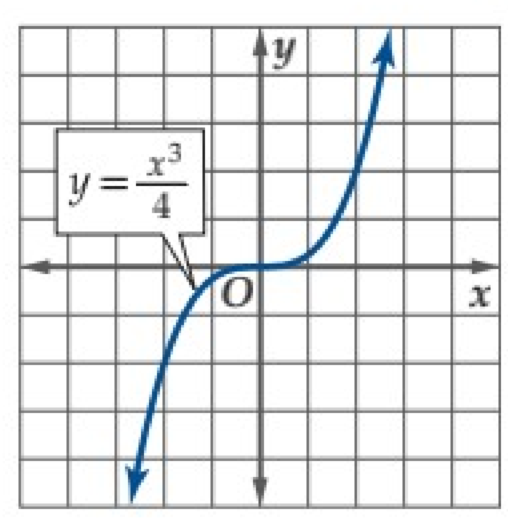
19)



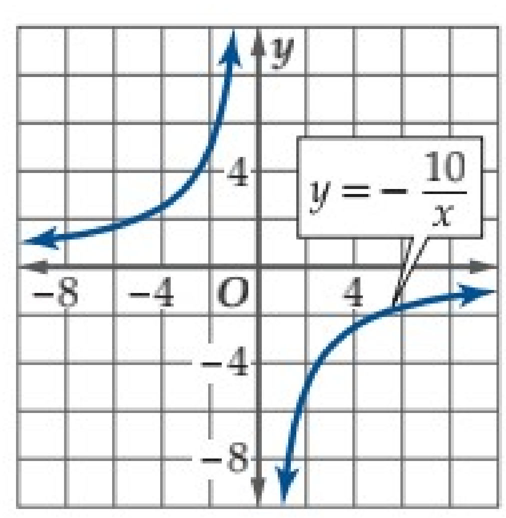
20)



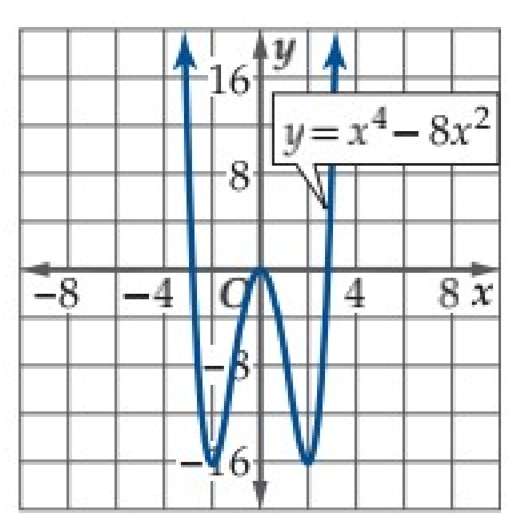
21)



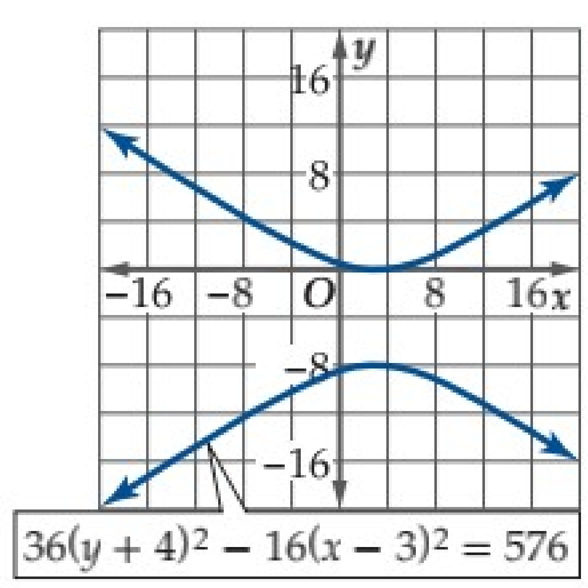
22)



23)



24)



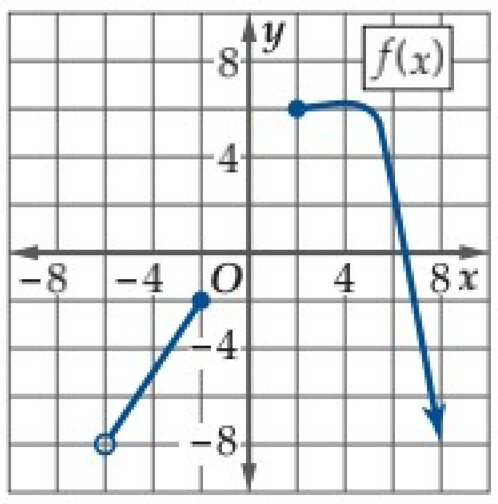
الحاسبة البيانية: **استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا. واذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: (مثال 6)**

25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$ **26)** $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

27) $g(x) = \sqrt{x + 6}$ **28)** $h(x) = |8 - 2x|$

29) $f(x) = |x^3|$ **30)** $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

31) **استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:**



a) $f(-2)$ **b)** $f(-4)$ **c)** $f(2)$

32) **مبيعات:** إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال الفترة من 1432هـ إلى 1436هـ يُعطى بالدالة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$ ، حيث x رقم السنة منذ 1432 هـ .

a) اكتب مجال الدالة، ثم قرّب مداها .

b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 1434هـ . ثم أوجد ذلك جبريًا.

c) استعمل المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريًا. ماذا يمثّل المقطع y؟

d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسّر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضّح السبب.

33) دوال: إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث $n \in N$ فأجب عن الأسئلة الآتية:

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل $f(x)$ بيانيًّا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \le n \le 6$.

b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.

c) صف التماثل لكل دالة.

d) تنبّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$، ومداها، وتماثلها، ثم برّر إجابتك.

34) صيدلة: إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة :

$$f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة بيانيًّا .

b) اكتب المجال المناسب للدالة، وفسِّر إجابتك.

c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟

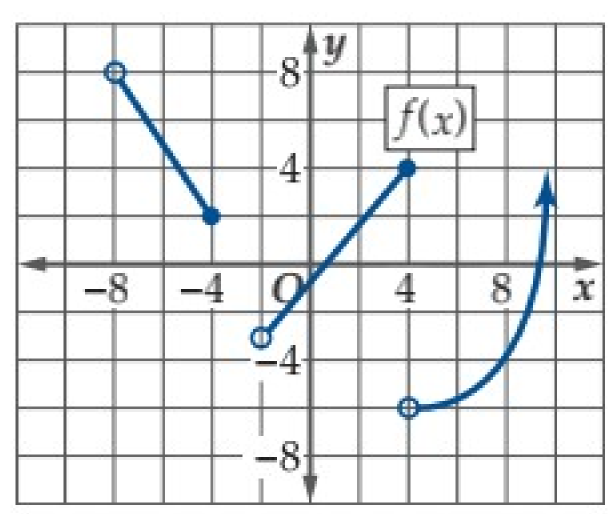
الحاسبة البيانيّة: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًّا:

35) $f(x) = \frac{4x-1}{x}$ **36)** $f(x) = \frac{x^2+9}{x+3}$

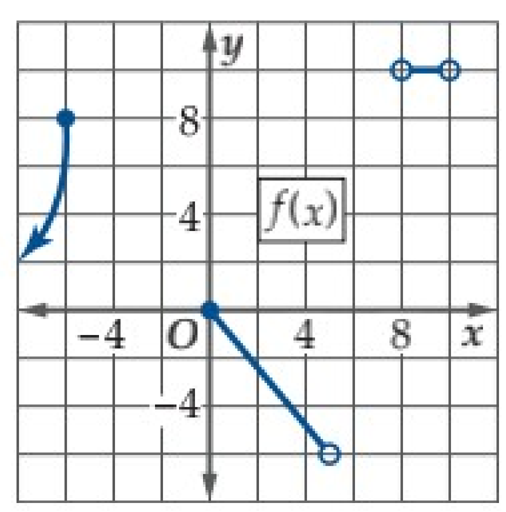
37) $h(x) = 2\sqrt{x+12} - 8$ **38)** $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي:

39)



40)



41) فيزياء: إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{10} = 1$$

a) صف تماثل منحنى مسار المذنب.

b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.

c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

42) أسهم: افترض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة :

$$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$$

حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد مجال الدالة، ثم قدّر مداها.

c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟

d) أوجد أصفار الدالة، ووضّح معناها.

43) تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ عندما تقترب x من العدد 2.

a) جدوليًّا: انقل الجدول الآتي إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$					

b) تحليليًّا: معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟

c) بيانيًّا: مثّل الدالة بيانيًّا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b** ؟ وضح إجابتك.

d) لفظيًّا: خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح إجابتك .

الحاسبة البيانيّة: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حلل منحناها لتحدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

44) $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$ **45)** $f(x) = x^2 - x - 6$

46) $h(x) = x^6 + 4$ **47)** $f(g) = g^9$

48) $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$ **49)** $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مَثِّل بيانيًّا منحنًى يحقق الشروط في كل حالة مما يأتي:

50) منحنى يمر بالنقاط $(-8, 1)$, $(-5, 2)$, $(-4, 4)$, $(-3, 8)$، ومتماثل حول المحور y .

51) منحنى يمر بالنقاط $(0, 0)$, $(2, 6)$, $(3, 12)$, $(4, 24)$، ومتماثل حول المحور x .

52) منحنى يمر بالنقاط $(-3, -18)$, $(-2, -9)$, $(-1, -3)$، ومتماثل حول نقطة الأصل.

53) منحنى يمر بالنقاط $(8, -8)$, $(6, -12)$, $(4, -16)$ ويمثّل دالة زوجية.

54) اكتب: وضّح لماذا يمكن أن يكون للدالة 0 أو 1 أو أكثر من مقاطع x ، بينما يوجد لها مقطع y واحد على الأكثر.

55) تحدٍّ: أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 - 12x}$، ومداها. برّر إجابتك، ثم تحقّق منها بيانيًّا.

تبرير: أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة. برِّر إجابتك.

56) مدى الدالة $f(x) = nx^2$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

57) مدى الدالة $f(x) = \sqrt{nx}$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

58) جميع الدوال الفردية متماثلة حول المستقيم $y = -x$.

59) إذا دارت دالة زوجية $180°n$ حول نقطة الأصل، حيث n عدد صحيح، فإنها تبقى زوجية.

تبرير: إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدّد ما إذا كانت الدالة $b(x)$ فردية، أم زوجية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، وبرِّر إجابتك:

60) $b(x) = a(-x)$

61) $b(x) = -a(x)$

62) $b(x) = [a(x)]^2$

63) $b(x) = a(|x|)$

64) $b(x) = [a(x)]^3$

تبرير: هل يمثّل المنحنى المعطى تماثله في كل مما يأتي دالة دائمًا أم أحيانًا أم لا يمثّل دالة؟ وبرِّر إجابتك.

65) متماثل حول المستقيم $x = 4$.

66) متماثل حول المستقيم $y = 2$.

67) متماثل حول كل من المحورين x, y.

68) اكتب: وضّح لماذا لا تكون العلاقة المتماثلة حول المحور x دالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

69) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

a) $g(2)$

b) $g(-4x)$

c) $g(1 + 3n)$

70) $p(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^2 - 2}$

a) $p(3)$

b) $p(x^2)$

c) $p(x + 1)$

71) $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$

a) $h(-9)$

b) $h(3x)$

c) $h(2 + m)$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية (الدرس 1-1)

72) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$

73) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$

74) $f(x) = \sqrt{3x + 18}$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

75) $27^{\frac{1}{3}}$

76) $64^{\frac{5}{6}}$

77) $49^{-\frac{1}{2}}$

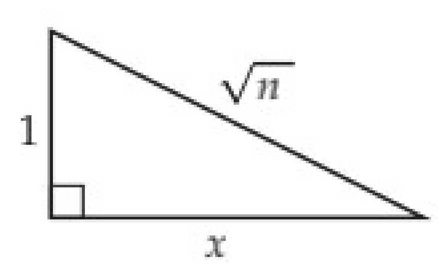
78) $16^{-\frac{3}{4}}$

79) $25^{\frac{3}{2}}$

80) $36^{-\frac{3}{2}}$

تدريب على اختبار معياري

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه.



A $\sqrt{n^2 - 1}$

B $\sqrt{n - 1}$

C $\sqrt{n + 1}$

D $n - 1$

82) ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$ ؟

A $5 < f(x) < 9$

B $5 < f(x) < 10$

C $1 < f(x) < 9$

D $1 \leq f(x) < 10$

1-3 الاتصال والنهايات
Continuity and Limits

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function

النهاية
limit

الدالة غير المتصلة
discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity

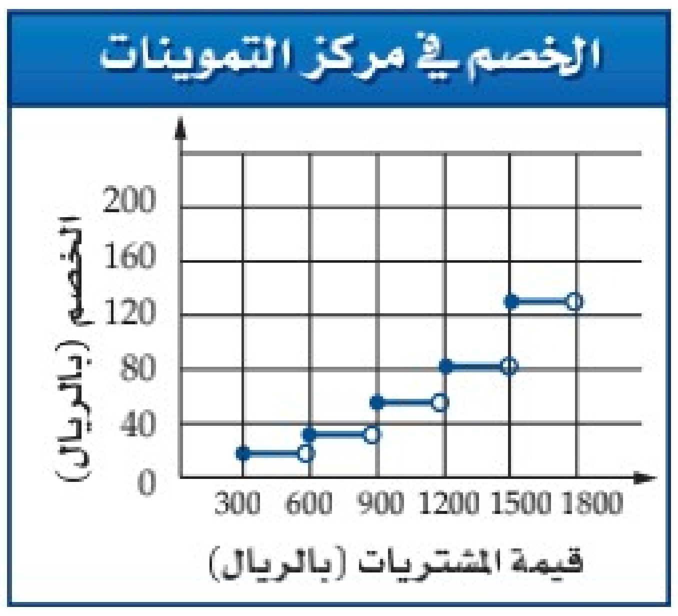
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity

عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

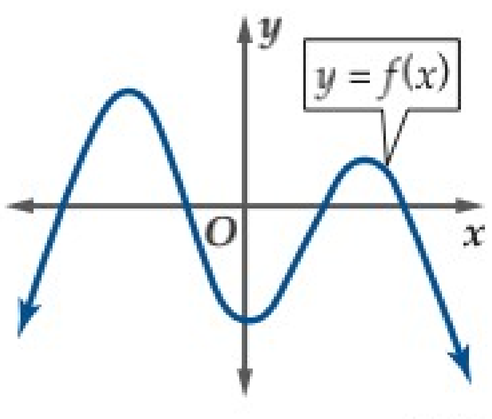
لماذا؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x=c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

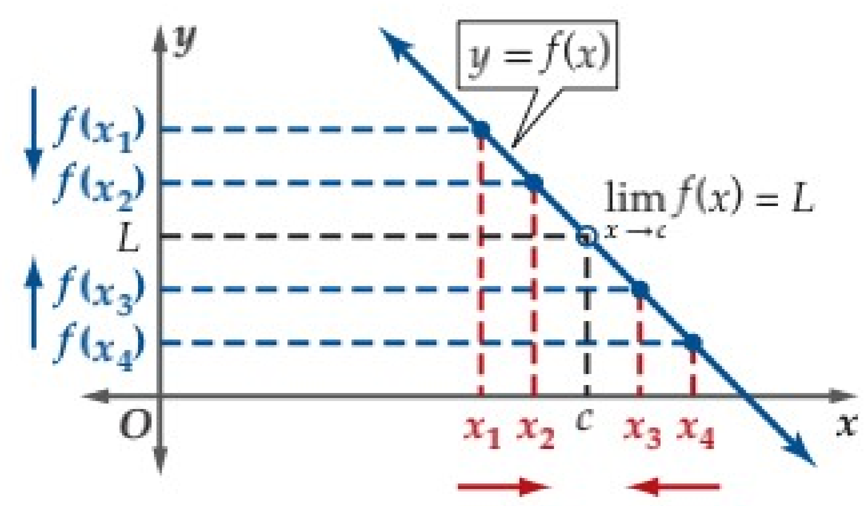


$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

الرموز: نقول: إن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

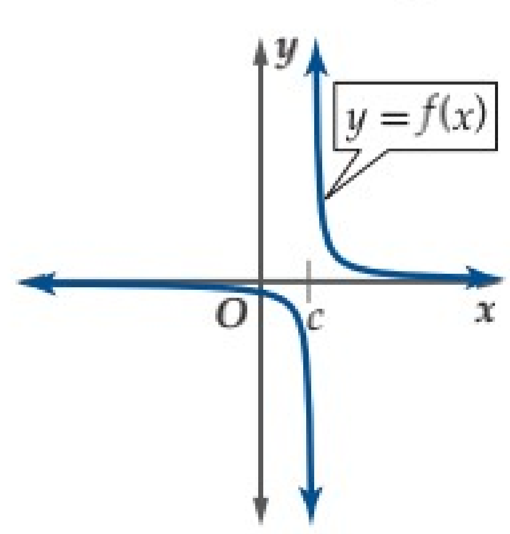


إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

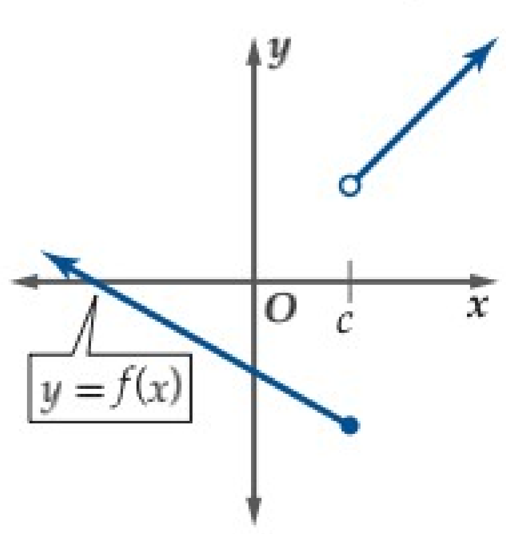
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x=c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



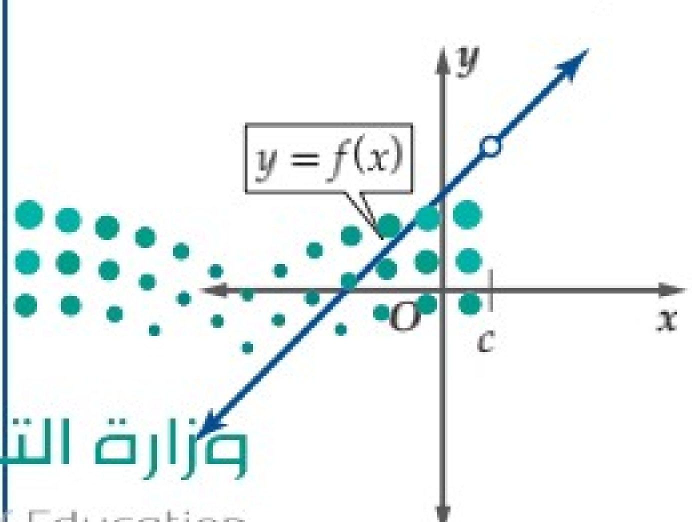
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x=c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال قابل لإزالة** عند $x=c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولا تساوي قيمة الدالة عند $x=c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:

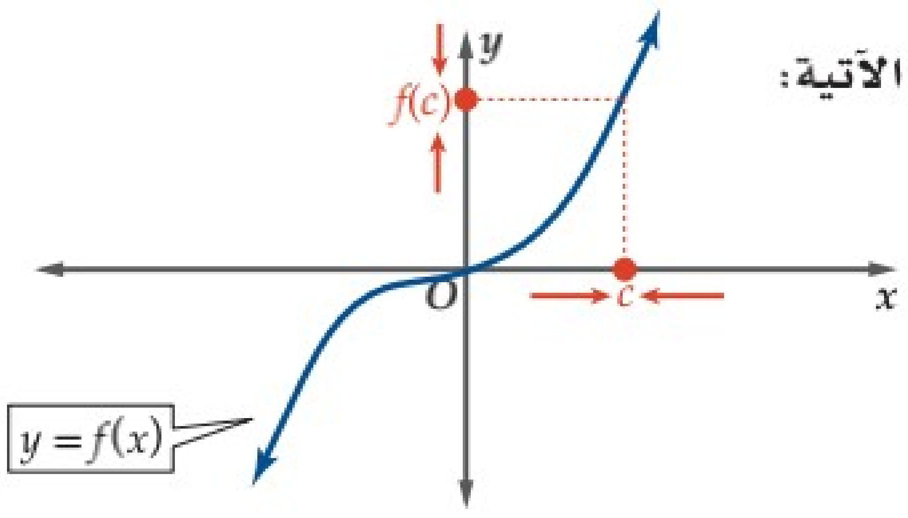


تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- **$f(x)$ معرّفة عند c، أي أن $f(c)$ موجودة.**
- **$f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.**
- **$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.**



إرشادات للدراسة

النهايات:
إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

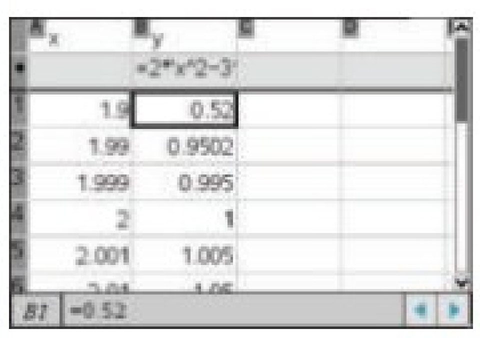
يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

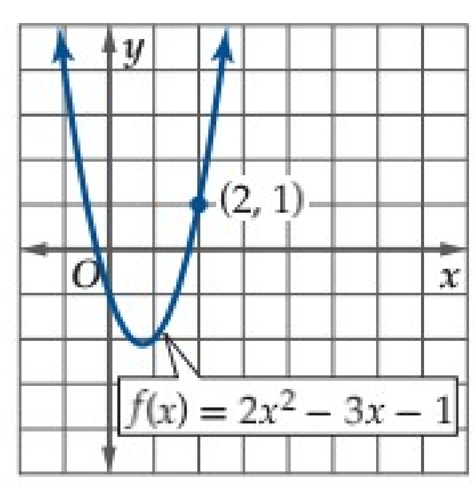
3) هل $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$؟

بما أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$، $f(2) = 1$، نستنتج أن $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

إرشاد تقني

جداول:
لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة (on)، ثم اختر تطبيق القوائم وجداول البيانات بالضغط على (رمز). ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة.





الشكل 1.3.1

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

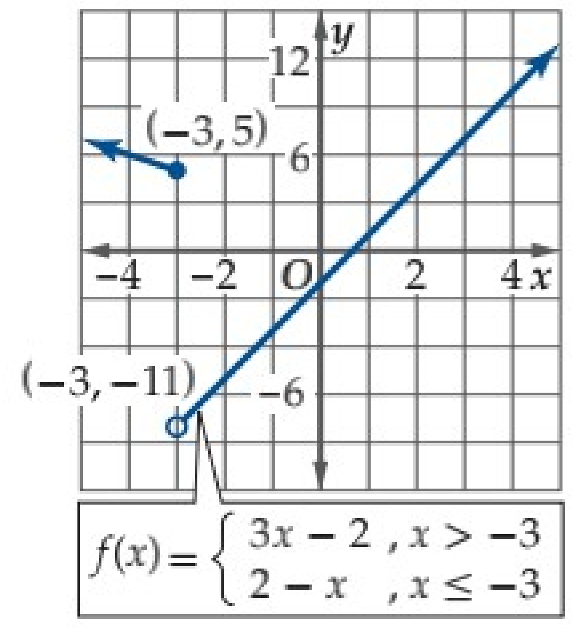
1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

إذا لم يتحقّق أي من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة، فاختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع عدم الاتصال عند تلك نقطة.

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & , \quad x > -3 \\ 2-x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$ عند $x = -3$.



الشكل 1.3.2

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3) = 5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		−10.997	−10.97	−10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x = -3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x = -3$.

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = 3 , x = -3$.

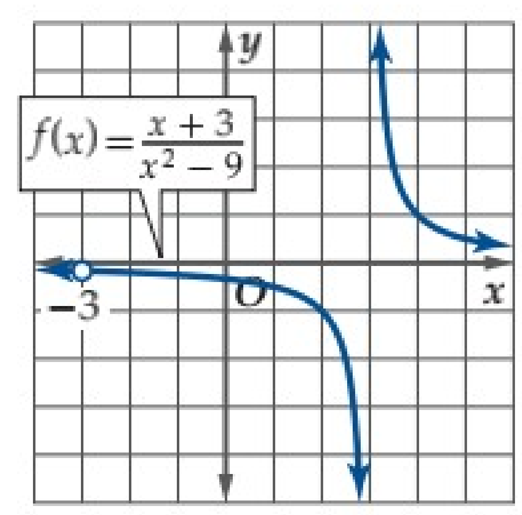
عند $x = 3$

1) $f(3) = \frac{6}{0}$ ، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = 3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ غير موجودة.



الشكل 1.3.3

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x = 3$ ؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

عند $x = -3$

1) $f(-3) = \frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3.

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	−0.164	−0.166	−0.167		−0.167	−0.167	−0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim\limits_{x \to -3} f(x) \approx -0.167$.

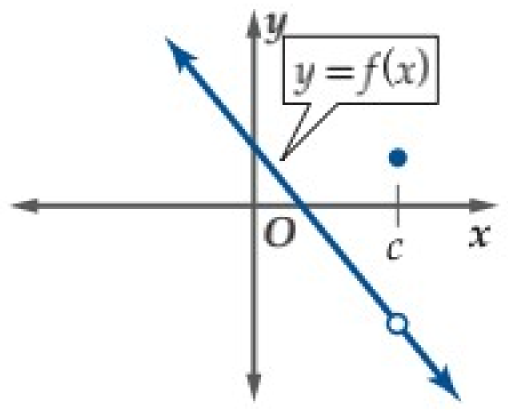
3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

تحقق من فهمك

2A) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

2B) $f(x) = \begin{cases} 5x+4 & , \quad x > 2 \\ 2-x & , \quad x \leq 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.



يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

1) $f(4) = \frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x \to 4} f(x) = 8$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \to 4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$

4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 8 & , x = 4 \end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

تحقق من فهمك

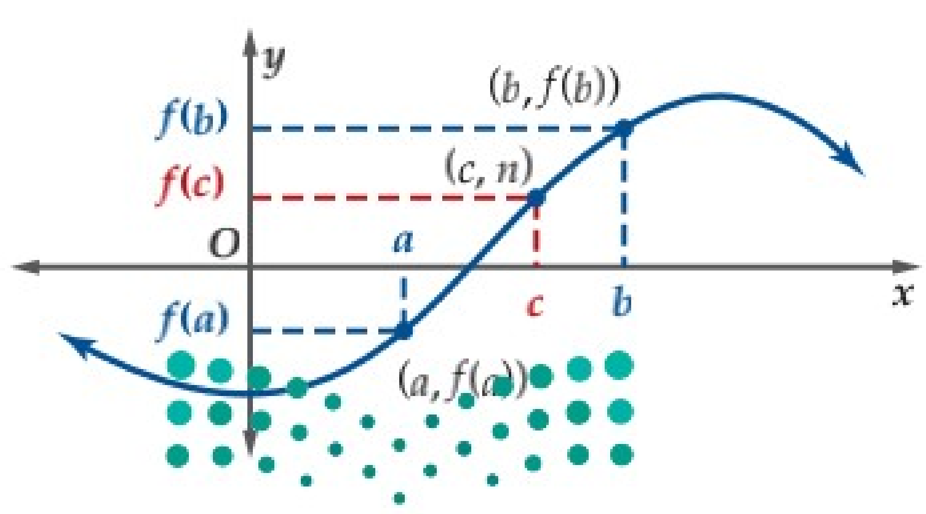
3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a ($\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$) ، ومتصلة من اليسار عند b ($\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$) . ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نظرية نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .

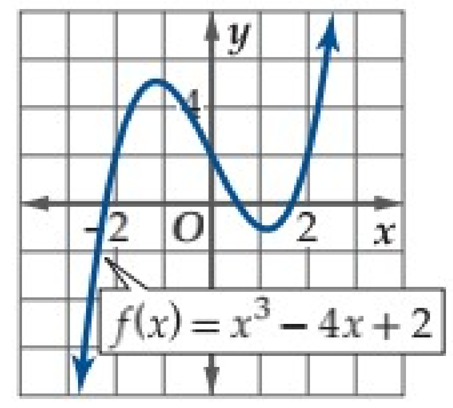


مثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2، -3 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2 ، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.



الشكل 1.3.4

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

4B) $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

إرشاد تقني

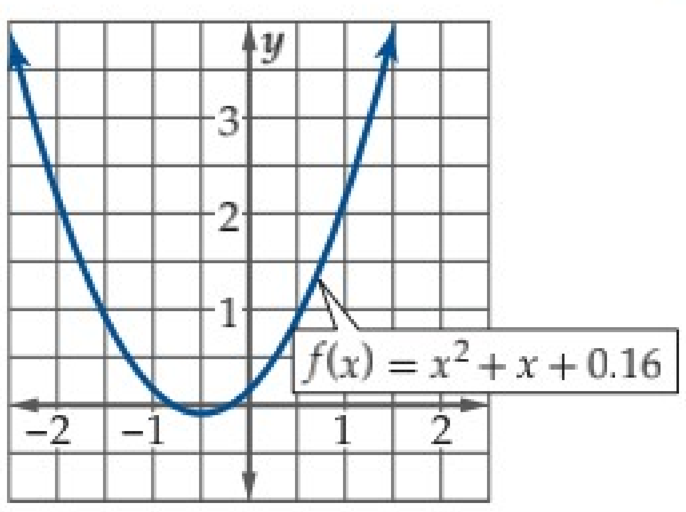
قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفرًا واحدًا؛ لذا اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$ ؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0. مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.



يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

إرشاد: استعمل الآلة الحاسبة البيانية (إذا لزم الأمر)

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

قراءة الرياضيات

النهايات: تقرأ العبارة $\lim_{x \to \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

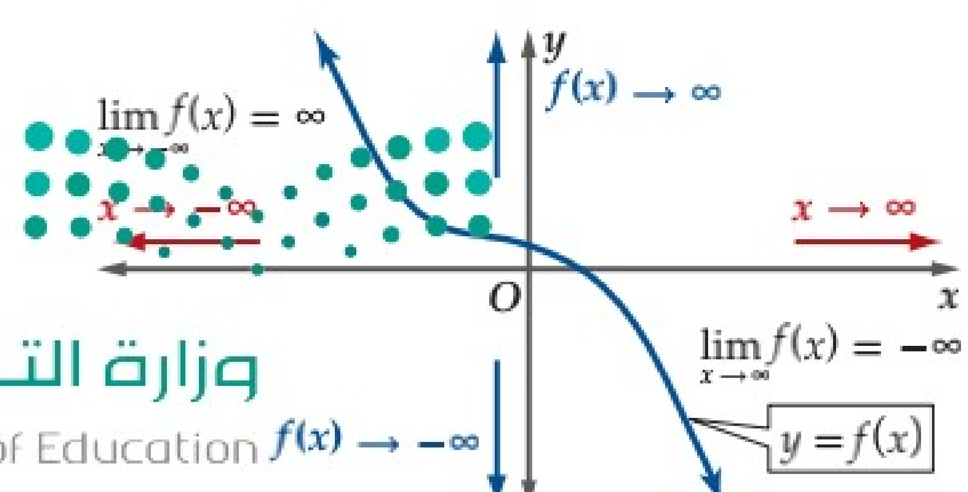
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

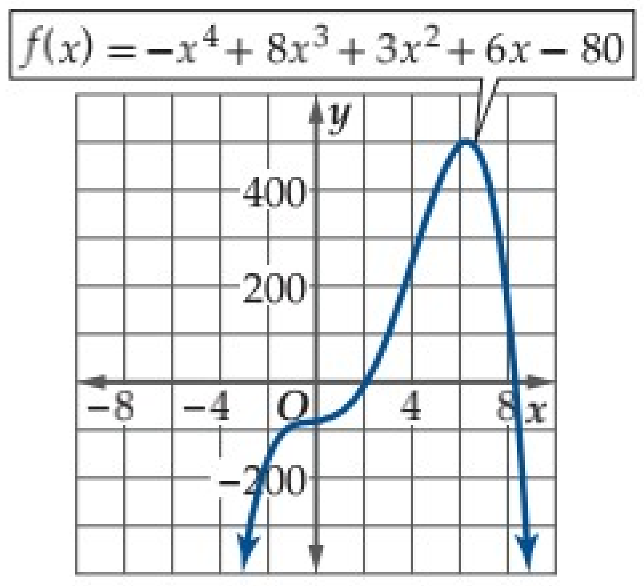
$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.



مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ،
وأن $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا:

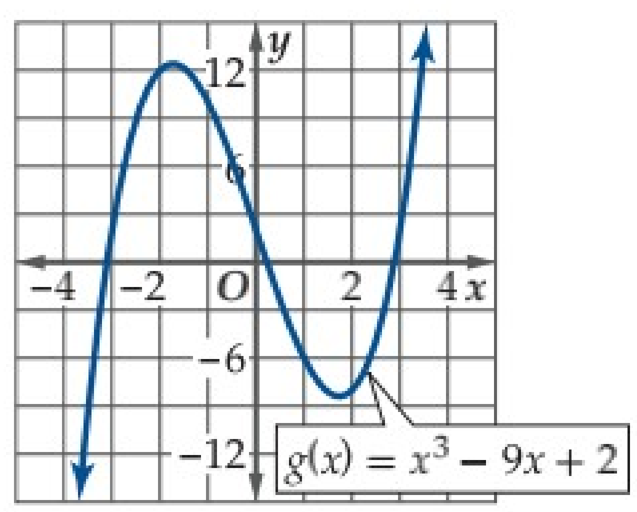
كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

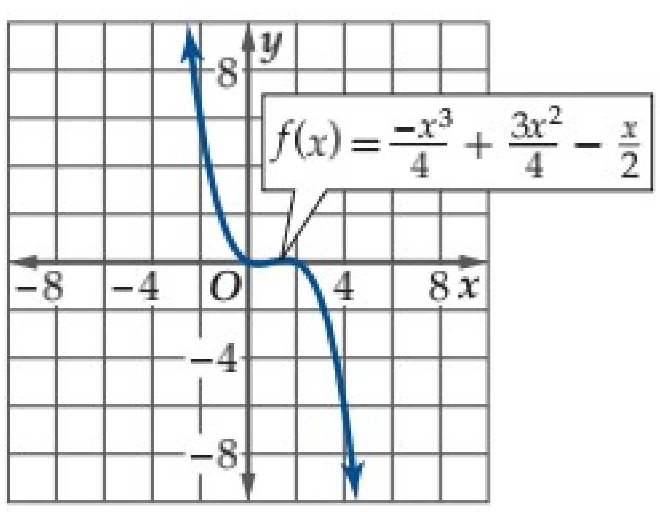
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

6A)



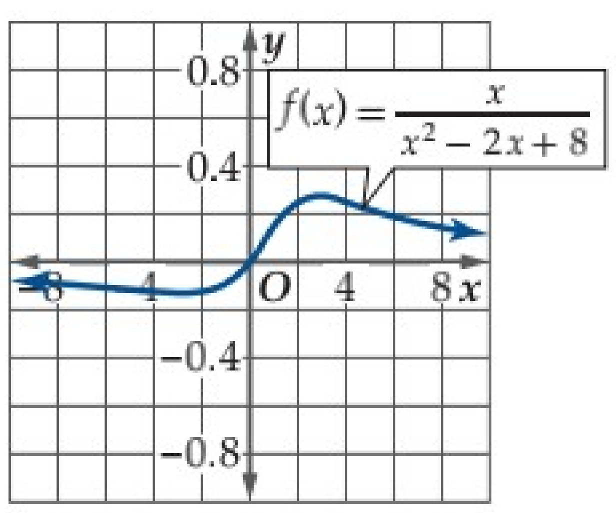
6B)



لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو $-\infty$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، في حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

التعزيز عدديًا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

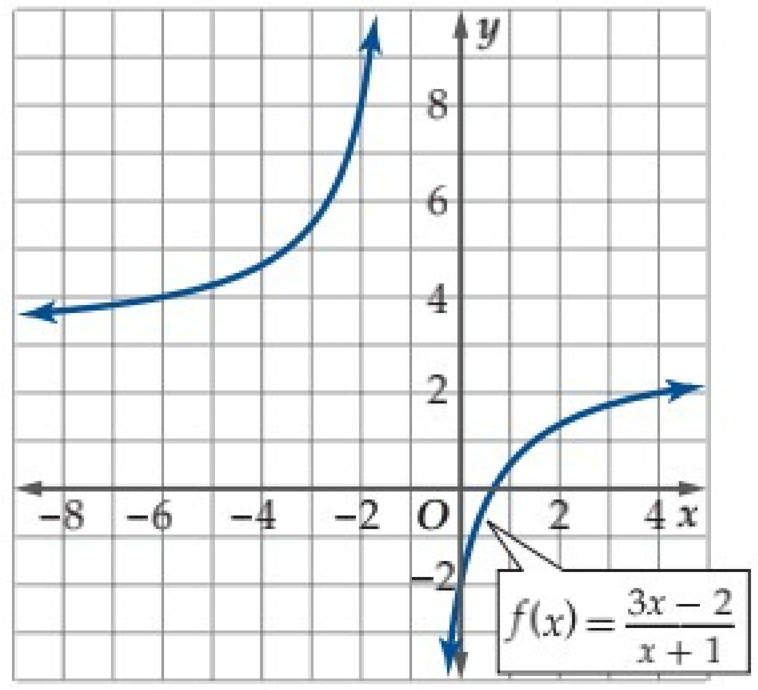
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

إرشادات للدراسة

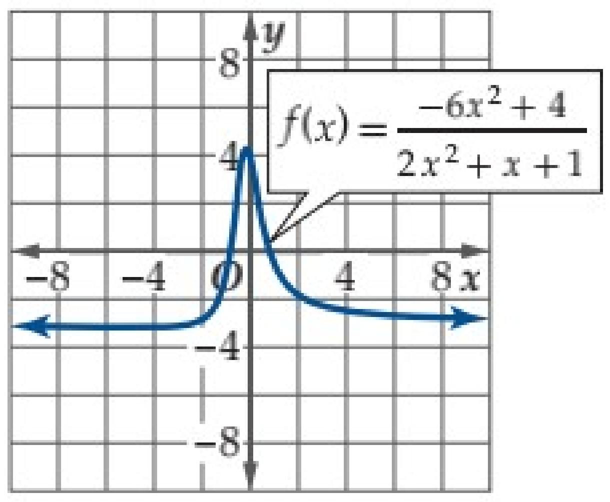
في المثال 6 ، أوجدت قيم تقريبيّة لـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لـ $f(x)$.
وكذلك في المثال 7.

تحقق من فهمك

7A)



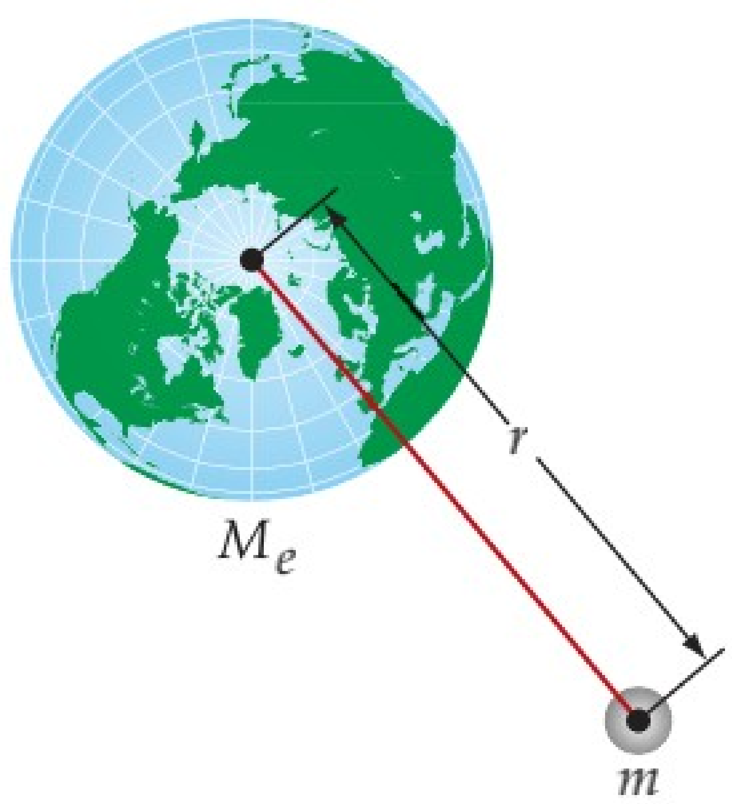
7B)



إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

مثال 8 من واقع الحياة — تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني

فيزياء: **تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟**



المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لِـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim_{r\to\infty} U(r)$.

وبما أن كلًّا من G , m , M_e ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا. وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$ ، ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .

تحقق من فهمك

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، عند $x = -5$.

2) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ ، عند $x = 8$.

3) $h(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$ ، عند $x = -6$, $x = 6$.

4) $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ ، عند $x = 1$.

5) $h(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ ، عند $x = 1$, $x = 4$.

6) $h(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x^3}$ ، عند $x = 0$, $x = 6$.

7) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , \ x \leq -6 \\ -x + 2 & , \ x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.

8) **فيزياء:** غرفتان درجتا حرارتهما مختلفتان يفصل بينهما حائط. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط بحسب العلاقة $f(w) = \dfrac{7.4}{w}$ ، حيث تمثل $f(w)$ المعدل الزمني لانتقال الحرارة بالواط، و w سمك الحائط بالمتر. (المثالان 1,2)

a) حدِّد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

b) حدِّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعه؟

c) مثِّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع **b** .

أعد تعريف كل دالة مما يأتي عند قيمة x المعطاة؛ لتصبح الدالة متصلة عندها: (المثال 3)

9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ ، $x = -3$

10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ ، $x = 5$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ ، $x = \sqrt{2}$

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (المثالان 4, 5)

12) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

13) $g(x) = -x^3 + 6x + 2, [-4, 4]$

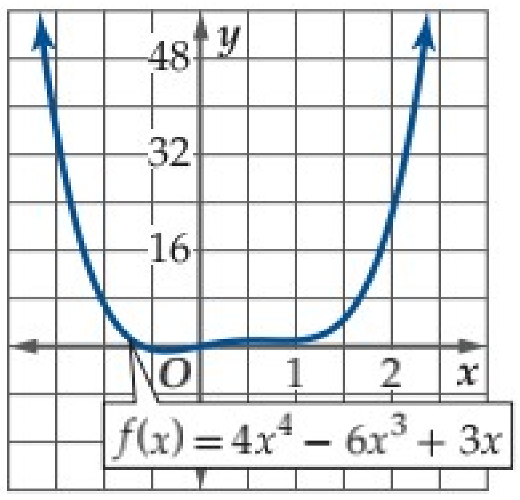
14) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3, [-3, 3]$

15) $h(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$

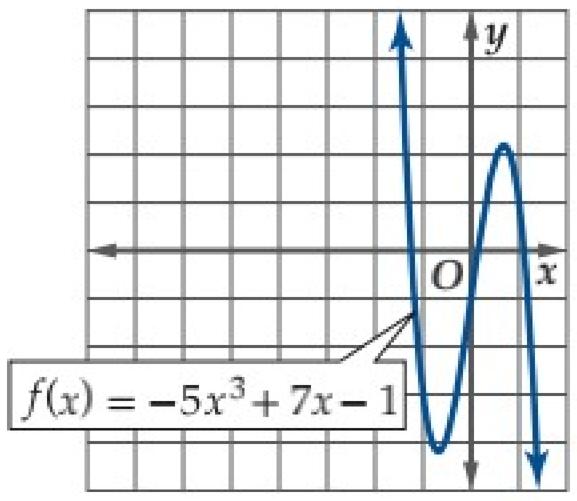
16) $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5, [0, 5]$

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا. (المثالان 6, 7)

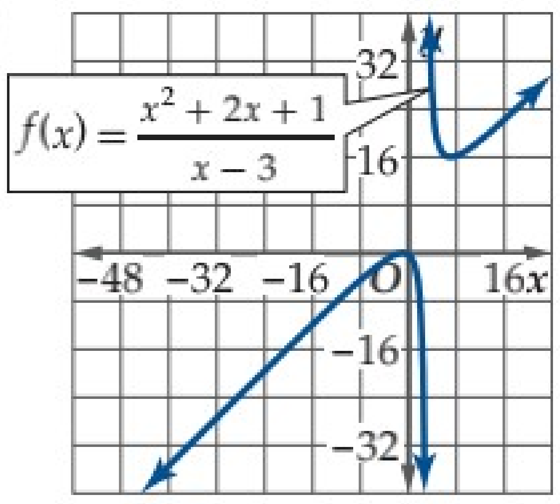
17)



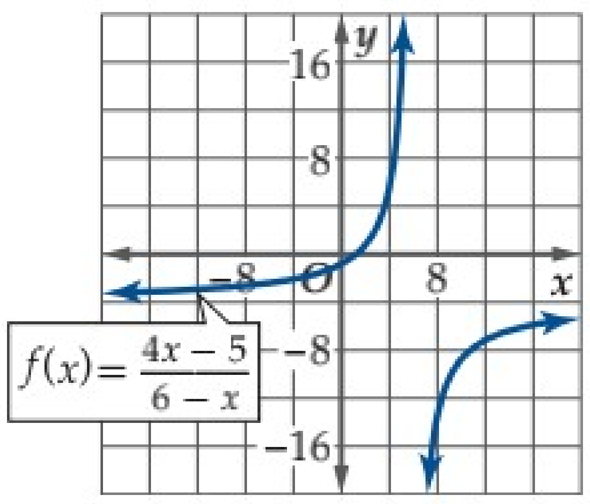
18)



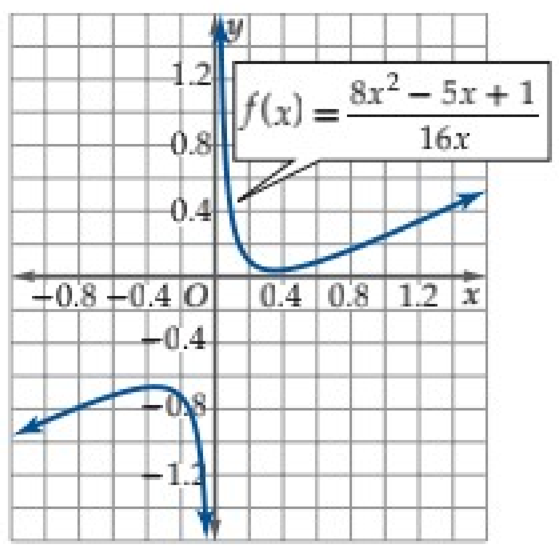
19)



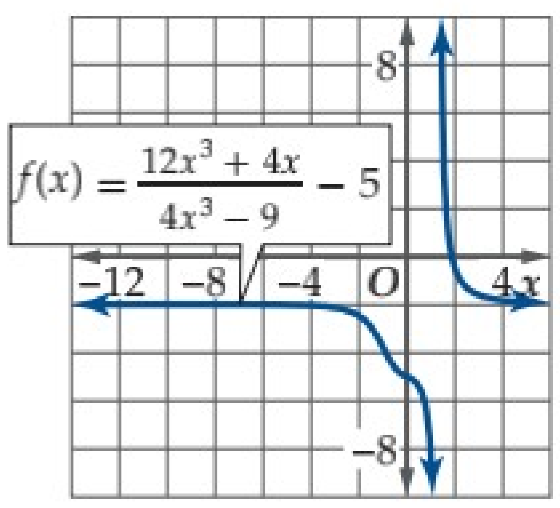
20)



21)



22)



23) **كيمياء:** يعطى معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x) = \dfrac{0.5x}{x + 12}$ ، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. (مثال 7)

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة.

b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟ عزِّز إجابتك عدديًّا.

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما يقترب المتغير من ∞ . برِّر إجابتك. (مثال 8)

24) $f(u) = \dfrac{12}{u}$

25) $q(x) = -\dfrac{24}{x}$

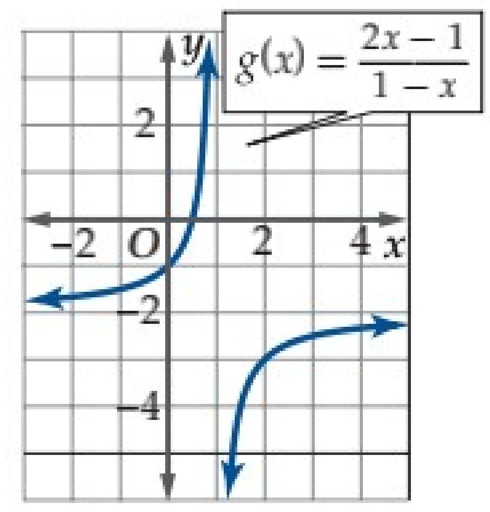
26) $f(x) = \dfrac{0.8}{x^2}$

27) $h(r) = \dfrac{-1}{r^2 + 1}$

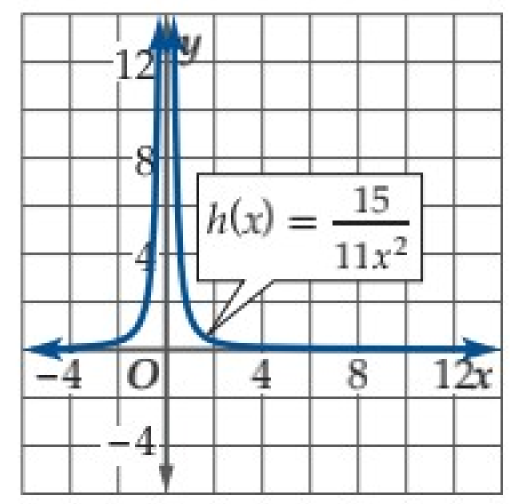
28) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \dfrac{p^2}{2m}$، حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة)، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في ساحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ (مثال 8)

استعمل كلًّا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برِّر إجابتك.

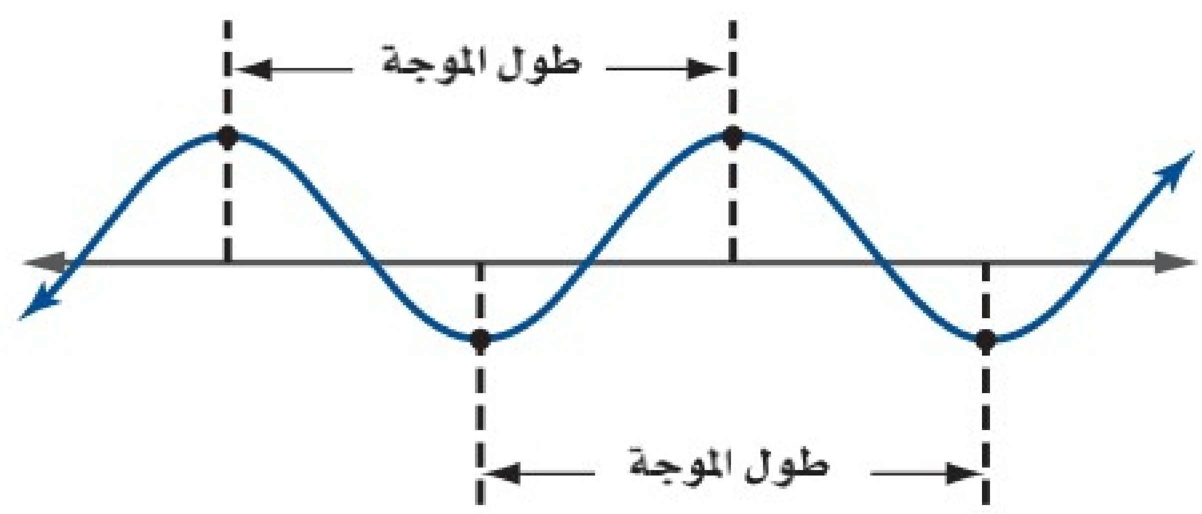
(29



(30



31) **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجه λ (ويقرأ لامدا)، و يُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f.



وتصف الدالة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 \, m/s$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. وعزز إجابتك عدديًّا.

c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال.

الحاسبة البيانية: مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال، وحدد نقاطه. ثمّ صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت.

(32 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

(33 $h(x) = \dfrac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

(34 $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية وَ صِف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًّا.

(35 $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

(36 $f(x) = \dfrac{16x^2}{x^2 + 15x}$

37) **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًّا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال. فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.

c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة بشكل كبير، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

38) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات. افترض أن $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان.

a) **جدوليًّا:** افترض أن $c = 1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d. ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول أدناه:

$c = 1$				
a	b	d	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) **جدوليًّا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، ومجموعة فيها $a = c$. ثم اكتب كل دالة، وكوِّن جدولًا كما في الفرع **a**.

c) **تحليليًّا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من $-\infty$ ومن $+\infty$.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

39) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$

40) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^5}$

41) **تحدّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , \quad x \geq 3 \\ bx + a & , \quad -3 < x < 3 \\ -b - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$$

تبرير: أوجد $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية، وبرِّر إجابتك.

42) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية.

43) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة فردية.

44) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

45) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول المحور y.

46) **اكتب:** أعط مثالًا على دالة لها عدم اتصال قابل للإزالة، ثم بيّن كيف يمكن إزالته. وكيف تؤثر إزالة عدم الاتصال في الدالة؟

مراجعة تراكمية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلٍّ من الدوال الآتية بيانيًّا، وتحديد أصفارها. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا: (الدرس 1-2)

47) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$

48) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$

49) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

حدد مجال كل من الدوال الآتية: (الدرس 1-1)

50) $f(x) = \dfrac{4x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

51) $g(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 2x - 10}$

52) $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 3x + 1}$ فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

53) $f(9)$

54) $f(3b)$

55) $f(2a - 3)$

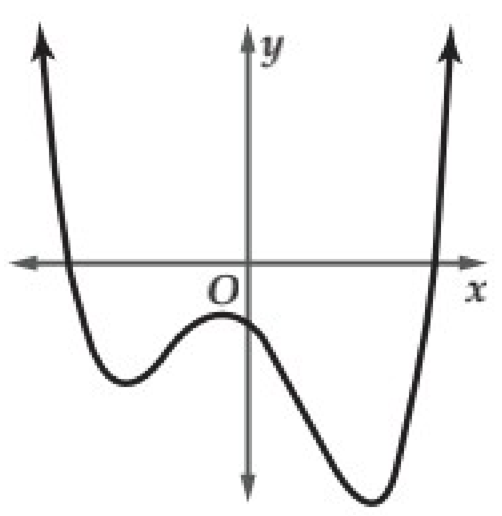
مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، ثم حلل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. وإن كانت زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها. (الدرس 1-2)

56) $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

57) $f(x) = \dfrac{x + 4}{x - 2}$

تدريب على اختبار

58) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟



A 1

B 2

C 3

D 4

59) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

D $[9, 10]$

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير
Extrema and Average Rates of Change

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

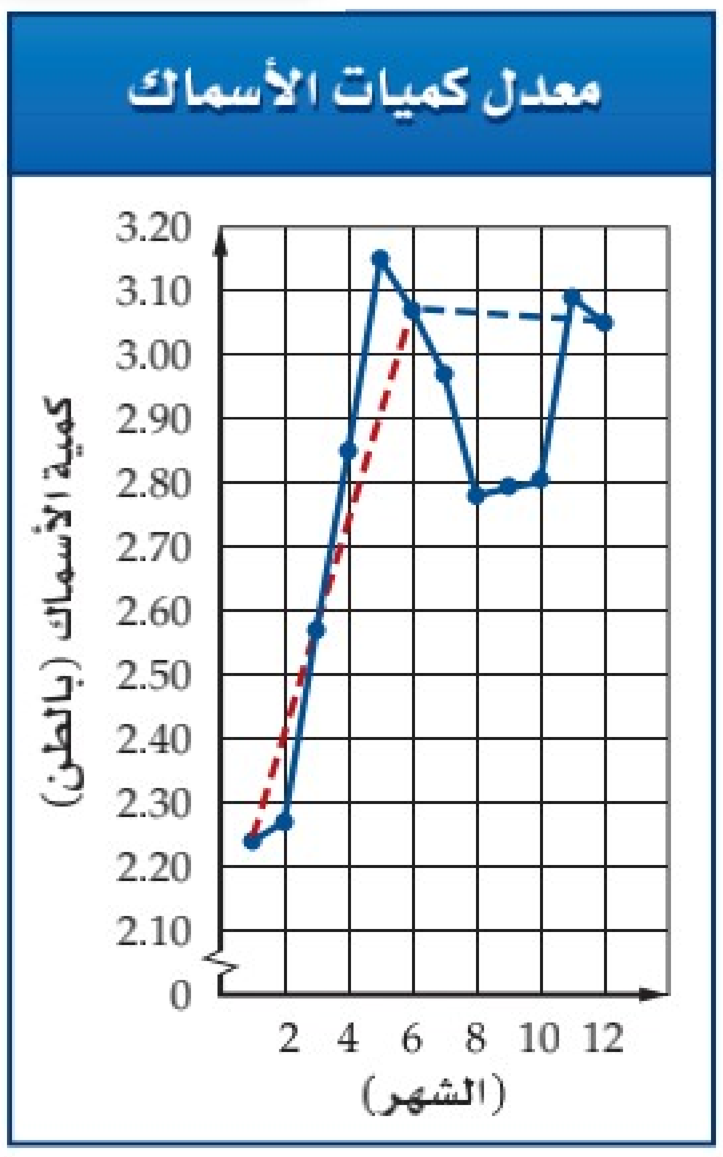
- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجِدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات:

المتزايدة
increasing
المتناقصة
decreasing
الثابتة
constant
النقطة الحرجة
critical point
العظمى
maximum
الصغرى
minimum
القصوى
extrema
متوسط معدل التغير
average rate of change
القاطع
secant line

لماذا؟

يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

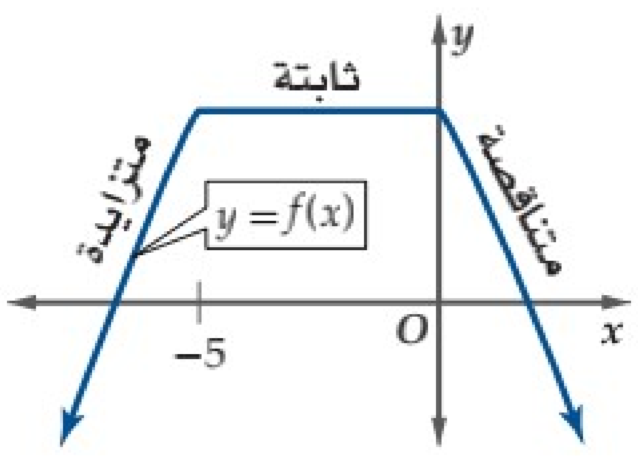


يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:



- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

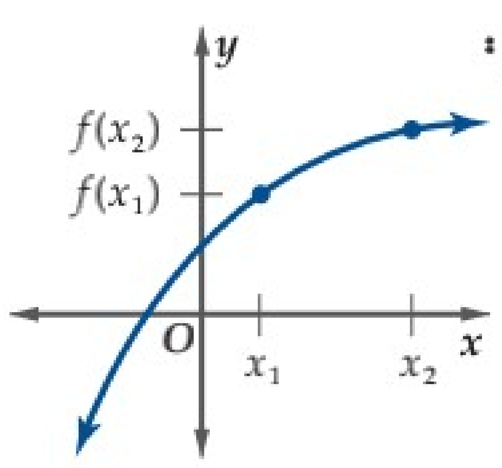
يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًّا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متزايدة** على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

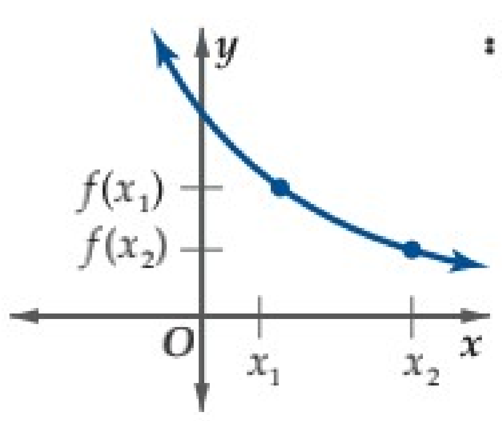
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متناقصة** على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

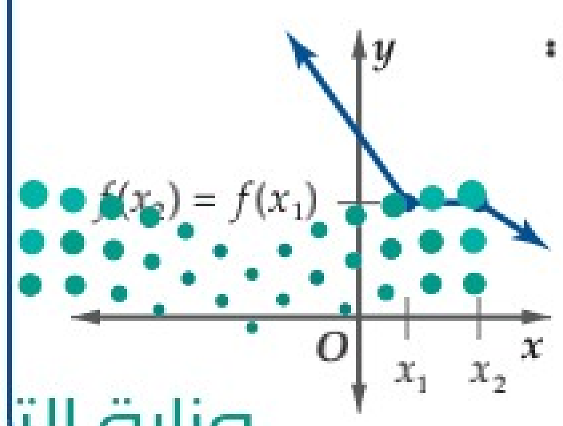
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f **ثابتة** على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

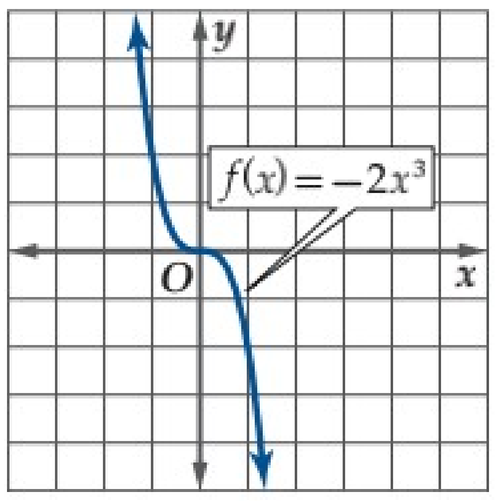
الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.



$f(x) = -2x^3$ (a

التحليل بيانيًا:

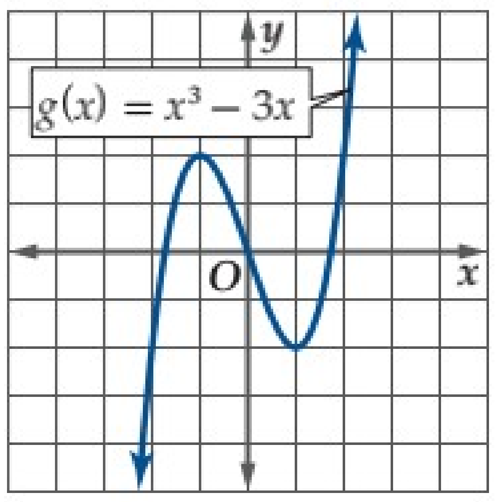
يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x ؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x ، تتناقص قيم $f(x)$ ؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.



$g(x) = x^3 - 3x$ (b

التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$g(x)$	-1298	-702	-322	-110	-18	2

$(-1, 1)$:

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	-1.375	-2

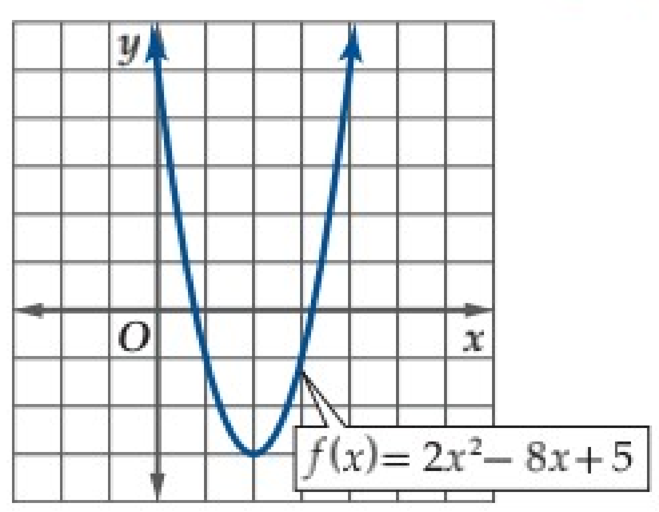
$(1, \infty)$:

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	-2	18	110	322	702	1298

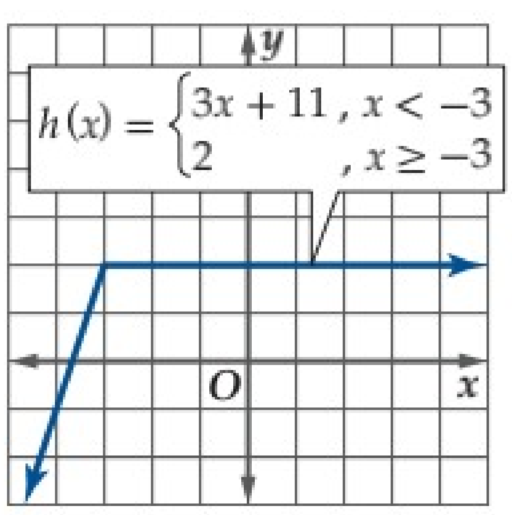
توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1 ، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1 ، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1 ، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

✓ تحقق من فهمك

(1A



(1B



بينما يستعمل التمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة ويمكن تعزيز ذلك عدديًّا، إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل لإثبات صحة هذه الخصائص.

تنبيه!

فترات: لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

إرشادات للدراسة

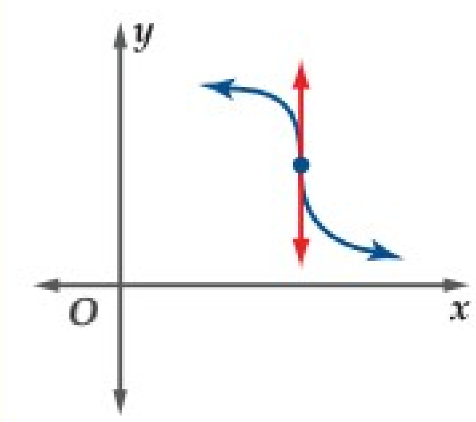
الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة: إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة لكل قيم x في مجالها تسمّى دالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة على الترتيب. فالدالة في المثال 1a متناقصة، بينما الدالة في المثال 1b لا يمكن تصنيفها على أنها متزايدة أو متناقصة؛ لأنها متزايدة على فترة ومتناقصة على أخرى.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى: ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.

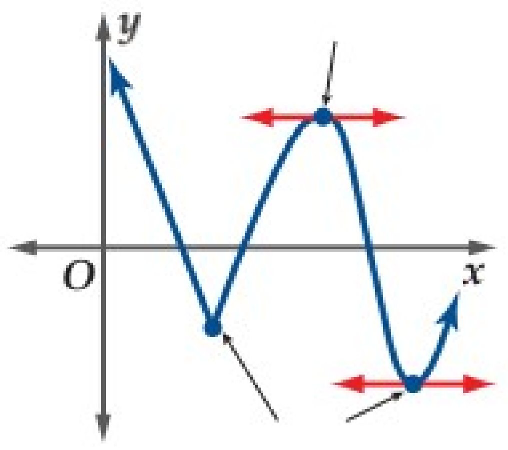
إرشادات للدراسة

القيم القصوى: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة الحرجة غير معرف كما في الشكل أدناه؛ فإنه لا توجد للدالة عند هذه النقطة قيمة عظمى أو صغرى.



إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية: يُستعملُ مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًّا أو عموديًّا (أي أن ميله صفر أو غيرمعرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

مفهوم أساسي — القيم القصوى المحلية والمطلقة

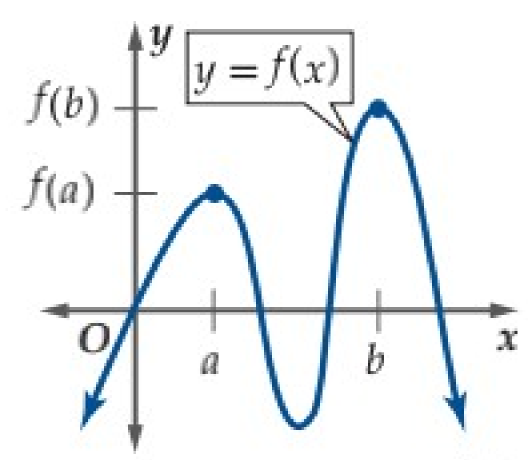
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

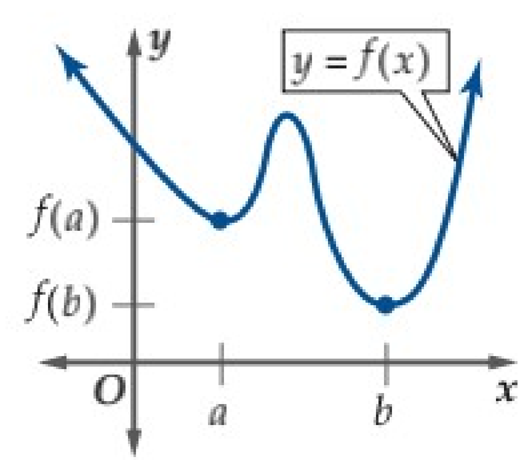
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمِّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمةً صغرى مطلقةً.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

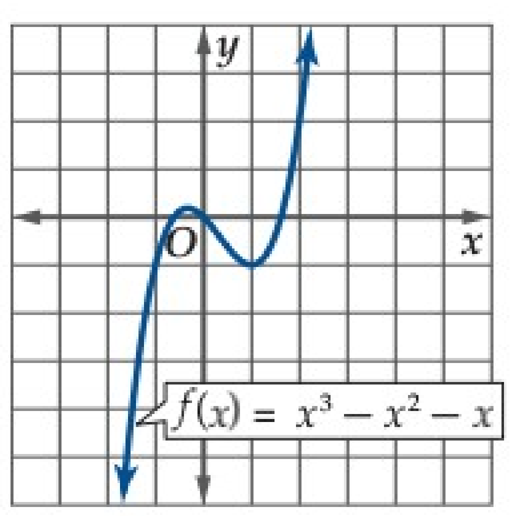
النموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$ ، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ ، ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا:

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

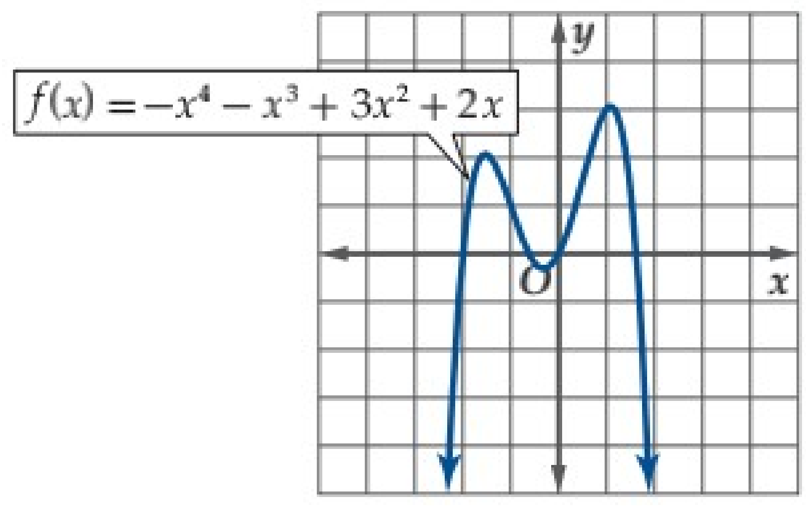
بما أن $f(-0.5) > f(-1)$ و $f(-0.5) > f(0)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(0.5)\,, f(1) < f(1.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولًا.

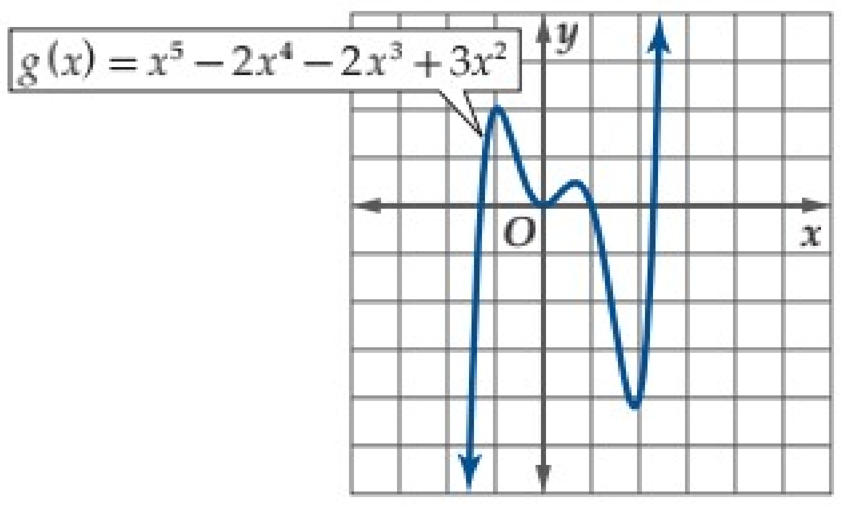
وبما أن $f(1) < f(-100)\,, f(-0.5) > f(100)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

✓ تحقق من فهمك

(2A



(2B



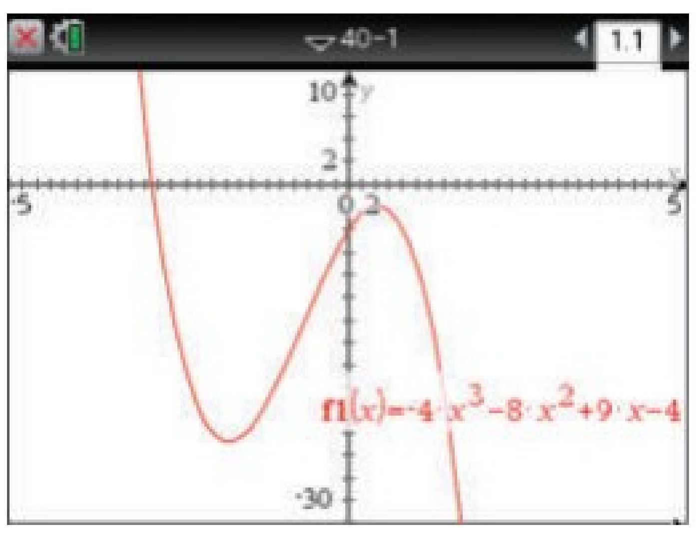
نحتاج إلى حساب التفاضل لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، ونحتاج إليه أيضًا لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة والذي ستتم دراسته في الفصل الثامن (النهايات والاشتقاق). كما يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتحديد مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمها.

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

الحاسبة البيانية: **استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.**

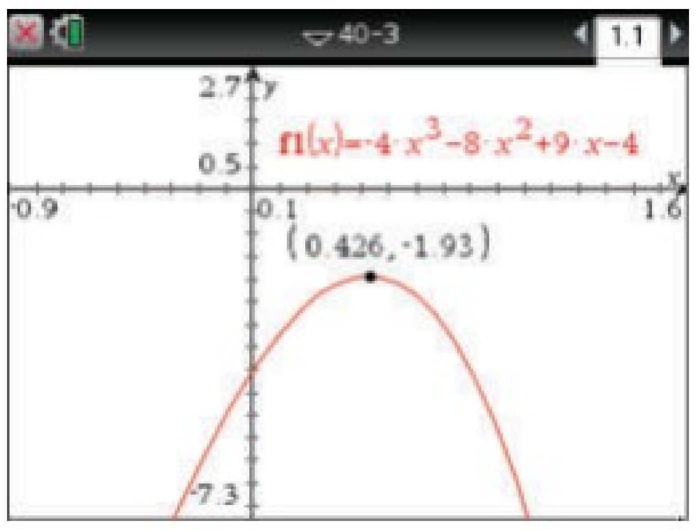
مثِّل الدالة بيانيًّا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

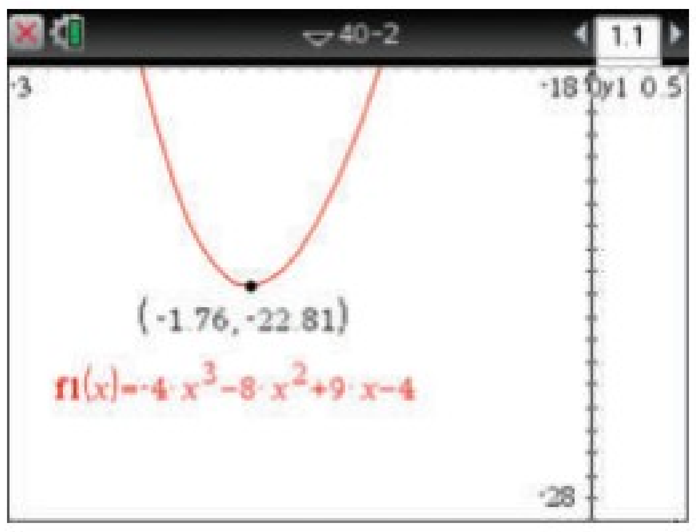
بالضغط على المفاتيح: on، ثم اكتب الدالة واضغط enter



يوضِّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلُّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط على مفتاح menu، ثم على 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى أو 2: القيمة الصغرى، ثم مرِّر المؤشر أفقيًّا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x = -1.76$، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$





إرشاد تقني

ضبط: عند البحث عن القيم العظمى والصغرى تأكد من اختيار التدريج المناسب، لتتمكن من رؤية منحنى الدالة كاملًا.

✓ تحقق من فهمك

(3A $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

(3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

الربط مع الحياة

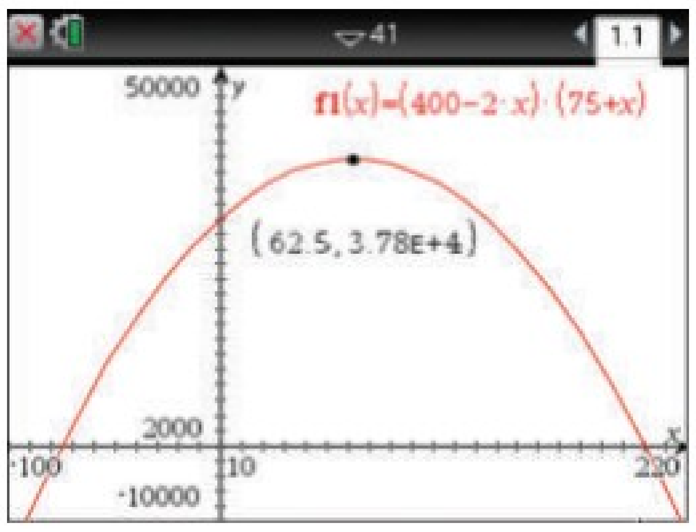
تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيقات القيم القصوى

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	×	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$f(x)$	=	$(75 + x)$	×	$(400 - 2x)$



المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$.
لذا مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح menu، ثم 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى، ثم مرّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.

لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

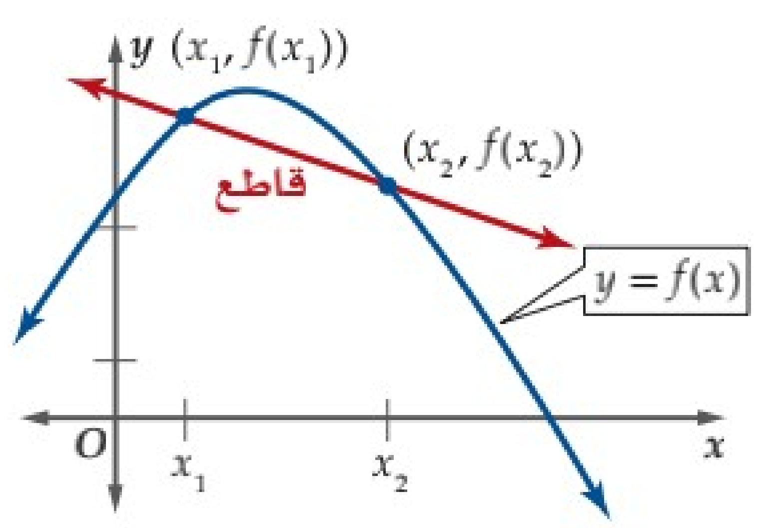
متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

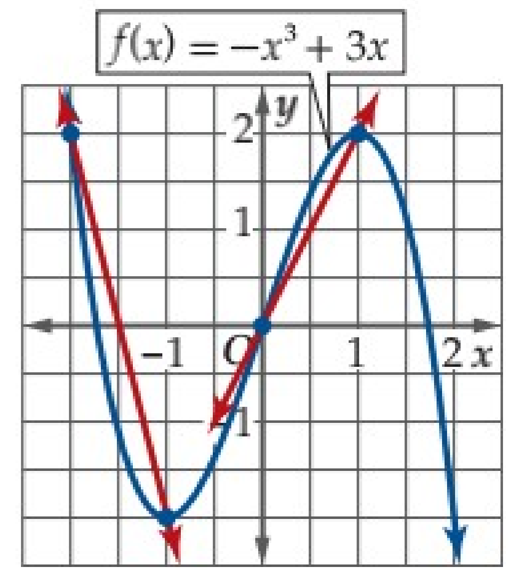
هندسيًا: يُسمّى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}.

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو
$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:



الشكل 1.4.1

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ عوّض -1 مكان x_2 ، -2 مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ عوّض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ عوّض 1 مكان x_2 ، 0 مكان x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ عوّض $f(1)$ ، $f(0)$ وبسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.

✓ تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

يُستعملُ متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها السرعة المتوسطة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ عوّض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ عوّض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبسّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ عوّض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوّض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبسّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s ، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمَّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120 - 150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

تنبيه!

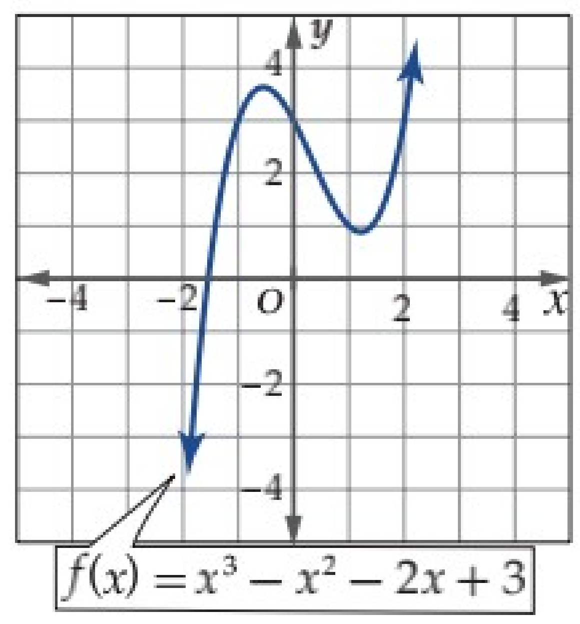
السرعة المتوسطة: يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة؛ فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

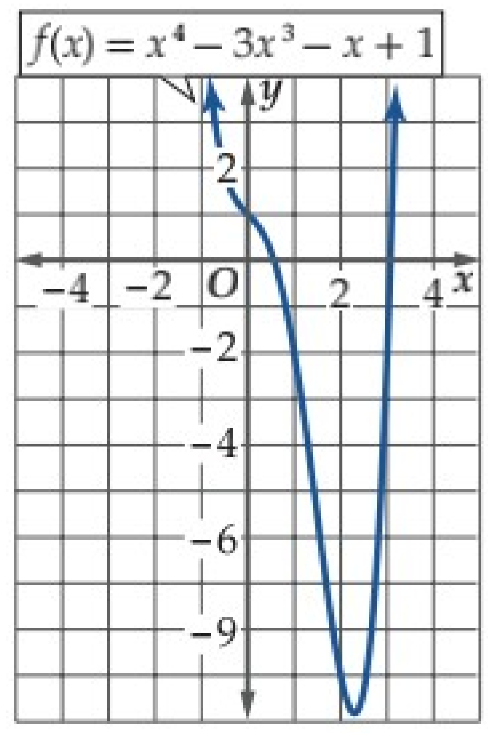
✓ تحقق من فهمك

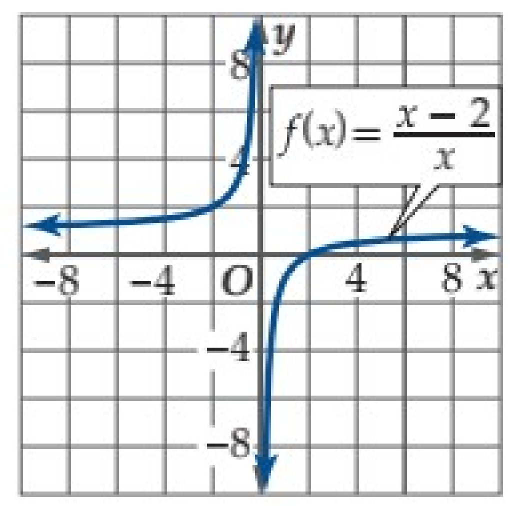
6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

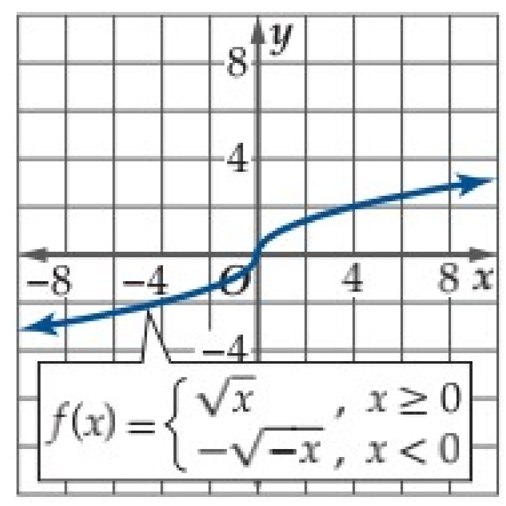
تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزّز إجابتك عدديًا: (مثال 1)

(1


(2


(3


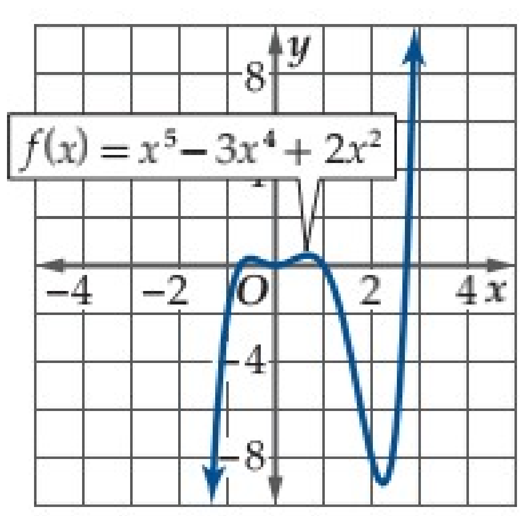
(4


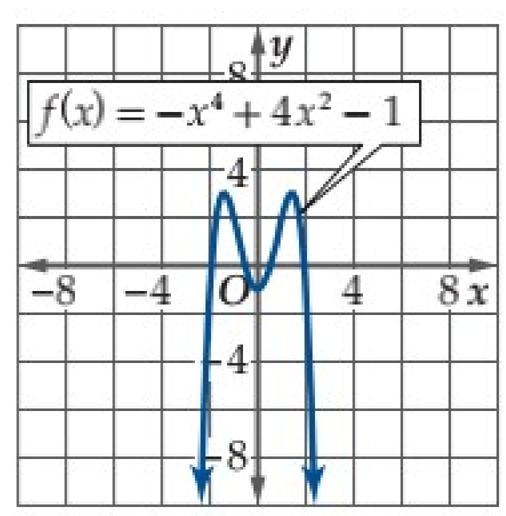
5) **كرة سلة:** يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t) = -64.4t^2 + 48.3t + 5$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. (مثال 2)

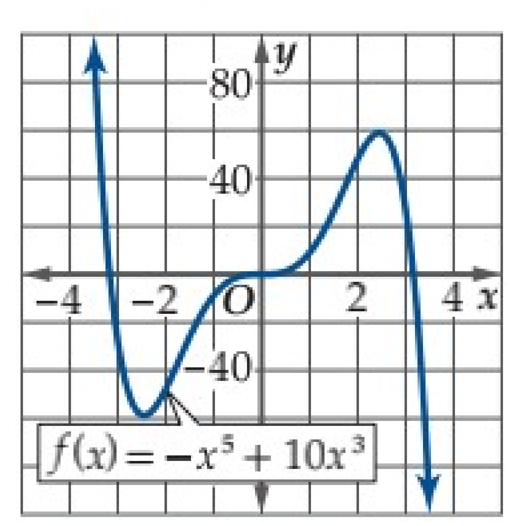
a) مَثّل الدالة بيانيًا.

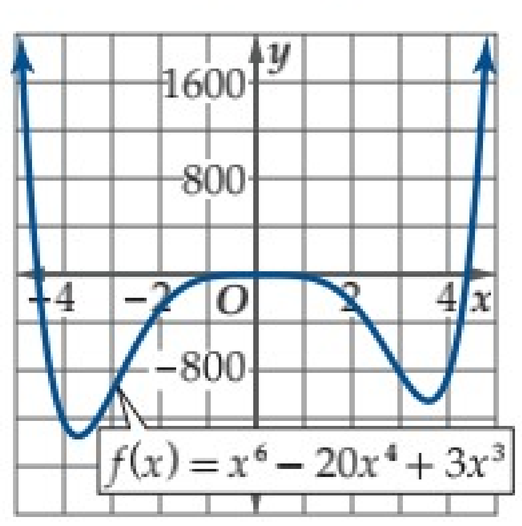
b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًا.

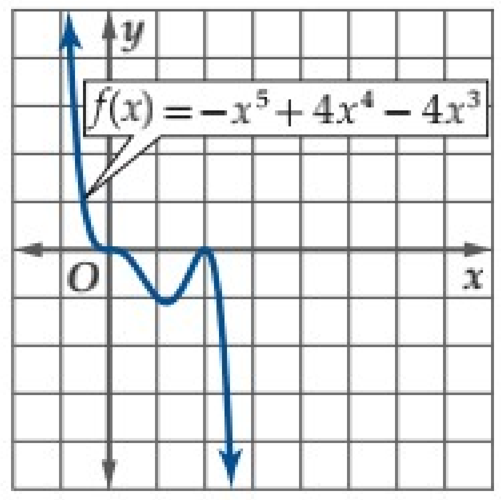
قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًا. (مثال 2)

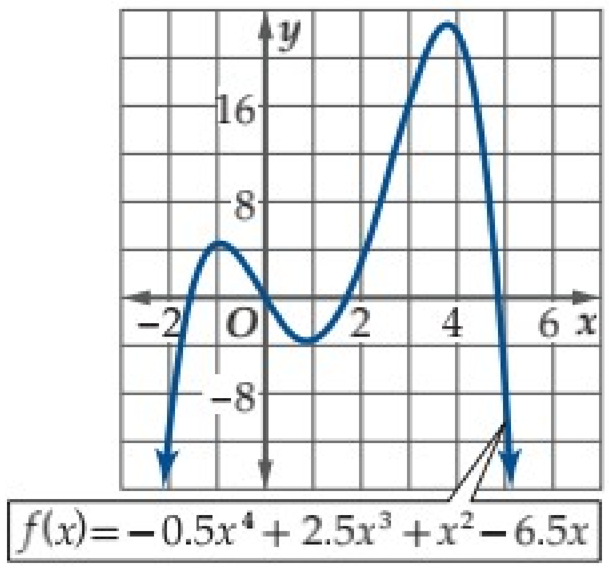
(6


(7


(8


(9


(10


(11


الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)

12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

13) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

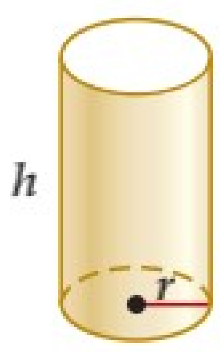
14) $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

15) $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$

16) $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$

17) $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

18) **هندسة:** أوجد كلًّا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (مثال 4)



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة تساوي 20.5π بوصة مربعة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 5)

19) $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$

20) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$

21) $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$

22) $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9, [3, 6]$

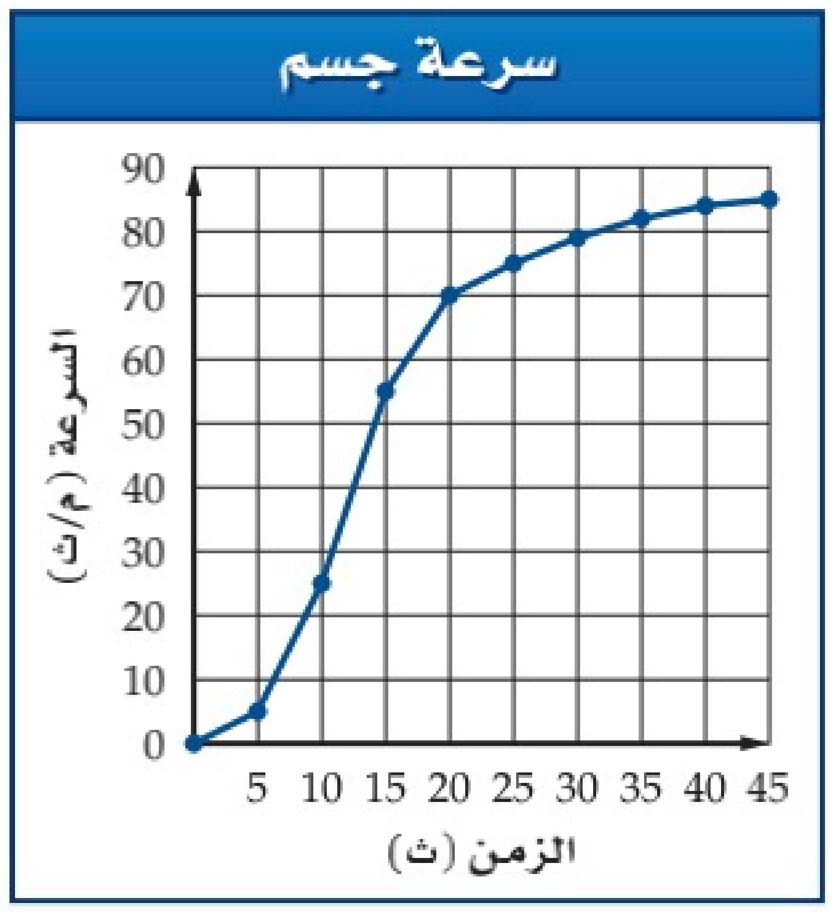
23) $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$

24) $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$

25) **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر محرم، فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك. (مثال 6)

a) من ربيع الثاني إلى جمادي الأول. b) من رجب إلى شعبان.

26) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15]$, $[15, 20]$, $[25, 45]$.

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية.

27) **تكنولوجيا:** تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$ ، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \le x \le 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

28) **دخل:** افترض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1430هـ وحتى عام 1440 هـ يعطى بالدالة:

$$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362,\ 0 \le x \le 10$$

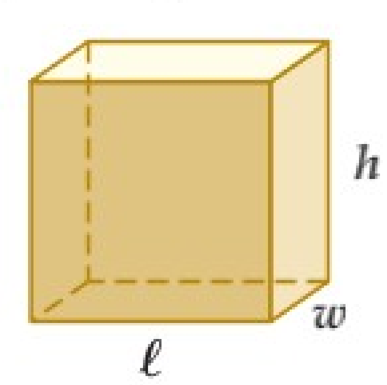
حيث x رقم السنة.

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1433 إلى عام 1440 هـ. وماذا تعني قيمة متوسط معدل التغير في هذه الفترة؟

c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

29) **صندوق:** يرغب سالم في عمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. وضّح إجابتك.



مثّل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

30) $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

31) $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

32) $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

33) $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

34) $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$ ، و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.

35) $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.

الحاسبة البيانية: **حدّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبيّن نوعها:**

36) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

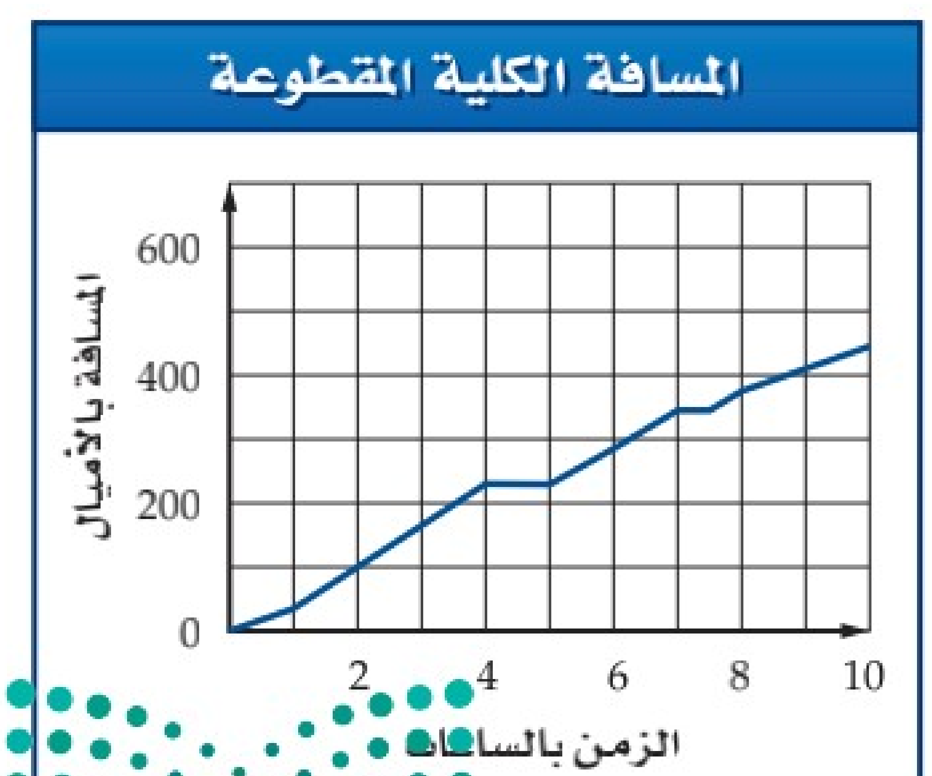
37) $f(x) = -0.5(x + 5)^2 - 1$

38) $f(x) = -4|x - 22| + 65$

39) $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$

40) $f(x) = x^3 + x$

41) **سفر:** قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعها في إحدى الرحلات ومثّلها بيانيًّا. أعطِ أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟



مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مثل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

42) متصلة
متزايدة على $(-\infty, 4)$
ثابتة على $[4, 8]$
متناقصة على $(8, \infty)$
$f(5) = 3$

43) لها نقطة عدم اتصال لانهائي عند $x = -2$
متزايدة على $(-\infty, -2)$
متزايدة على $(-2, \infty)$
$f(-6) = -6$

44) **تبرير:** f دالة متصلة لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$ ومتزايدة عندما $x > c$. صِف سلوك الدالة عندما تزداد x لتقترب من c. وضّح إجابتك.

45) **تحدٍّ:** إذا كانت g دالة متصلة، وكان $g(a) = 8$ و $g(b) = -4$، فأعطِ وصفًا لقيمة $g(c)$ حيث $a < c < b$. وبرِّر إجابتك.

46) **تحدٍّ:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = x \sin x$ بيانيًّا، ثم صف القيم القصوى المحلية للدالة.

47) **تبرير:** أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ إذا كانت $f(x)$ ثابتة في الفترة (a, b). وضّح إجابتك.

48) **اكتب:** صف متوسط معدل تغير الدالة إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة في فترة معينة.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة أو قيم x المعطاة معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيِّن نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (الدرس 1-3)

49) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}\ , x = -3$

50) $f(x) = \sqrt{x + 1}\ , x = 3$

51) $h(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}\ ; x = -5\ , x = 5$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. وتحقّق من إجابتك جبريًّا، و إذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحنى الدالة. (الدرس 1-2)

52) $f(x) = |x^5|$

53) $f(x) = \dfrac{x + 8}{x - 4}$

54) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

أوجد مجال كل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

55) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 5}$

56) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

57) $h(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 7}}$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-3)

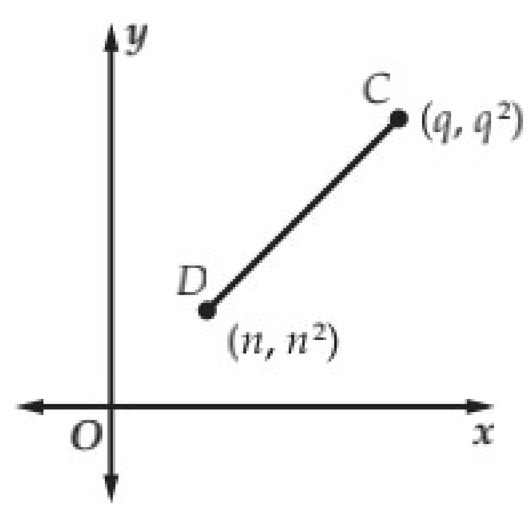
58) $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$

59) $g(x) = \dfrac{x^2 + 5}{7 - 2x^2}$

60) $h(x) = \left|(x - 3)^2 - 1\right|$

تدريب على اختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $q \neq n$، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD.



A $q + n$ **C** $\dfrac{q^2 + q}{n^2 - n}$

B $q - n$ **D** $\dfrac{1}{q + n}$

62) يوجد للدالة $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية ، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

الفصل **1**

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–1 إلى 1–4

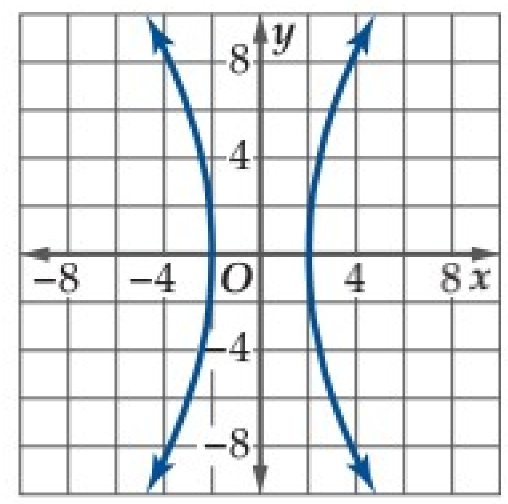
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x : (الدرس 1-1)

1) $3x + 7y = 21$

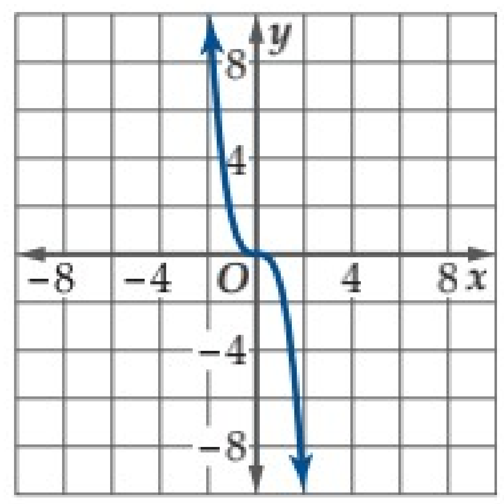
2)

x	y
-1	-1
1	3
3	7
5	11
7	15

3)



4)



5) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 &, x < 2 \\ x &, x \geq 2 \end{cases}$ ، فأوجد $f(2)$. (الدرس 1-1)

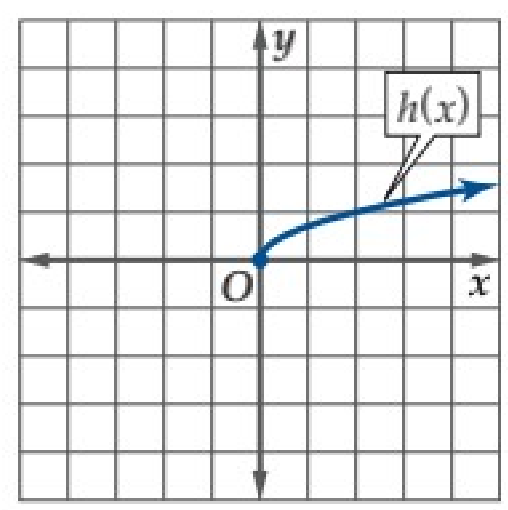
6) **كرة قدم:** يعطى ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض عند ضربها من قبل حارس مرمى بالدالة $h(t) = -8t^2 + 50t + 5$ ، حيث h ارتفاع الكرة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. (الدرس 1-1)

a) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثوانٍ.

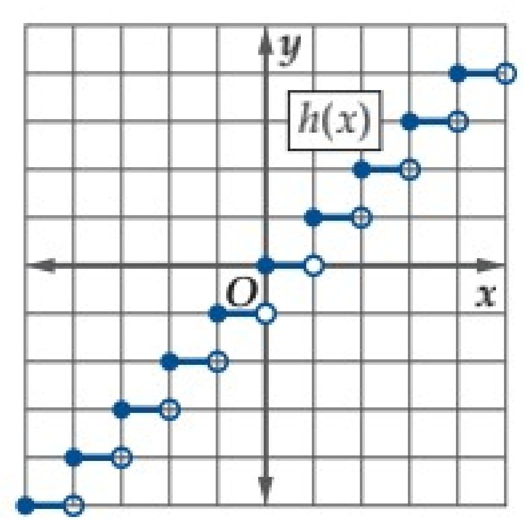
b) ما مجال هذه الدالة؟ برِّر إجابتك.

استعمل التمثيل البياني للدالة h أدناه لإيجاد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-2)

7)



8)



أوجد المقطع y والأصفار لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (الدرس 1-2)

9) $f(x) = x^3 - 16x$

10) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$

اختبر تماثل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. (الدرس 1-2)

11) $x^2 + y^2 = 9$

12) $xy = 4$

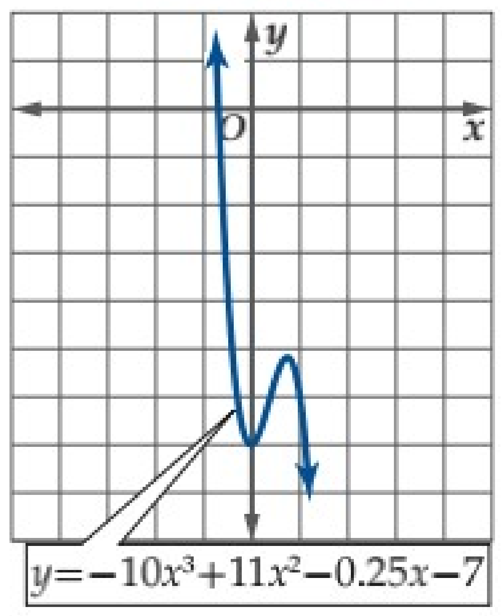
حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 5$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. (الدرس 1–3)

13) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

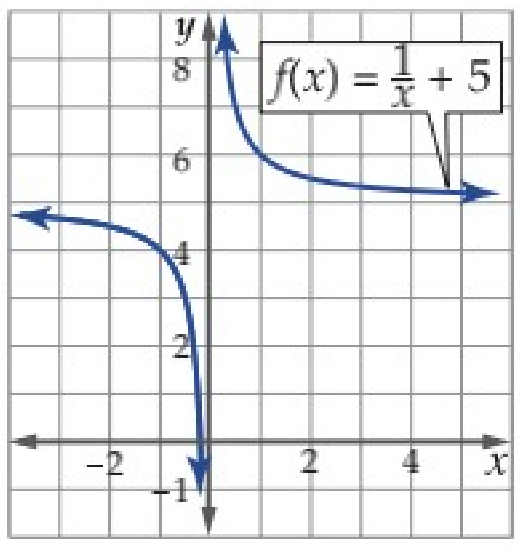
14) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 5}$

صف سلوك طرفي كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين. ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1–3)

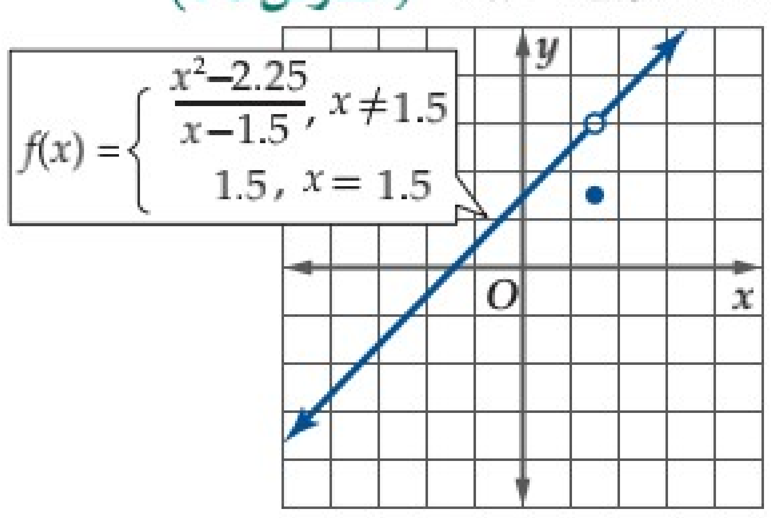
15)



16)



17) **اختيار من متعدد:** ما نوع نقطة عدم الاتصال للدالة الممثلة في الشكل أدناه عند $x = 1.5$ ؟ (الدرس 1-3)



A غير معرف

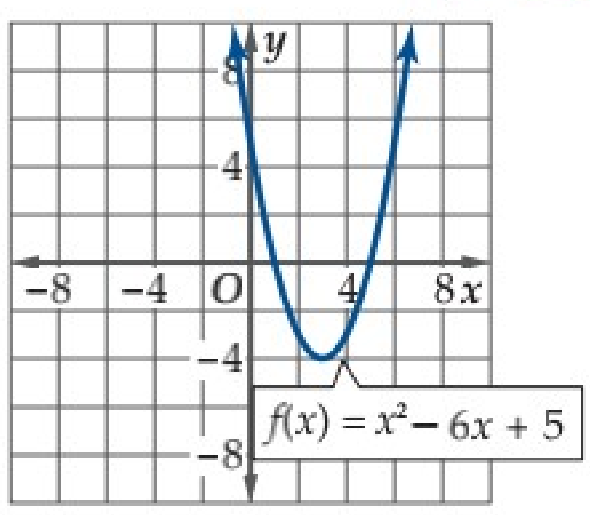
B لانهائي

C قفزي

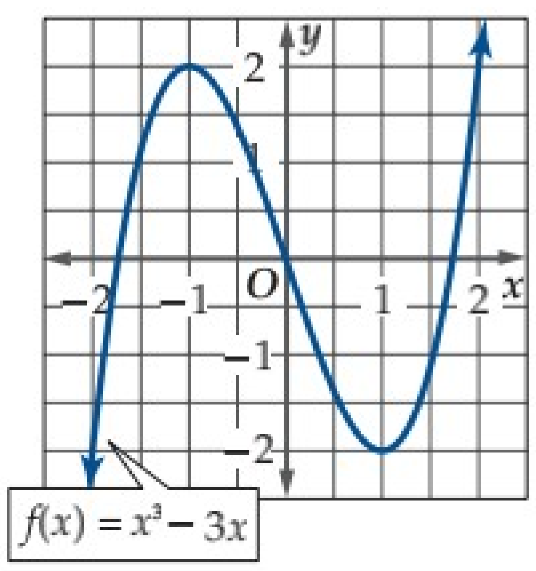
D قابل للإزالة

استعمل التمثيل البياني لكل دالة أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. وعزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1-4)

18)



19)



20) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 18 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيمة الدالة عندها، وبيِّن نوعها، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1-4)

21) **فيزياء:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء فأوجد متوسط السرعة في الفترة $[0, 3]$. (الدرس 1-4)

1-5

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية
Parent Functions and Transformations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها. (الدرس 4–1)

والآن:

- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًا.

المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم) parent function

الدالة الثابتة constant function

الدالة المحايدة identity function

الدالة التربيعية quadratic function

الدالة التكعيبية cubic function

دالة الجذر التربيعي square root function

دالة المقلوب reciprocal function

دالة القيمة المطلقة absolute value function

الدالة الدرجية step function

دالة أكبر عدد صحيح greatest integer function

التحويل الهندسي transformation

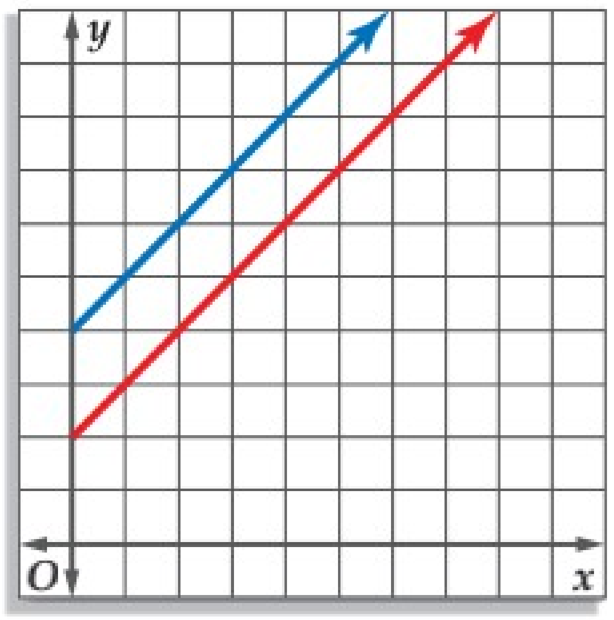
الإزاحة (الانسحاب) translation

الانعكاس reflection

التمدد dilation

لماذا؟

استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

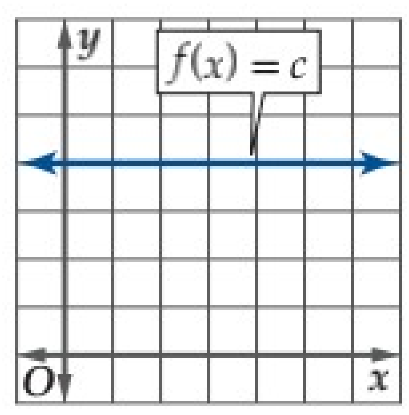


الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

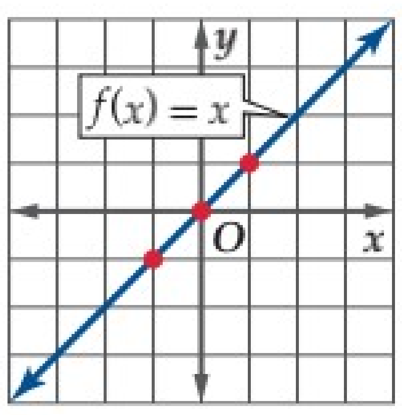
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي: الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

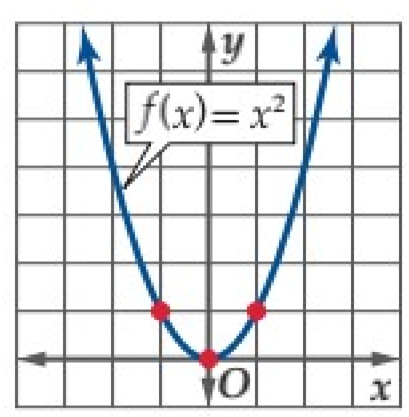
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.



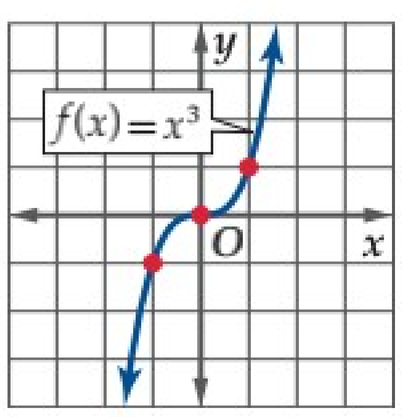
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



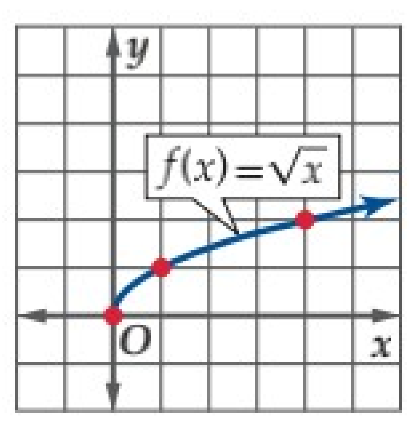
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



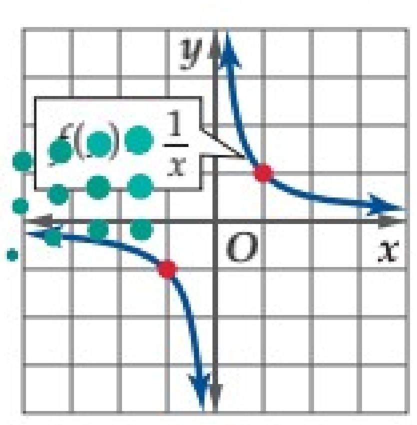
كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

مفهوم أساسي: الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\ , x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

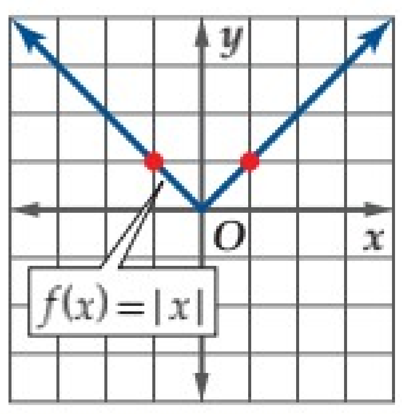
مفهوم أساسي — دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$

النموذج



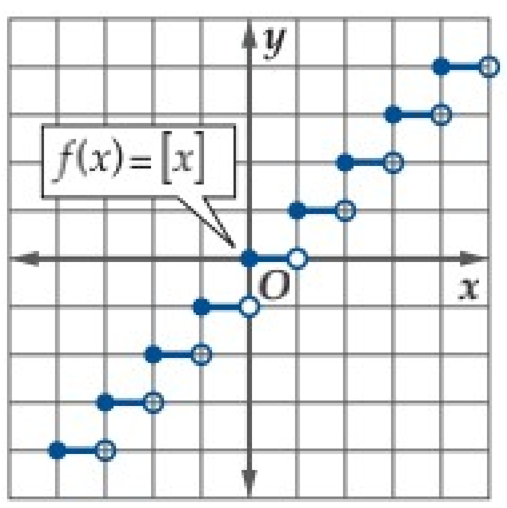
أما **الدالة الدرجية**، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي — دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[-4] = -4, [-1.5] = -2, \left[\frac{1}{3}\right] = 0$

النموذج



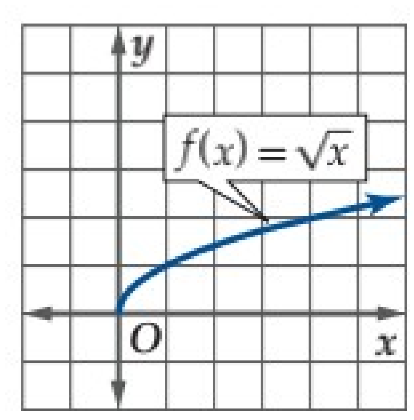
باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم). ممّا يساعدك على تعرف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

مثال 1 — وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

تحقق من فهمك

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$

التحويلات الهندسية: تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

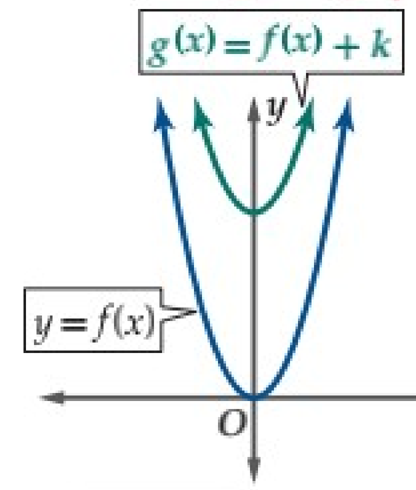
الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

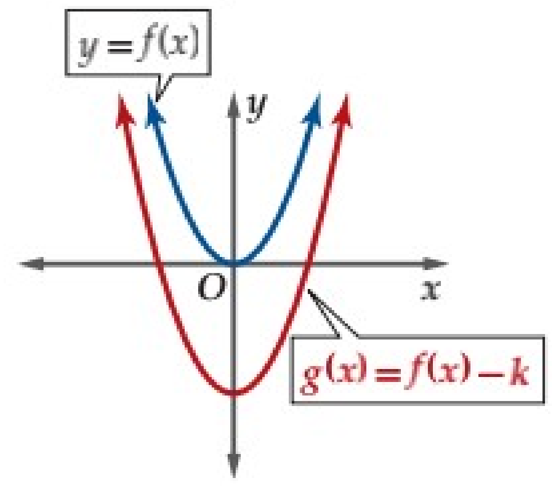
مفهوم أساسي: الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

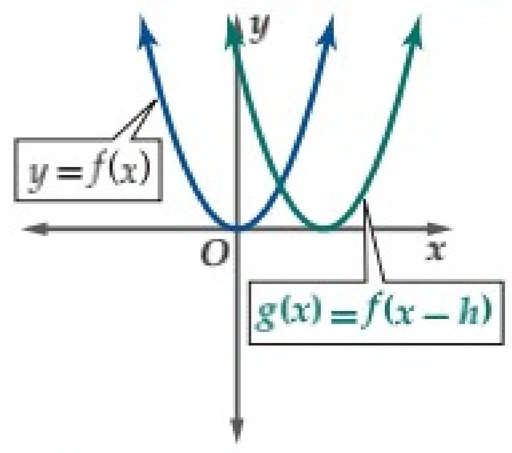


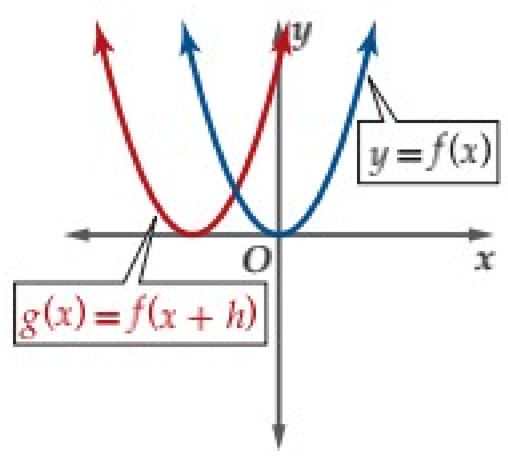


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

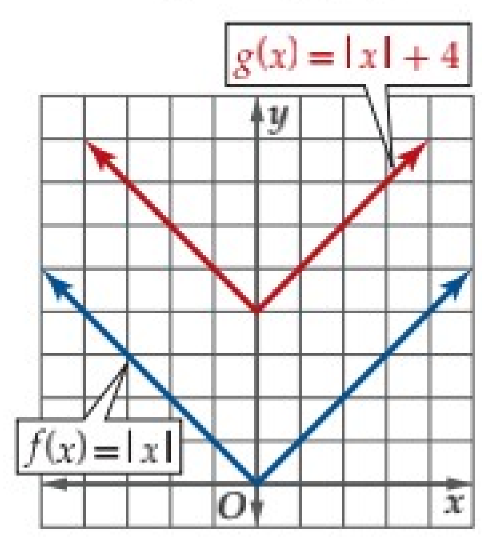
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

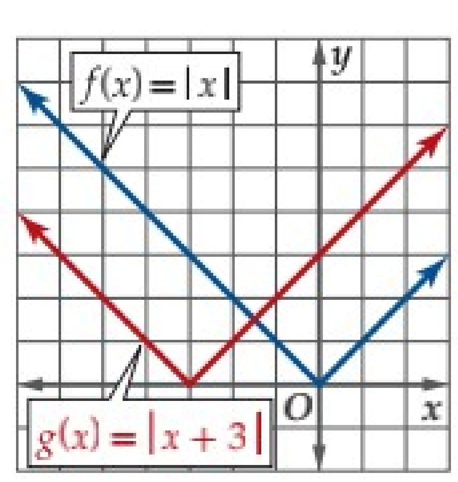
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

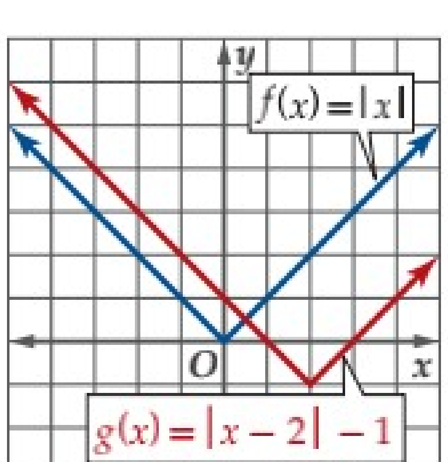
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$　　2B) $h(x) = 8 + x^3$　　2C) $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

إرشاد تقني

الانسحاب: يمكنك إجراء انسحاب لمنحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية. TI–nspire، بعد تمثيل الدالة الرئيسة (الأم) $f1(x)$:

- لإجراء انسحاب مقداره k وحدة لأعلى أو لأسفل اضغط على المفاتيح: tab var $f1(x) \pm k$ enter
- لإجراء انسحاب مقداره h وحدة لليمين أو اليسار اضغط على المفاتيح: tab var $f1(x \pm h)$ enter

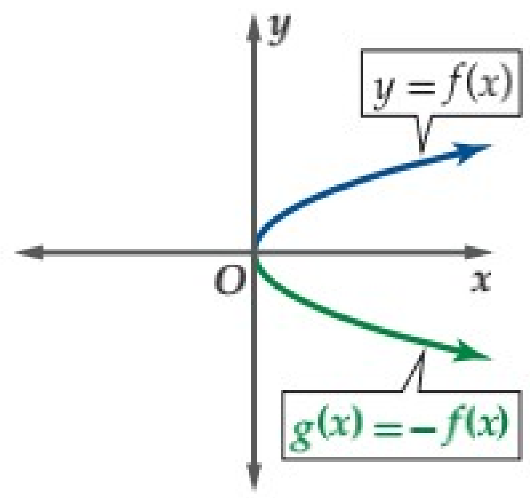
ستقوم الحاسبة برسم كلا الدالتين الرئيسة (الأم) والدالة المزاحة على الشاشة نفسها.

من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

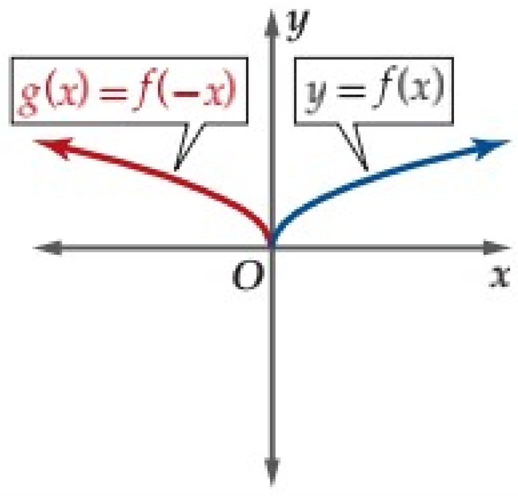
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x .

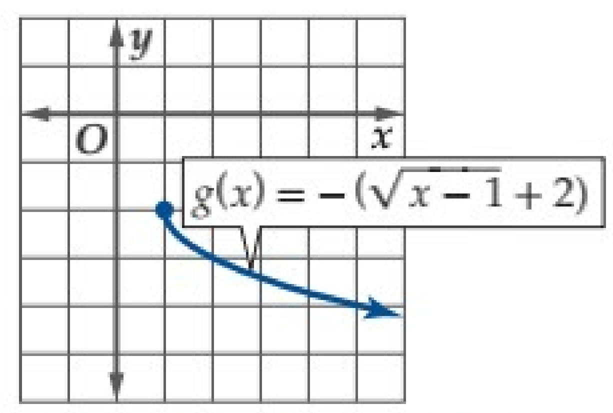


الانعكاس حول المحور y

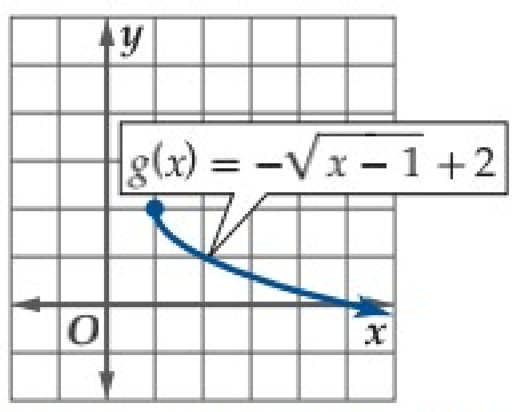
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.



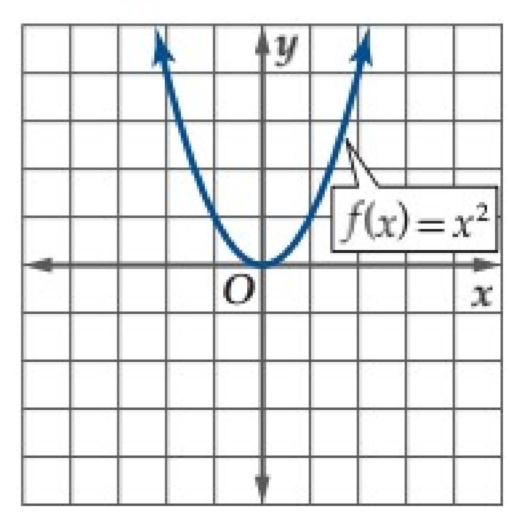
انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

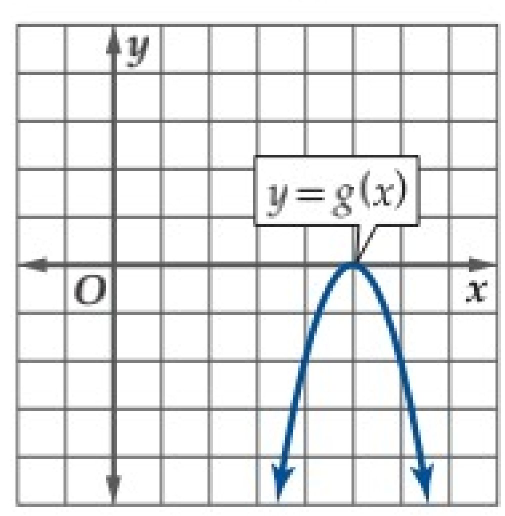
مثال 3 كتابة معادلات التحويل

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:



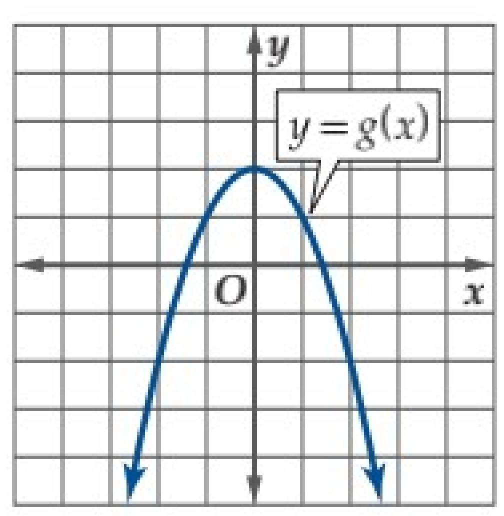
الشكل 1.5.5

(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x ، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

(b

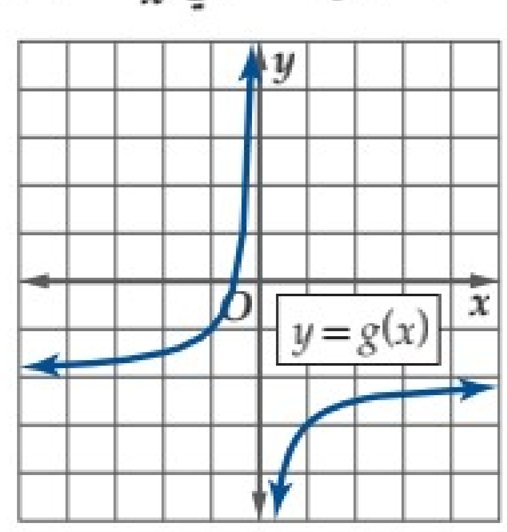


منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

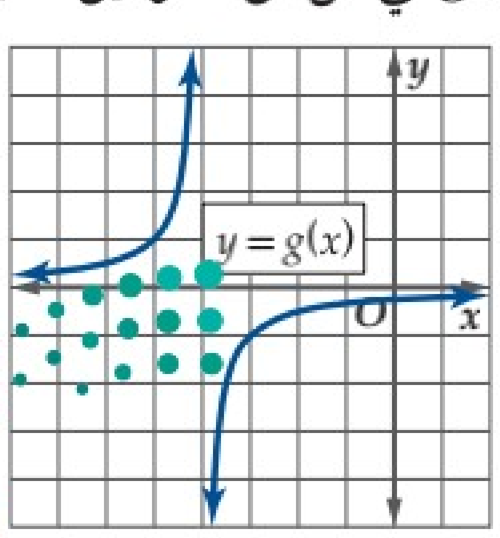
✓ تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A



(3B



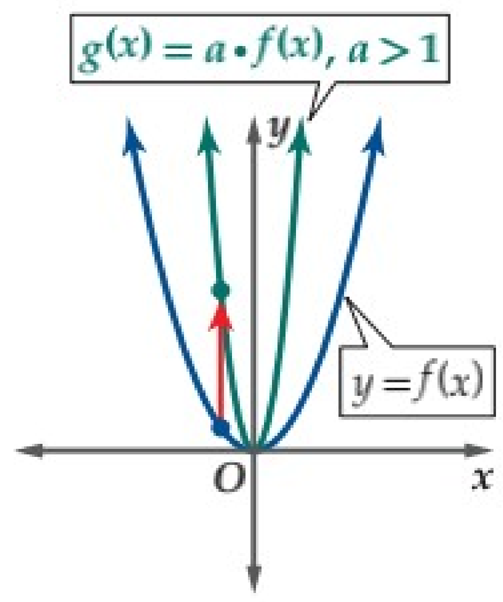
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

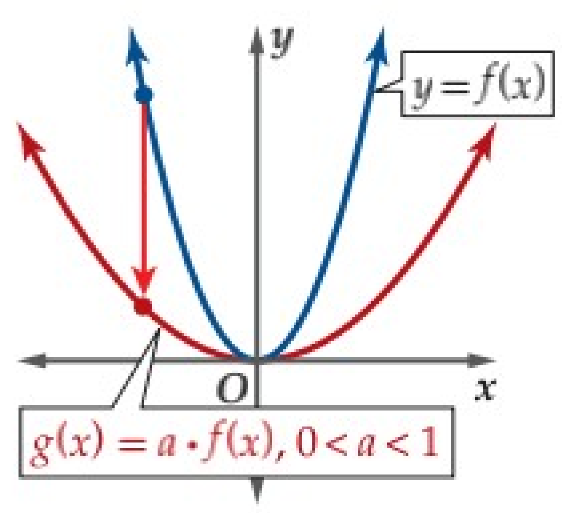
مفهوم أساسي — التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$

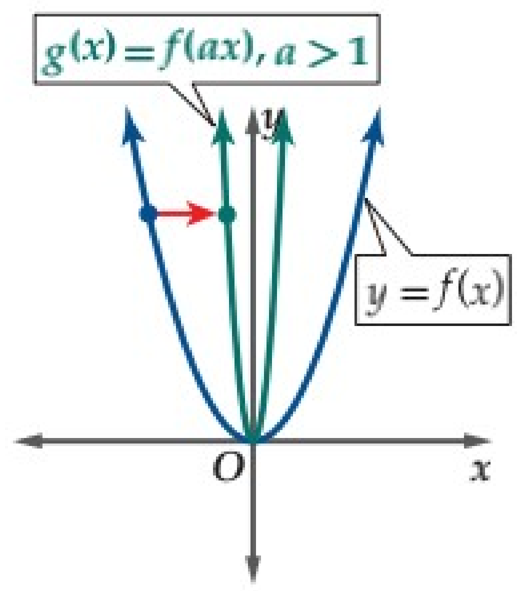


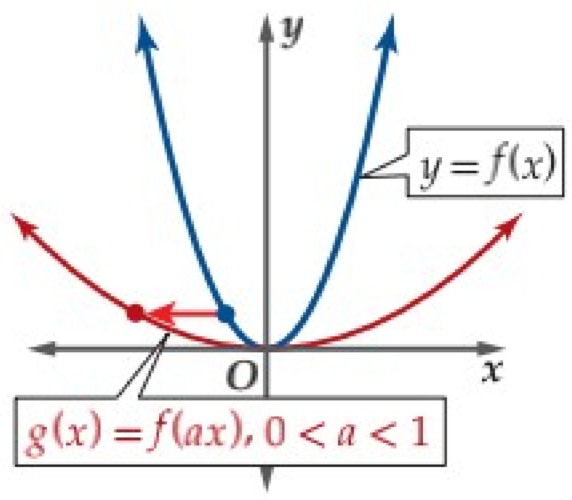


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$



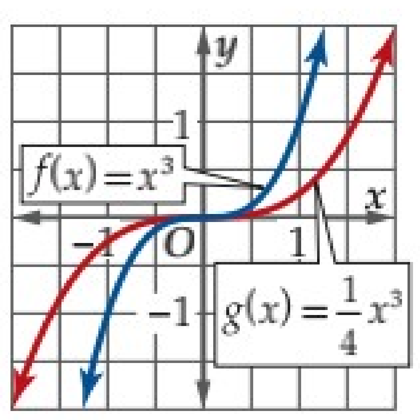


مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

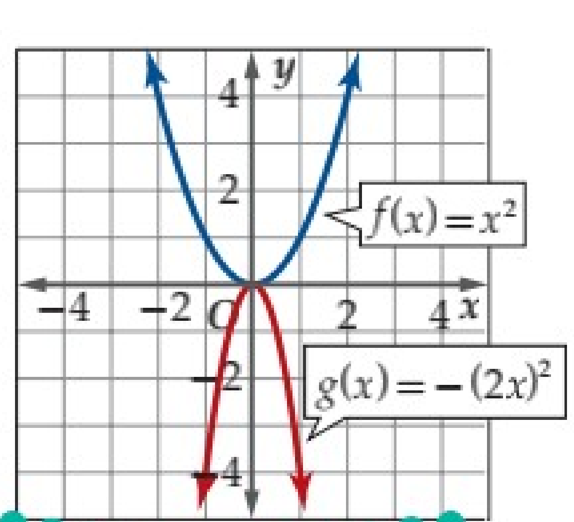
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$ ؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولًا؛ لأن $f(x) = x^2, f(2x) = (2x)^2$ وَ $2 > 1$، ثم انعكاس حول المحور x؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$



✓ تحقق من فهمك

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

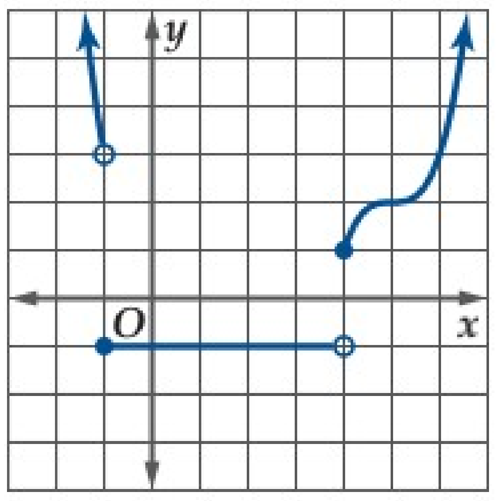
4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا باستعمال التحويلات الهندسية التي درستها .

> **إرشادات للدراسة**
>
> **التمدد:**
> يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

مـثـال 5 تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًا

مثّل الدالة بيانيًا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \ x < -1 \\ -1 & , \ -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \ x \ge 4 \end{cases}$.



في الفترة $(-\infty, -1)$، أمثّل الدالة $y = 3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y = -1$.

في الفترة $[4, \infty)$ أمثّل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.

تحقق من فهمك

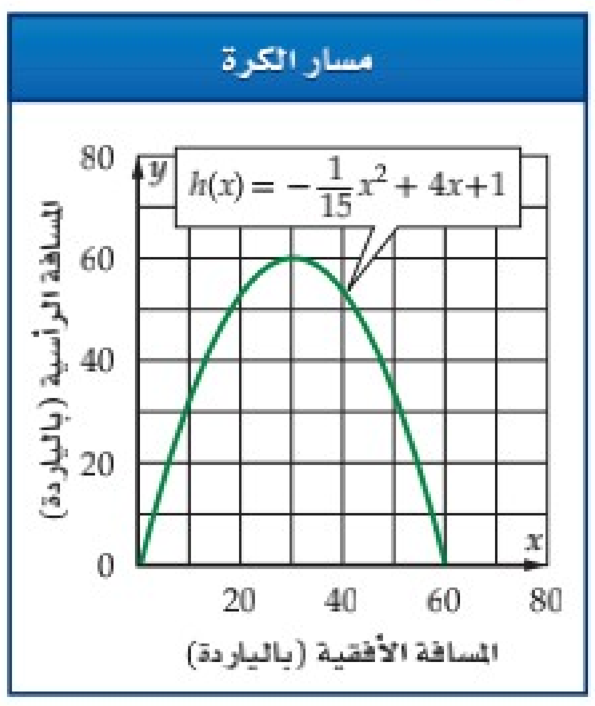
5A) $g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \ x \le 0 \\ x^3 & , \ 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \ x > 2 \end{cases}$

5B) $h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & , \ x < -5 \\ 7 & , \ -5 \le x \le 2 \\ |4 - x| & , \ x > 2 \end{cases}$

يمكنك استعمال التحويلات الهندسية التي تعلمتها على الدوال التي تمثّل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة التحويلات الهندسية على الدوال

كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



الربط مع الحياة

تأسس الاتحاد العربي السعودي لكرة القدم عام 1956 م، وقد انضم إلى الفيفا والاتحاد الآسيوي في العام نفسه.

أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x-h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

$$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1 \quad \text{الدالة الأصلية}$$

$$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1 \quad \text{حلّل } -\frac{1}{15}x^2 + 4x$$

$$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900) \quad \text{أكمل المربع}$$

$$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 + 61 \quad \text{اكتب } x^2 - 60x + 900 \text{ على صورة مربع كامل ثم بسّط}$$

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

تحقق من فهمك

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

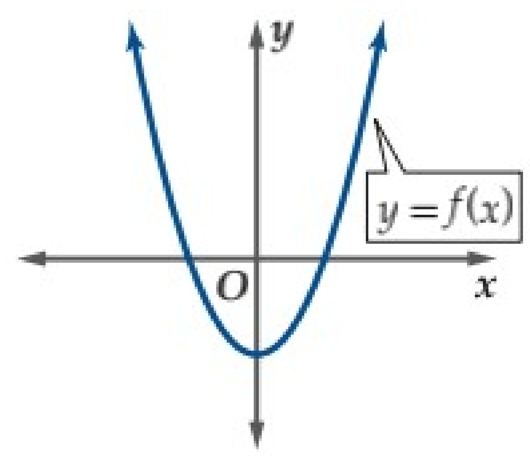
B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

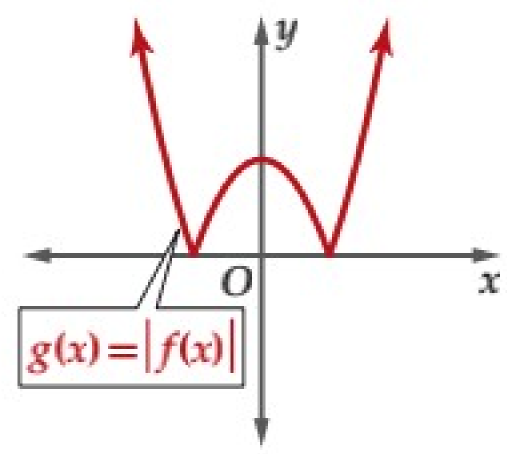
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي — التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

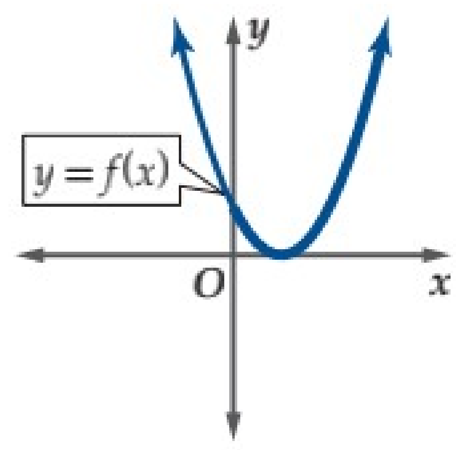
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

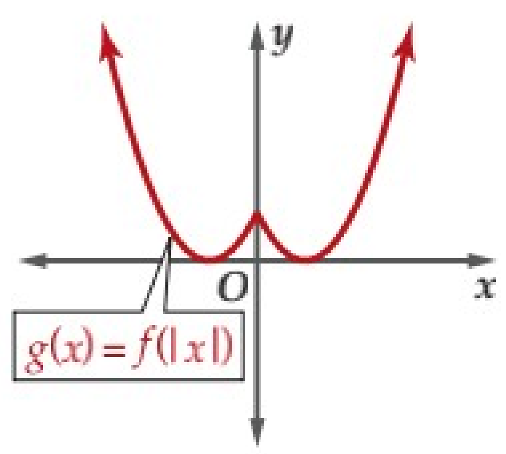




$g(x) = f(|x|)$

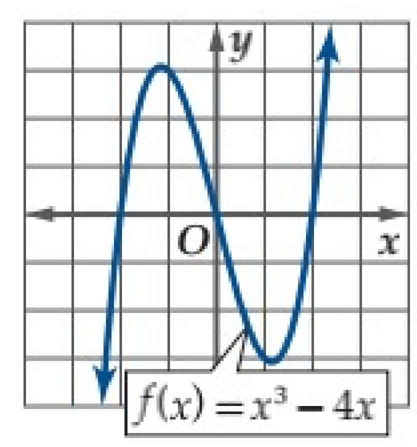
يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





إرشاد تقني

تحويلات القيمة المطلقة يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الحاسبة البيانيّة. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .



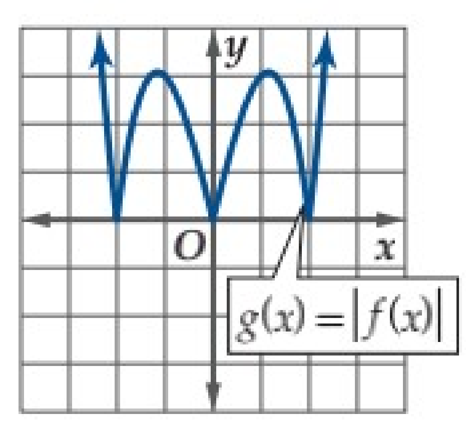
الشكل 1.5.6

مثال 7 — وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

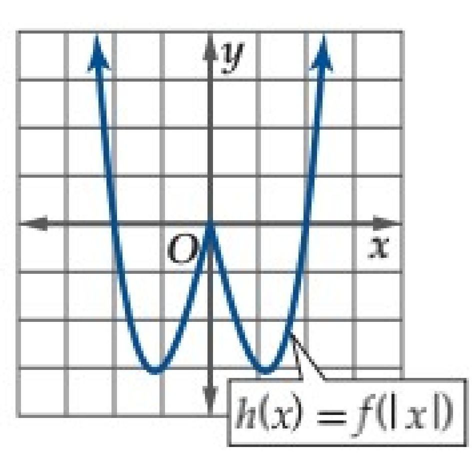
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

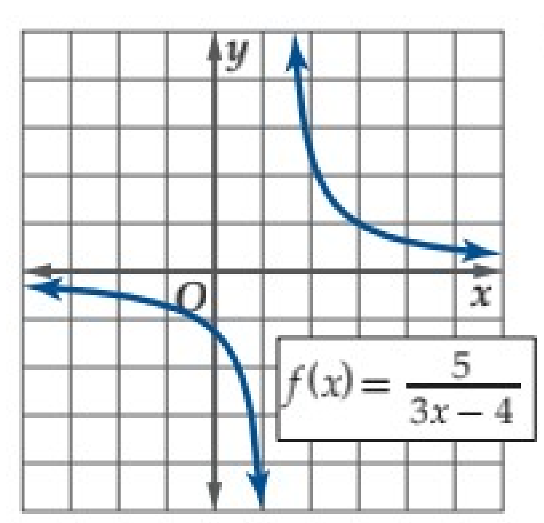
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



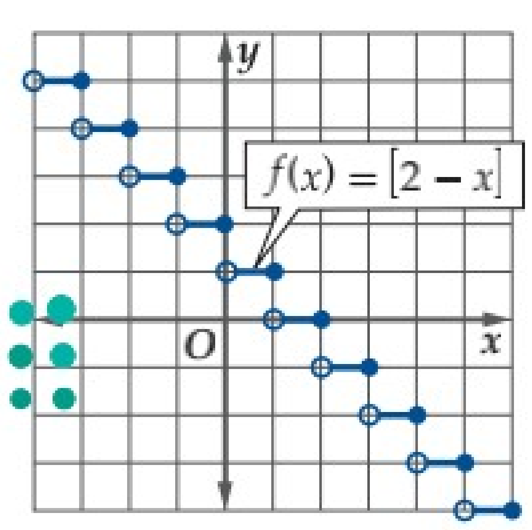
✓ تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

7A)



7B)



تدرب وحل المسائل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: **(مثال 1)**

1) $f(x) = [x]$ 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 3) $f(x) = x^3$

4) $f(x) = x^2$ 5) $f(x) = c$ 6) $f(x) = x$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: **(مثال 2)**

7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

8) $g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$

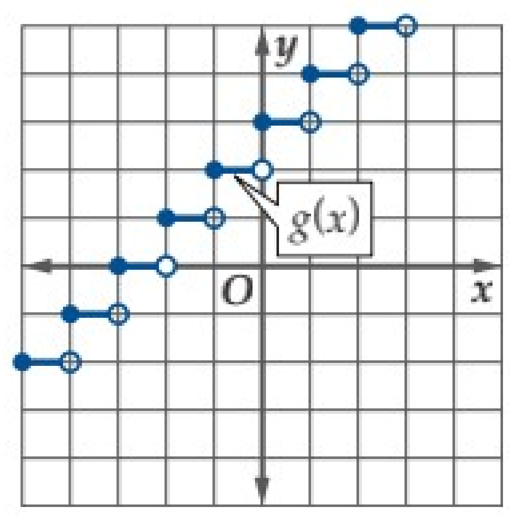
استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: **(مثال 2)**

9) $g(x) = \frac{1}{x} + 4$

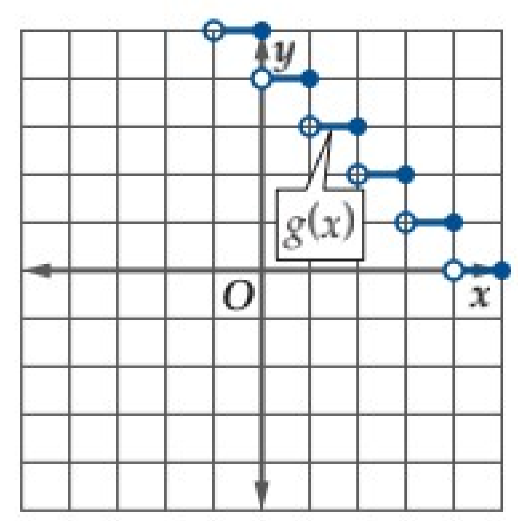
10) $g(x) = \frac{1}{x + 7} - 4$

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. **(مثال 3)**

11)

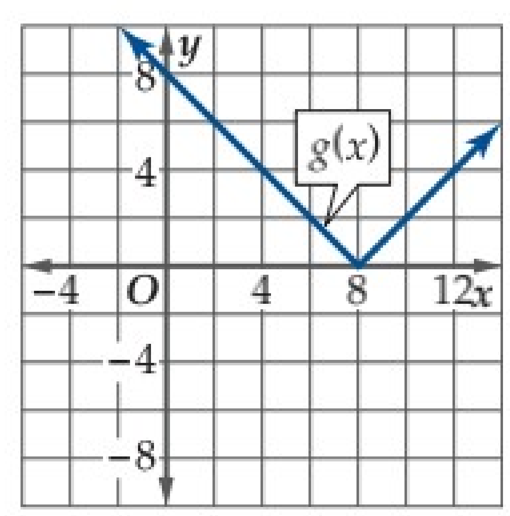


12)

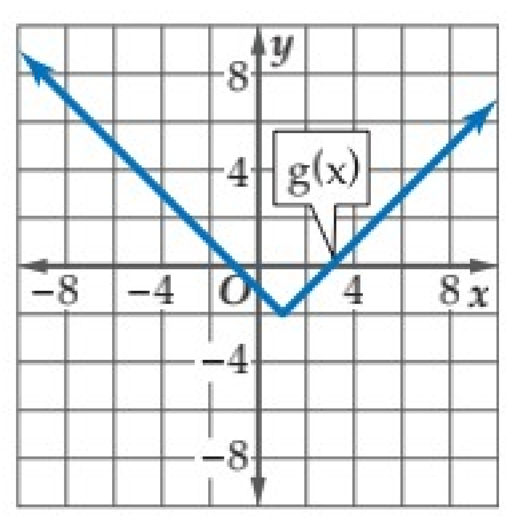


صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: **(مثال 3)**

13)



14)



اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما في مستوى إحداثي واحد. **(مثال 4)**

15) $g(x) = 3|x| - 4$ 16) $g(x) = 3\sqrt{x + 8}$

17) $g(x) = \frac{4}{x + 1}$ 18) $g(x) = 2[x - 6]$

19) $g(x) = \frac{1}{6x} + 7$ 20) $g(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{4}$

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًّا: **(مثال 5)**

21) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ 3 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x - 5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$

22) $g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < -6 \\ \frac{1}{x} & , \quad -6 \le x < 4 \\ 6 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$

23) $h(x) = \begin{cases} |x - 5| & , \quad x < -3 \\ 4x - 3 & , \quad -1 \le x < 3 \\ \sqrt{x} & , \quad x \ge 4 \end{cases}$

24) $g(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5 & , \quad -1 \le x < 1 \\ [x] + 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$

25) **أسعار:** يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ عام 1411هـ حتى 1431هـ . استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. **(مثال 5)**

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55

26) **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2\,[x]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. **(مثال 6)**

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [x]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًّا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟

27) **فيزياء:** إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x) = 4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر . **(مثال 6)**

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$.

b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x) = 2x^2$، فمثِّل بيانيًّا كلًّا من الدالتين على المستوى نفسها باستعمال الحاسبة البيانية.

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|, h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: **(مثال 7)**

28) $f(x) = \frac{2}{x}$

29) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

30) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 5$

31) $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$

اكتب الدالة الناتجة عن إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32) $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى أعلى، و7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2

33) $f(x) = [x]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى أسفل، وتوسع رأسي معامله 3

فيزياء: **إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:**

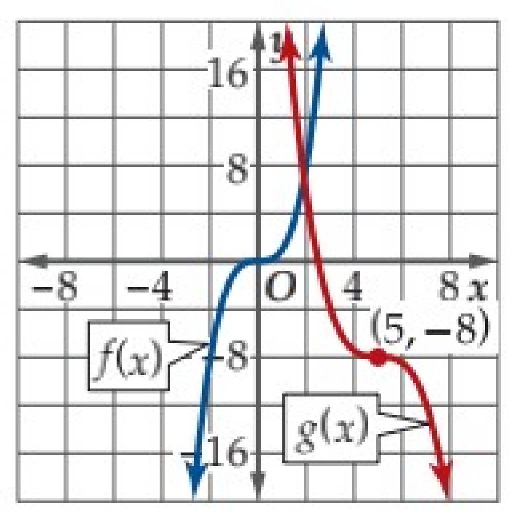
34) $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$

35) $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$

36) $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

37) $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$

38) اكتب معادلة الدالة $g(x)$ إذا علمت أن منحناها ناتج عن عدة تحويلات هندسية لمنحنى الدالة $f(x)$، وأحد هذه التحويلات هو تضييق رأسي معامله 0.5.



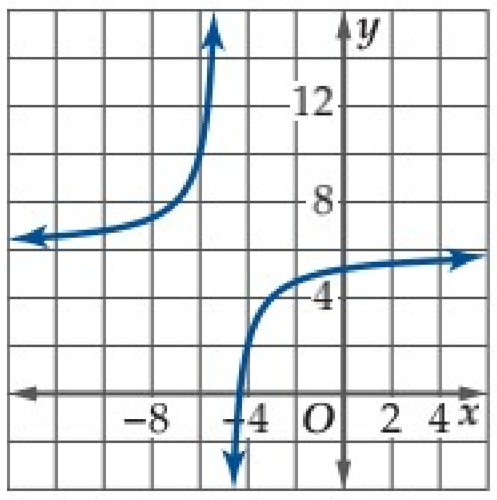
39) **تسوق:** توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطى عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح، $x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع.

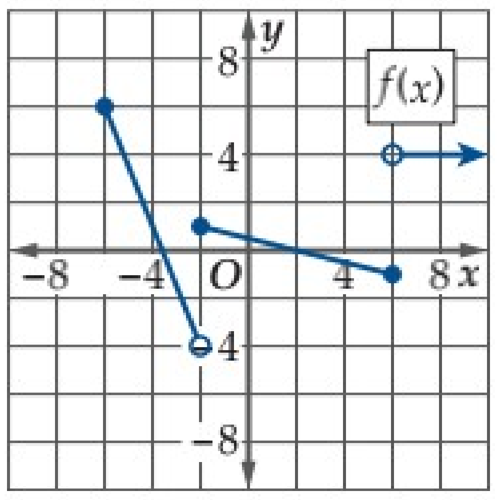
b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء.

c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع.

40) اكتب دالة تمثّل المنحنى المرسوم:



استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:



41) $g(x) = 0.25f(x) + 4$

42) $g(x) = 3f(x) - 6$

43) $g(x) = f(x - 5) + 3$

44) $g(x) = -2f(x) + 1$

استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

45) $g(x) = 2f(x) + 5$

46) $g(x) = -3f(x) + 6$

47) $g(x) = f(4x) - 5$

48) $g(x) = f(2x + 1) + 8$

49) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًّا:** اختر ثلاث قيم لـ a، وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$

b) **لفظيًّا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

c) **جبريًّا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

50) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [x + 4]$. فقال محمد: أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار. وقال عبد الملك: إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى أعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

51) **تبرير:** إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y، فما العلاقة بين $f(x)$, $h(x)$؟ برِّر إجابتك.

تبرير: **تحقّق ما إذا كانت كل من الجملتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة. وبرِّر إجابتك.**

52) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x) = |f(x)|$

53) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(-x) = -|f(x)|$

54) **تحدّ:** صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للوصول إلى دالة يمر منحناها بالنقطة $(-2, -6)$.

55) **تبرير:** وضِّح الفرق بين التوسع الرأسي بمعامل مقداره 4، والتوسع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

56) **اكتب:** وضح أهمية الترتيب في تحويلات الانعكاس والانسحاب.

مراجعة تراكمية

أوجد متوسط معدل التغير لكلٍّ من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

57) $g(x) = -2x^2 + x - 3, [-1, 3]$

58) $g(x) = x^2 - 6x + 1, [4, 8]$

59) $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4, [-2, 3]$

حدِّد سلوك طرف التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية عندما تقترب x من ما لانهاية، مستعملًا التبرير المنطقي، وبرِّر إجابتك. (الدرس 1-3)

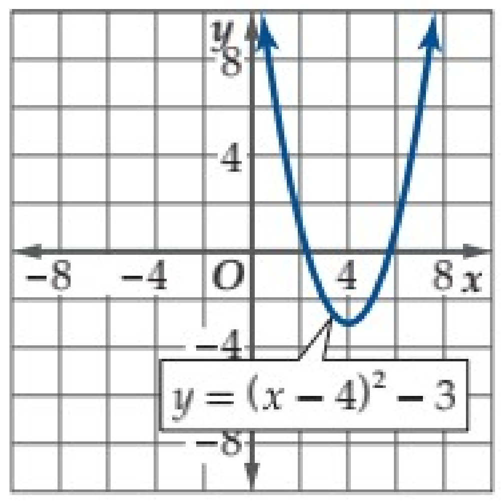
60) $q(x) = -\frac{12}{x}$

61) $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$

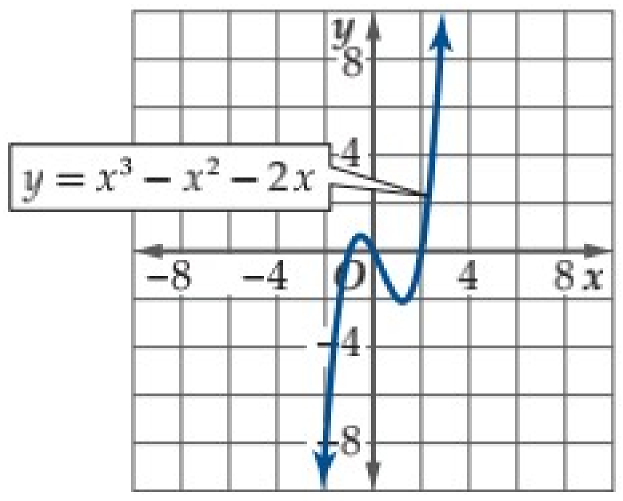
62) $p(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير قيمة كلٍّ من: المقطع y، والأصفار، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس 1-2)

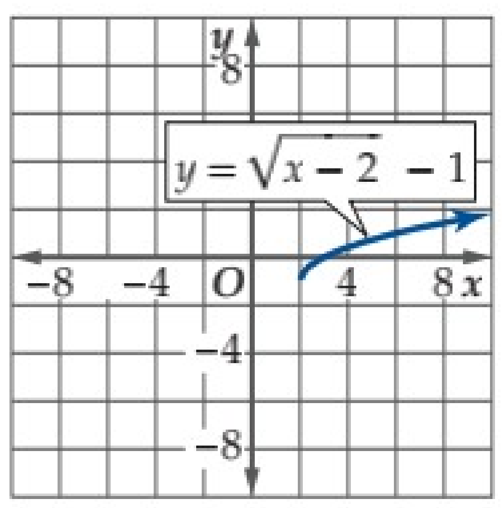
63)



64)

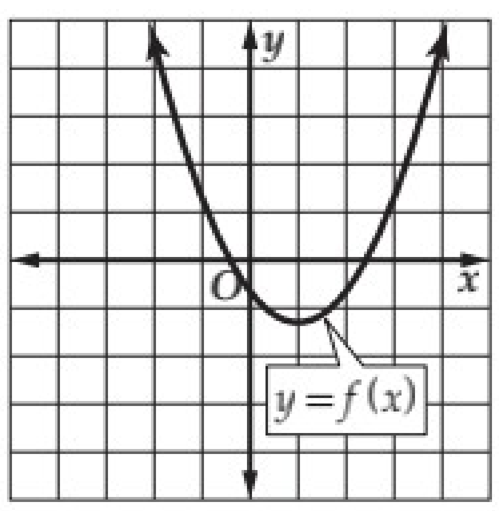


65)



تدريب على اختبار

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2 + 8}{2}$؟

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

1-6

العمليات على الدوال وتركيب دالتين
Function Operations and Composition of Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال.

(الدرس 1-1)

والآن:

- أُجري العمليات على الدوال.
- أجِدُ تركيب الدوال.

المفردات:

تركيب الدالتين
composition of functions

لماذا؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الملك سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

العمليات على الدوال: ستتعلمُ في هذا الدرس إجراءَ العمليات الأربع على الدوال.

مفهوم أساسي العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال 1 العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = 3x - 5$ ، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 4x) + \left(\sqrt{x+2}\right)$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$ ؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g ، وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2 + 4x) - (3x - 5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$،
لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$
$$= (x^2 + 4x)(3x - 5)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x$$
$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛
لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$
ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0 , x \neq -4, x \in R\}$.

تحقق من فهمك

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \bullet g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

(1A $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(1B $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين:
يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

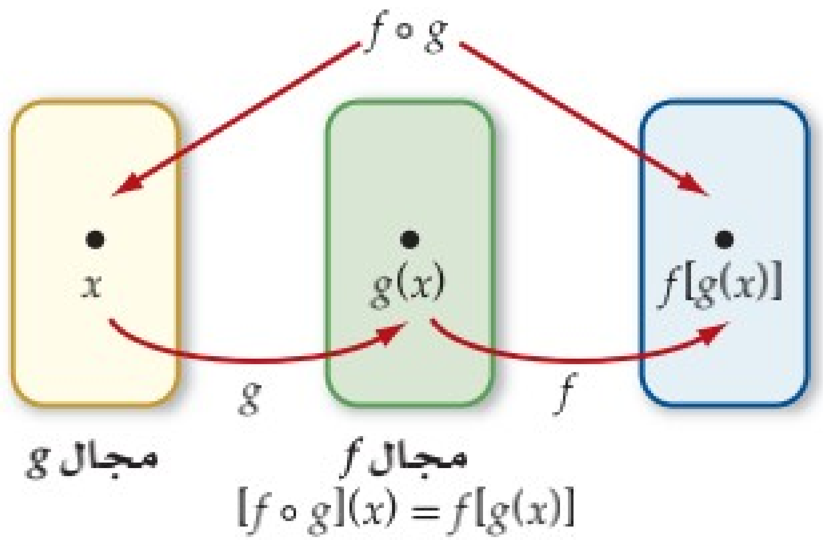
تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف **تركيب الدالتين** f وَ g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

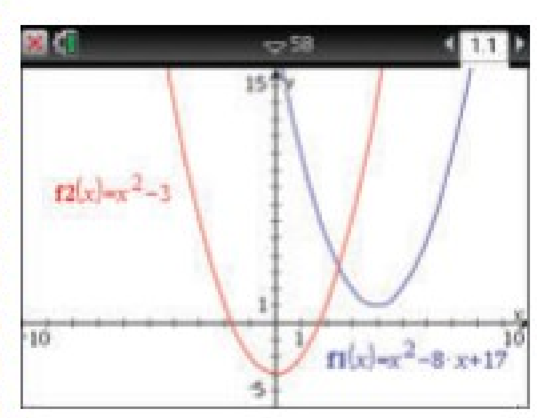
ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيثُ تُطبَّقُ الدالة g أولًا ثم الدالة f.

تنبيه!

ترتيب الدوال عند التركيب
في معظم الأحيان $f \circ g$، $g \circ f$ دالتان مختلفتان. بمعنى آخر إن تركيب الدوال ليس إبداليًا. ففي المثال 2
$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$
لكن $[g \circ f](x) = x^2 - 3$ وهما دالتان مختلفتان. والتمثيل البياني أدناه يبيّن ذلك.



مثال 2 — تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(a $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x - 4)$	$g(x) = x - 4$
$= (x - 4)^2 + 1$	عوّض $(x-4)$ بدلًا من x في $f(x)$
$= x^2 - 8x + 16 + 1$	بسّط
$= x^2 - 8x + 17$	

(b $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف $g \circ f$
$= g(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 + 1$
$= (x^2 + 1) - 4$	عوّض (x^2+1) بدلًا من x في $g(x)$
$= x^2 - 3$	بسّط

(c $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع **a** عندما $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ عوّض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

بما أن مجال كل من f, g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \qquad \text{تعريف } f \circ g$$

$$= f(x^2 - 9) \qquad g(x) = x^2 - 9$$

$$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8} \qquad \text{عوّض } (x^2 - 9) \text{ بدلًا من } x \text{ في } f(x)$$

لاحظ أن $\dfrac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \dfrac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

b) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$، ونطرح منها 2. لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] \qquad \text{تعريف } f \circ g$$

$$= f(\sqrt{x - 3}) \qquad g(x) = \sqrt{x - 3}$$

$$= (\sqrt{x - 3})^2 - 2 \qquad \text{عوّض } \sqrt{x - 3} \text{ بدلًا من } x \text{ في } f(x)$$

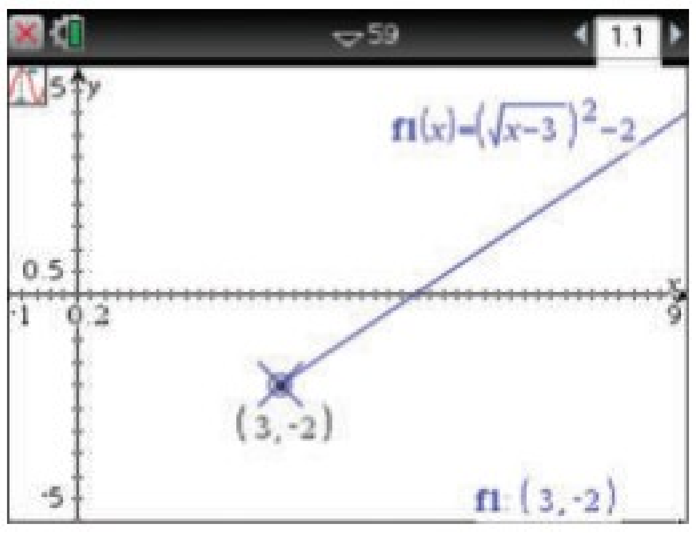
$$= x - 3 - 2 = x - 5 \qquad \text{بسّط}$$

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين: من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

التحقق: استعمل الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة. أدخل الدالة $f1(x) = (\sqrt{x-3})^2 - 2$. فيظهر التمثيل جزءًا من المستقيم $y = x - 5$. استعمل الإمكانات المتاحة في الحاسبة البيانيّة بالضغط على مفتاح (menu)، ثم على 5: تتبع المسار ، واختر منها 1: تتبع مسار التمثيل ؛ لمساعدتك على تحديد مجال $f \circ g$ والذي يبدأ عند $x = 3$ ويمتد إلى ∞ .



تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \sqrt{x+1}\ , g(x) = x^2 - 1$

3B) $f(x) = \frac{5}{x}\ , g(x) = x^2 + x$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h ، فإنك تجد دالتين (f, g مثلًا) بحيث يكون تركيبهما هو h .

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين f , g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x + 5$ ، وعندئذٍ:

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

لاحظ أن الدالة h يمكن أن تكتب كتركيب دالتين f, g حيث يمكن اختيار $g(x) = -7x$ ، وكتابة: $h(x) = \sqrt{-7x} - 9\frac{(-7x)}{7}$ ، وعندئذ: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9}{7}$

$$h(x) = \sqrt{-7x} - 9\frac{(-7x)}{7} = \sqrt{g(x)} - 9\frac{g(x)}{7} = f(g(x)) = [f \circ g](x)$$

تحقق من فهمك

4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

4B) $h(x) = \frac{1}{x+7}$

إرشادات للدراسة

كتابة الدالة كتركيب دالتين:
في المثال 4a، يمكنك إيجاد دالتين أخريين غير $g(h) = x + 5, f(x) = 2x^2$ بحيث إن: $h(x) = [f \circ g](x)$، وكذلك الأمر بالنسبة للفرع 4b

يمكنك استعمال تركيب دالتين لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية: **تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.**

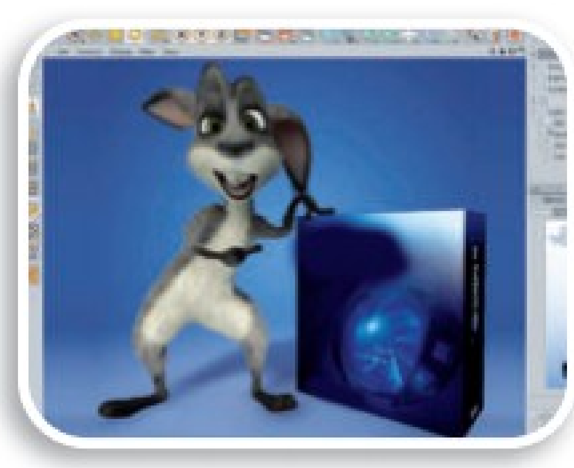
a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L ، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$. أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L(L + 40) = L^2 + 40L$ ، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$ ، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$	تعريف $A \circ L$
$= A(20 + 15t)$	$L(t) = 20 + 15t$
$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$	عوّض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$
$= 225t^2 + 1200t + 1200$	بسّط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن.



الربط مع الحياة

مؤثرات حركية
يعمل المصممون في العديد من الأعمال لتصميم مؤثرات حركية تستعمل في التلفاز وألعاب الفيديو؛ لذا يجب أن يكون مصممو الألعاب فنانين، ويتلقى أغلبهم تدريبًا في كليات متخصصة.

c) **كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟**

مساحة المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $3600 = [A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d.

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1)

1) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = 8 - x^3$, $g(x) = x - 3$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$, $g(x) = x + 2$

4) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 9x$

5) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$

6) $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = x^3 + x$

7) $f(x) = \frac{x}{4}$, $g(x) = \frac{3}{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = 4\sqrt{x}$

9) $f(x) = \sqrt{x+8}$, $g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

10) $f(x) = \sqrt{x+6}$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](6)$ لكل زوج من الدوال الآتية. (مثال 2)

11) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 4x - 8$

12) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$, $g(x) = -5x + 6$

13) $f(x) = x^2 - 16$, $g(x) = x^2 + 7x + 11$

14) $f(x) = 2 + x^4$, $g(x) = -x^2$

حدِّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3)

15) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 4$

16) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $g(x) = x^2 + 6$

17) $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = x^2 - 4$

18) $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = \sqrt{6-x}$

19) $f(x) = -\frac{4}{x}$, $g(x) = \sqrt{x+8}$

20) $f(x) = \sqrt{x+5}$, $g(x) = x^2 + 4x - 1$

21) **النظرية النسبية:** في النظرية النسبية $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية، و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية، وكتلته الأصلية 100 kg. (مثال 4)

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد $m(10), m(10000), m(1000000)$.

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تقترب v من c من اليسار.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد دالتين g , f لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، على ألا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$. (مثال 4)

22) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

23) $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

24) $h(x) = |4x+8| - 9$

25) $h(x) = [-3(x-9)]$

26) $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

27) $h(x) = (\sqrt{x}+4)^3$

28) $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

29) $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

30) **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته $m\,\text{kg}$ ، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$ ، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$.

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته.

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h.

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

31) **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افترض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5)

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة.

أوجد دالتين f, g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$.

32) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

33) $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

34) $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

أوجد $f(x+1)$, $f(-6)$, $f(0.5)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك:

35) $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6,\ g(x) = x + 4$

36) $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3},\ g(x) = 2x$

37) $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x},\ g(x) = \sqrt{1-x}$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ في كل مما يأتي:

38) $f(x) = x + 8$

$g(x) = x^2 - 6$

$h(x) = \sqrt{x} + 3$

39) $f(x) = \sqrt{x+5}$

$g(x) = x^2 - 3$

$h(x) = \frac{1}{x}$

40) إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

a) $(f+g)(x) = x^2 + x + 6$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$

41) إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$ ، فأوجد $g(x)$ في كلِّ حالة مما يأتي:

a) $[f \circ g](x) = |6x|$

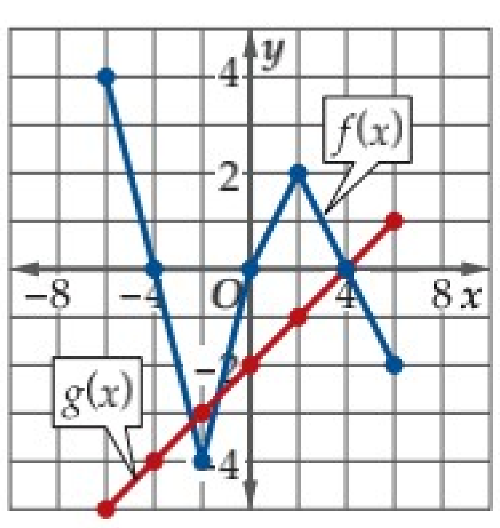
b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$

42) إذا كان $f(x) = 4x^2$ ، فأوجد $g(x)$ في كلِّ حالة مما يأتي:

a) $[f \cdot g](x) = x$

b) $[f \cdot g](x) = 4x$

باستعمال منحنيـي الدالتين $f(x)$, $g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



43) $(f+g)(2)$

44) $(f-g)(-6)$

45) $(f \cdot g)(4)$

46) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

47) $(f \circ g)(-4)$

48) $(g \circ f)(6)$

49) **كيمياء:** إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة $30°C$ بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m)=\sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$ ، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول.

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟فسِّر معناها.

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة $30°C$.

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد ثلاث دوال f, g, h ، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

50) $a(x) = (\sqrt{x-7}+4)^2$

51) $a(x) = \sqrt{(x-5)^2+8}$

52) $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2+4}$

53) $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x}+3)^2+1}$

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة:

54) $f(x) = x^2-6x+5$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}+3$

55) $f(x) = \sqrt{x+6}$ ، $g(x) = \sqrt{16+x^2}$

56) $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

57) $f(x) = \frac{6}{2x+1}$ ، $g(x) = \frac{4}{4-x}$

58) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

a) **جبريًّا:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

b) **لفظيًّا:** صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

c) **بيانيًّا:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم محور الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.

d) **لفظيًّا:** خمّن معادلة محور الانعكاس.

e) **تحليليًّا:** ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$؟

f) **تحليليًّا:** أوجد $g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

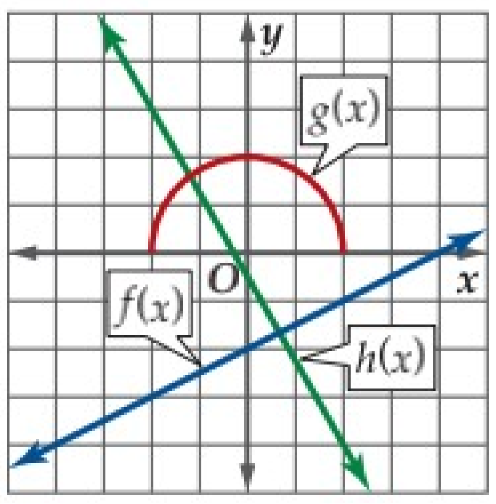
a) $f(x) = x-6$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$

c) $f(x) = x^5$

d) $f(x) = 2x-3$

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 59 مثِّل الدوال $f, h, f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 62-60:



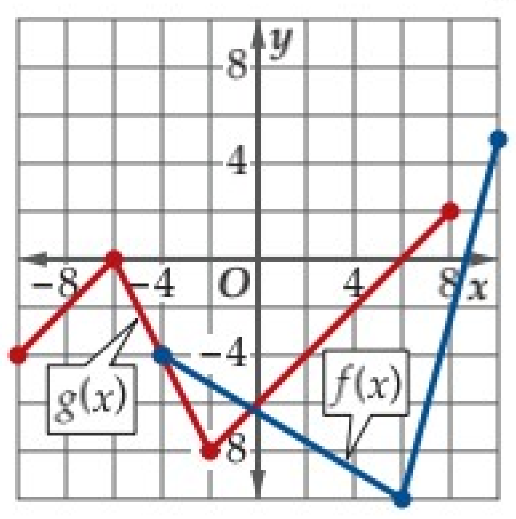
59) $(f+h)(x)$

60) $(h-f)(x)$

61) $(f+g)(x)$

62) $(h+g)(x)$

حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



63) $(f \circ g)(x)$

64) $(g \circ f)(x)$

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.

65) f, g دالتان فرديتان.

66) f, g دالتان زوجيتان.

67) f زوجية، g فردية.

68) f فردية، g زوجية.

تحدٍّ: في كلٍّ مما يأتي، أوجد دالة f لا تساوي الدالة $I(x) = x$ بحيث تحقق الشرط المعطى.

69) $(f \cdot f)(x) = x$

70) $(f + f)(x) = x$

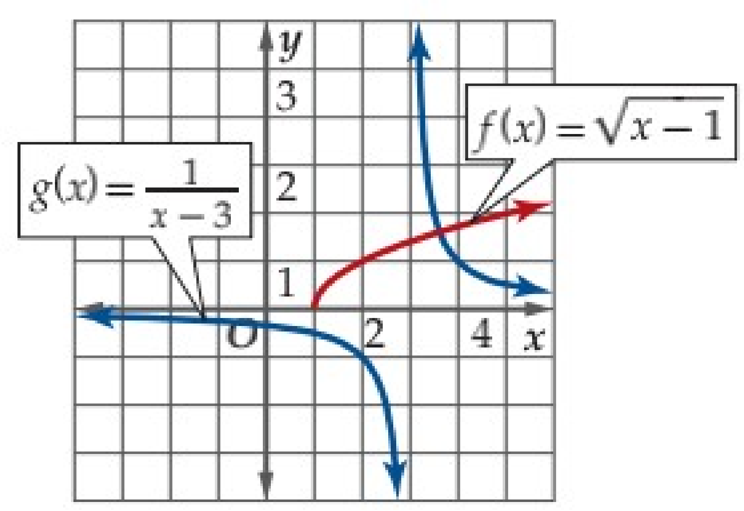
71) $[f \circ f](x) = x$

72) $[f \circ f \circ f](x) = x$

73) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرّر إجابتك.

"إذا كانت f دالة جذر تربيعي و g دالة تربيعية، فإن $f \circ g$ هي دائمًا دالة خطية".

74) **اكتب:** كيف تحدد مجال الدالة $[f \circ g](x)$ باستعمال الشكل الآتي:



مراجعة تراكمية

أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكلٍّ من الدوال الآتية مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة، ثم حدّد قيم x التي تقع عندها هذه القيم: (الدرس 1-4)

75) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

76) $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

77) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1-3)

78) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 4}, [-3, 3]$

79) $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x}, [1, 5]$

80) **علاقة:** في إحصائية أجريت لعدد الموظفين من الجنسين في أحد المستشفيات لعدة سنوات متتالية، كانت نتائجها كما في الجدول الآتي: (الدرس 1-1)

السنة	1427	1428	1429	1430	1431
عدد الإناث (x)	43	48	54	54	48
عدد الذكور (y)	150	148	137	156	146

a) مثّل البيانات التي تربط عدد الإناث بعدد الذكور والموجودة في الجدول بيانيًّا.

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.

c) هل تمثّل هذه العلاقة دالة؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

81) إذا كانت $h(x) = 2(x-5)^2$ ، $g(x) = x^2 + 9x + 21$ ، فإن $[h \circ g](x)$ تساوي:

A $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

B $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

C $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

D $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

82) إذا كان $f(2)=3, g(3)=2, f(3)=4, g(2)=5$، فما قيمة $[f \circ g](3)$؟

A 2

B 3

C 4

D 5

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

1-7

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Relations and Functions

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد تركيب دالتين.

(الدرس 6—1)

والآن:

- أستعملُ اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.
- أجِدُ الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

المفردات:

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

الدالة المتباينة
one-to-one function

لماذا؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

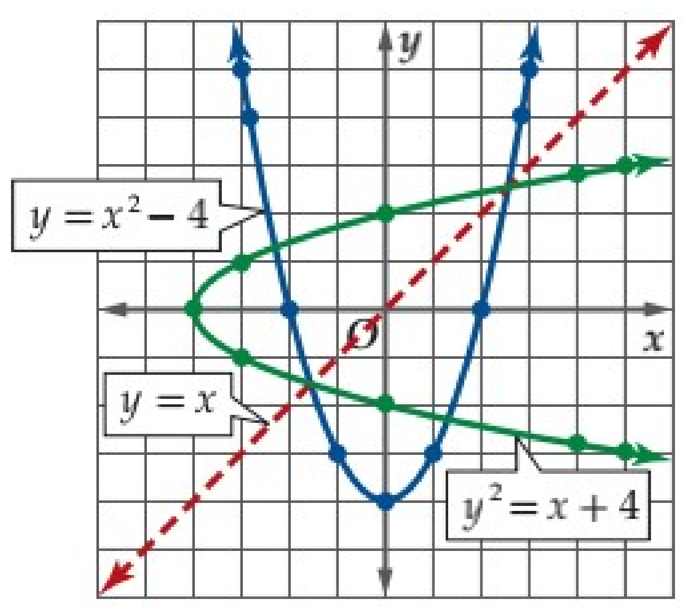
السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلًّا من العلاقتين A, B **علاقة عكسية** للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالَّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لـِ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1}.

لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

قراءة الرياضيات

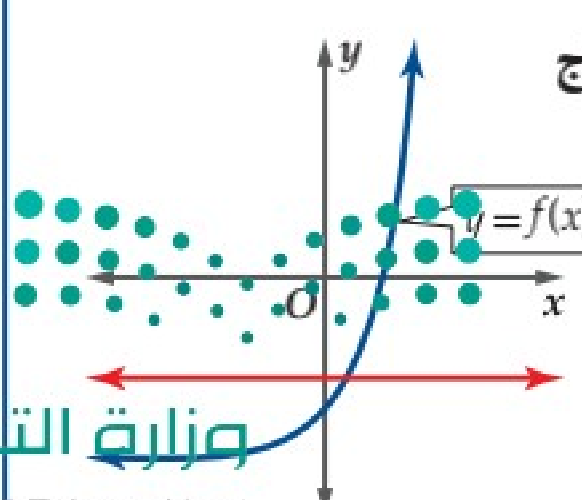
رمز الدالة العكسية: يجب ألا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

مفهوم أساسي — اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

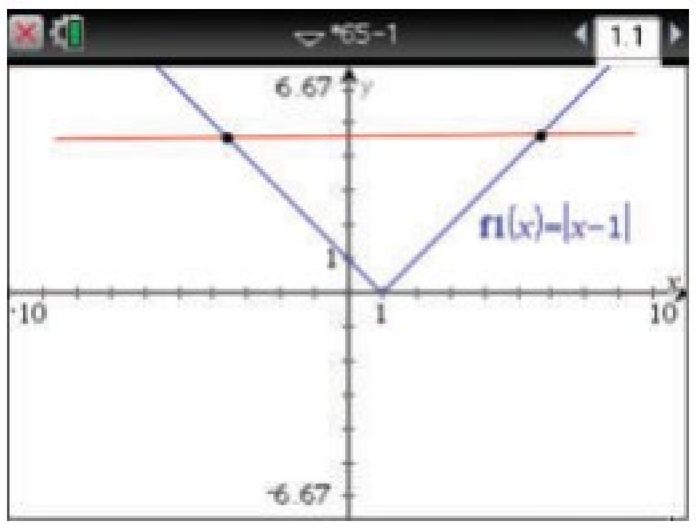
نموذج



مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

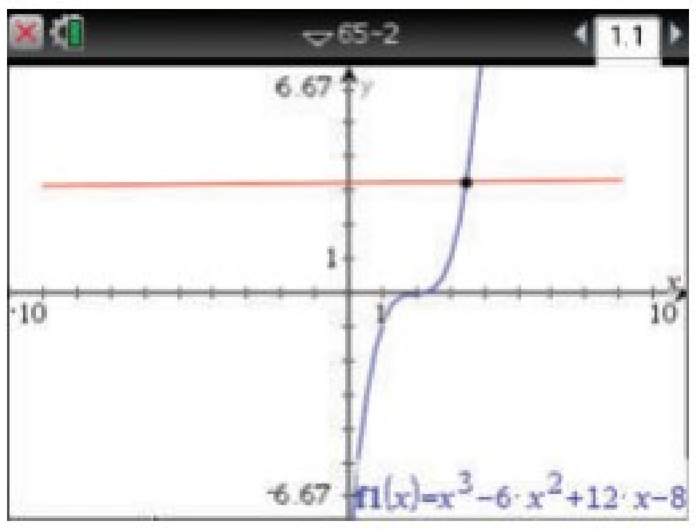
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x - 1|$



يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.

✓ تحقق من فهمك

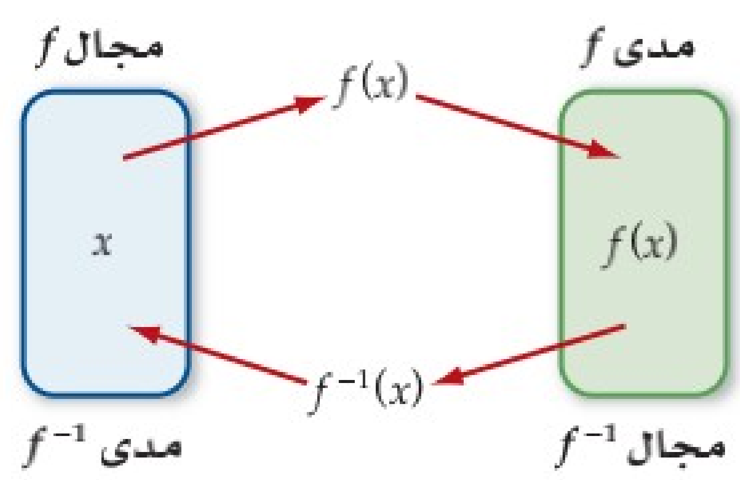
1A) $h(x) = \frac{4}{x}$ **1B)** $f(x) = x^2 + 5x - 7$

تنبيه!

اختبار الخط الأفقي عند استعمال الحاسبة البيانية، اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 3: تكبير أو 4: تصغير أو اضبط الشاشة للتأكد.

إيجاد الدالة العكسية: إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لِـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لِـ y، ولا توجد قيمة لِـ y ترتبط بأكثر من قيمة لِـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

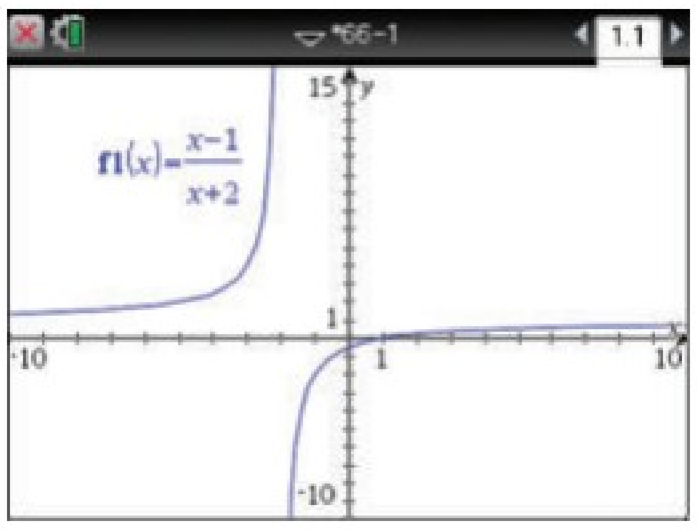
قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس: يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

مثال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًّا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

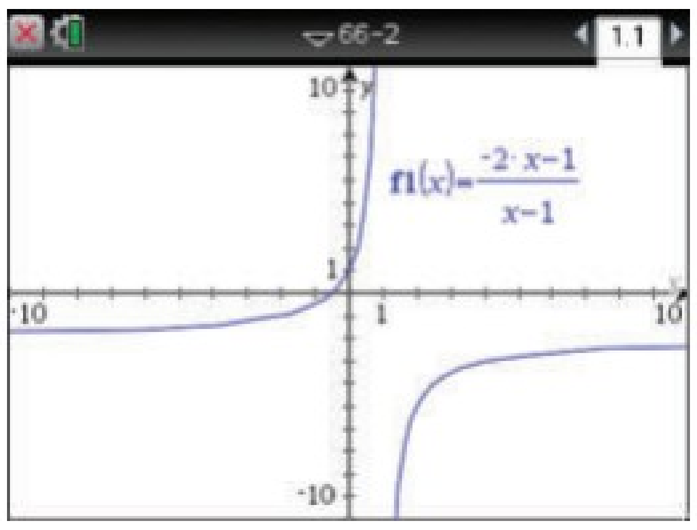
a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$



يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

والآن أوجد f^{-1}.

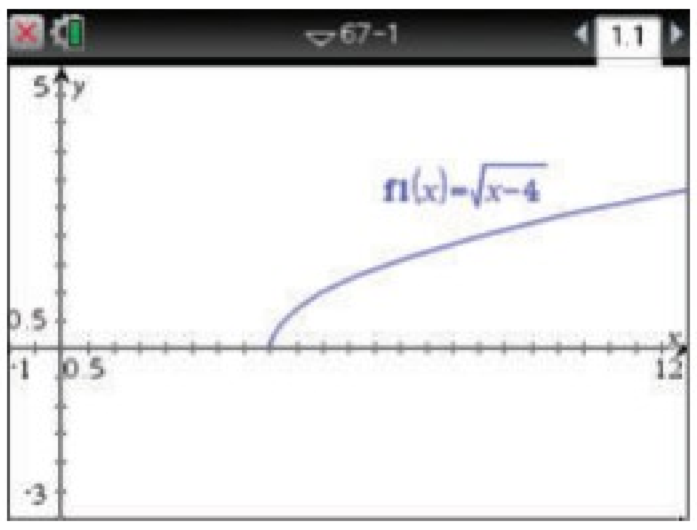
$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$	الدالة الأصلية
$y = \dfrac{x-1}{x+2}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \dfrac{y-1}{y+2}$	بدّل بين x, y
$xy + 2x = y - 1$	اضرب الطرفين في $(y+2)$، ثم طبق خاصية التوزيع
$xy - y = -2x - 1$	ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	حل بالنسبة لـ y
$f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y، لاحظ أن $x \neq 1$



يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.

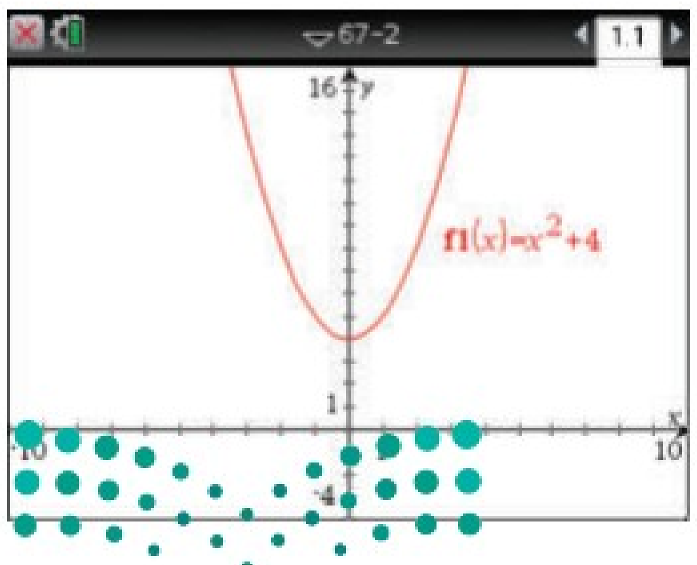
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1}.

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$



يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$	الدالة الأصلية
$y = \sqrt{x-4}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \sqrt{y-4}$	بدّل بين x وَ y
$x^2 = y - 4$	ربّع الطرفين
$y = x^2 + 4$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y



يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$، ومداها $[4, \infty)$. ومن ثم فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًّا لمدى f وهو $[0, \infty)$، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

✓ تحقق من فهمك

2A) $f(x) = -16 + x^3$ **2B)** $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$ **2C)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي **تركيب الدالة ودالتها العكسية**

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- **$f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.**
- **$f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.**

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

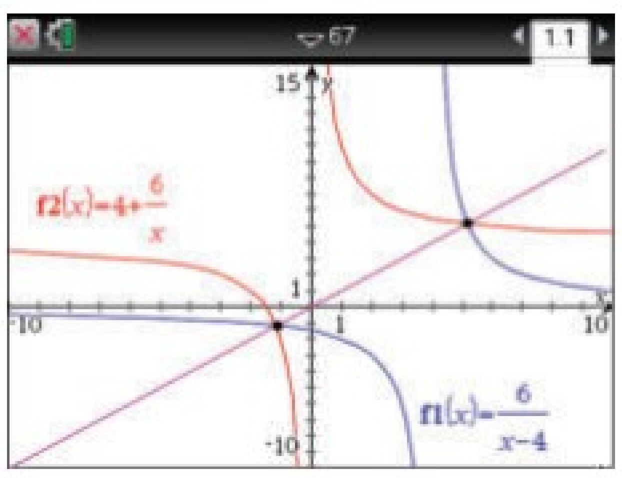
مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4} = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 = x - 4 + 4 = x$$



بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كلًّا من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(3A $f(x) = 18 - 3x\,,\, g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

(3B $f(x) = x^2 + 10\,,\, x \geq 0\,,\, g(x) = \sqrt{x - 10}$

من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

إرشادات للدراسة

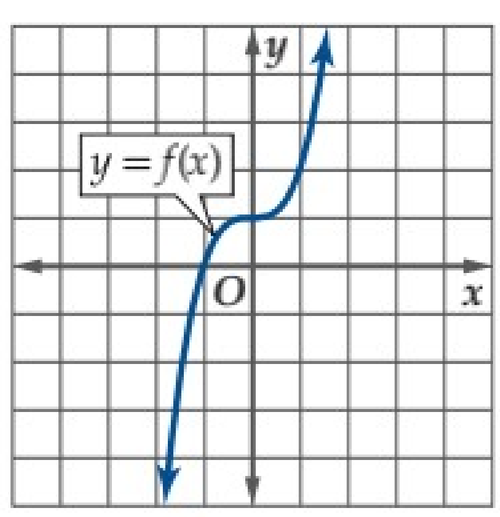
الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

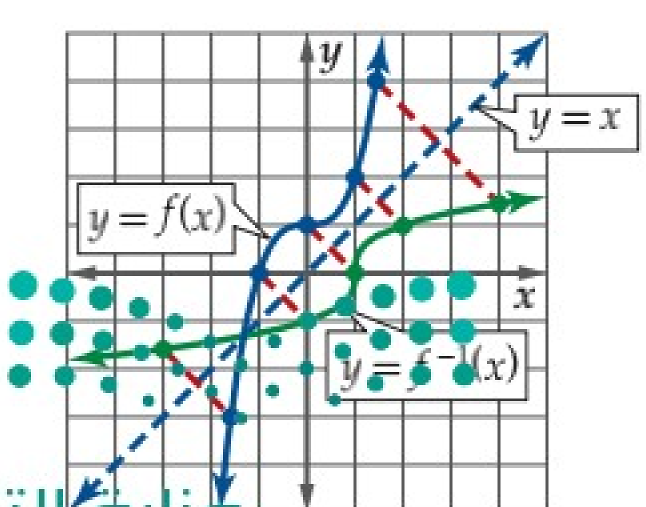
مثال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3

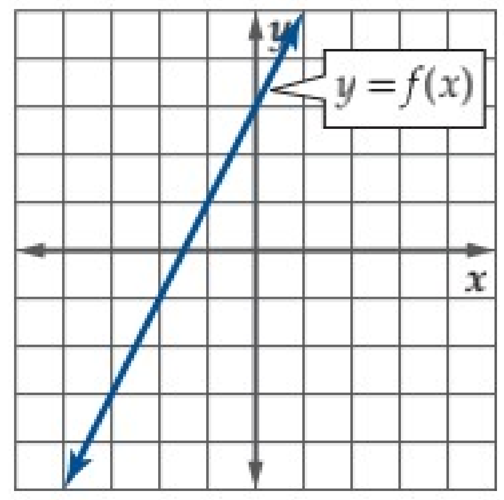


الشكل 1.7.4

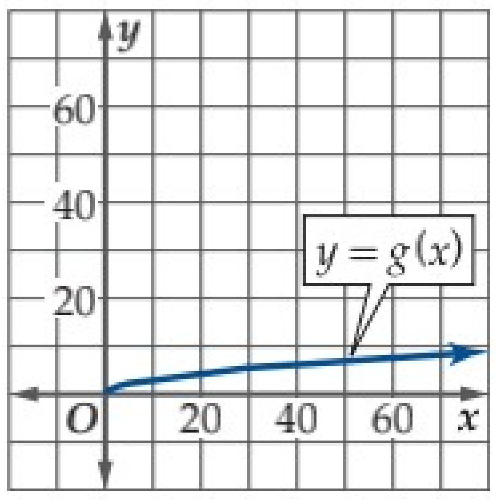
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا:

4A)



4B)

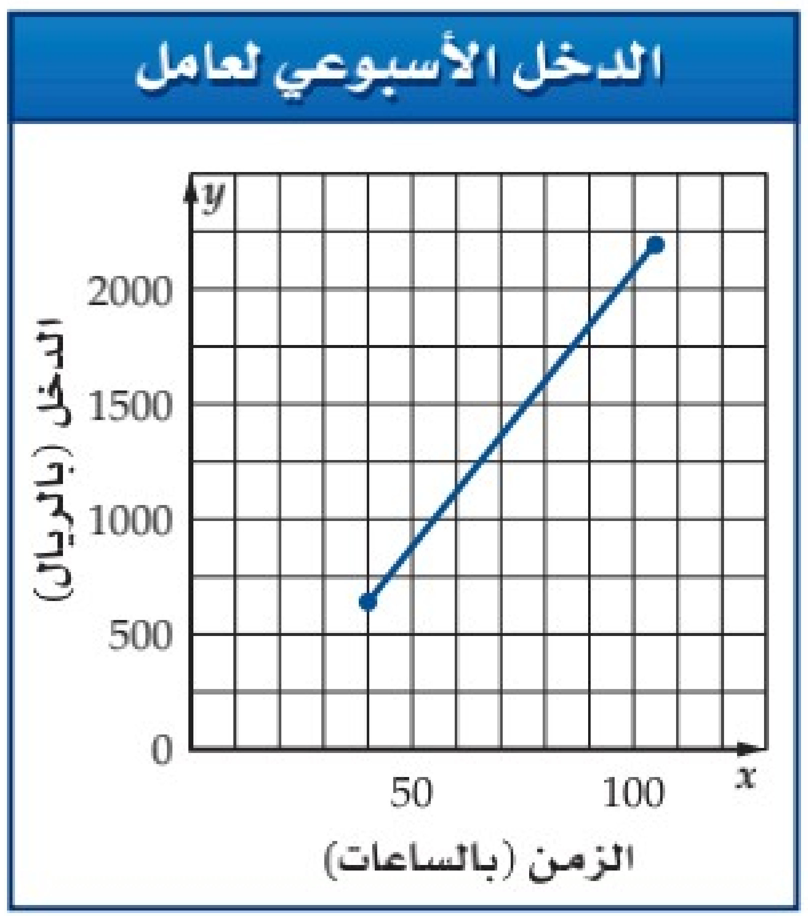


مثال 5 من واقع الحياة — استعمال الدالة العكسية

الربط مع الحياة

ينص نظام العمل في المملكة على أنه "لا يجوز تشغيل العامل تشغيلًا فعليًا أكثر من 8 ساعات في اليوم الواحد إذا اعتمد صاحب العمل المعيار اليومي، أو أكثر من 48 ساعة إذا اعتمد المعيار الأسبوعي".

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ 40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$ أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بدّل بين x و y
$x + 320 = 24y$	أضف 320 إلى الطرفين
$y = \dfrac{x + 320}{24}$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \dfrac{x + 320}{24}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضِّح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. و بما أن $f(40) = 640$, $f(105) = 2200$ ، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$ ، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

$f^{-1}(760) = \dfrac{760 + 320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.

إرشادات للدراسة

الدالة الخطية: يمكنك الحكم بأن منحنى الدالة الخطية يحقق اختبار الخط الأفقي دون الحاجة إلى رسمه.

تحقق من فهمك

5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من x , $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$, $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرِّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

تدرب وحل المسائل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$

2) $y = x^2 - 16x + 64$

3) $y = 3x - 8$

4) $y = 4$

5) $y = \sqrt{x+4}$

6) $y = -4x^2 + 8$

7) $y = \dfrac{8}{x+2}$

8) $y = \dfrac{1}{4}x^3$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

11) $f(x) = \sqrt{x+8}$

12) $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$

13) $f(x) = |x - 6|$

14) $f(x) = \dfrac{x-6}{x}$

15) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{8-x}}$

16) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x+3}}$

17) $f(x) = \dfrac{x+4}{3x-5}$

18) $f(x) = |x+1| + |x-4|$

19) **سرعة:** تُعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2)

a) أوجد الدالة العكسية لـِ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

20) $f(x) = 4x + 9$
$g(x) = \dfrac{x-9}{4}$

21) $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$
$g(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{3}}$

22) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$
$g(x) = \sqrt{4x - 32}$

23) $f(x) = (x+8)^{\frac{3}{2}}$
$g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$

24) $f(x) = 2x^3 - 6$
$g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+6}{2}}$

25) $f(x) = \dfrac{x-6}{x+2}$
$g(x) = \dfrac{2x+6}{1-x}$

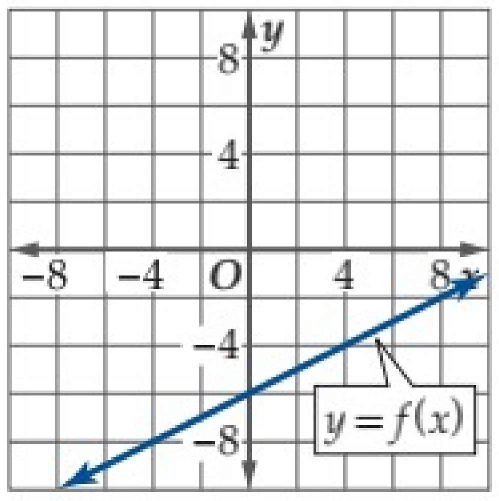
26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3)

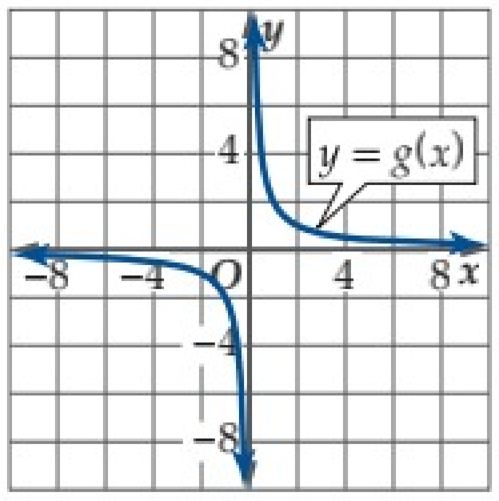
a) أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟

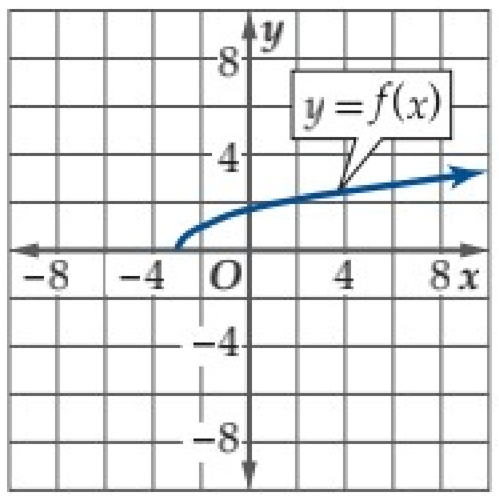
b) أثبت أن كلًّا من الدالتين $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

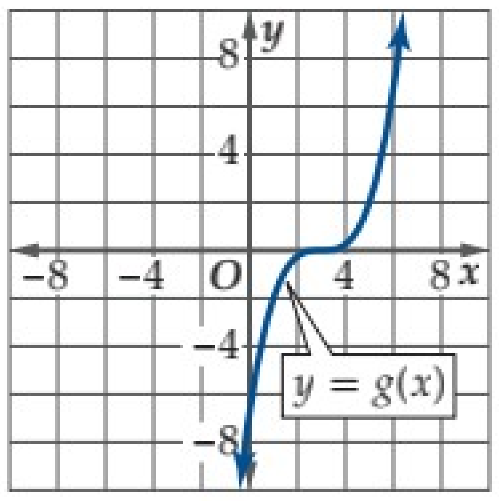
c) مَثِّل كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها: (مثال 4)

27)


28)


29)


30)


31) **وظائف:** يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالًا في الأسبوع، ويتقاضى أيضًا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات. أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًّا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$ حيث تمثل x قيمة المبيعات. (مثال 5)

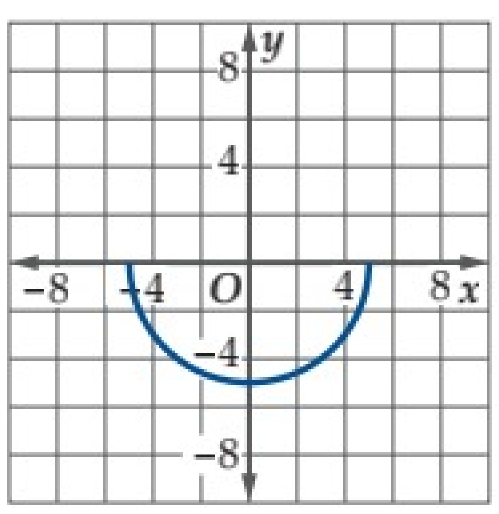
a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

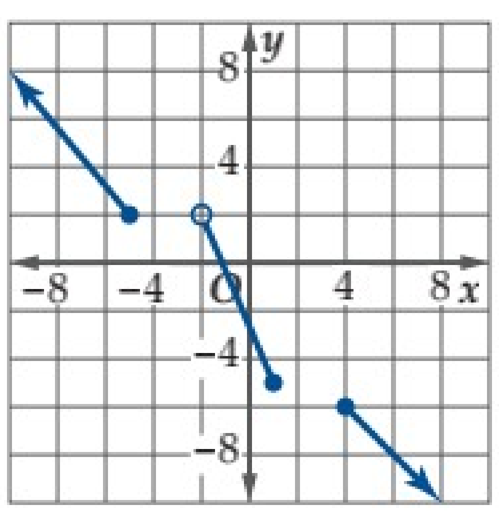
b) ماذا تمثّل كل من $x, f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

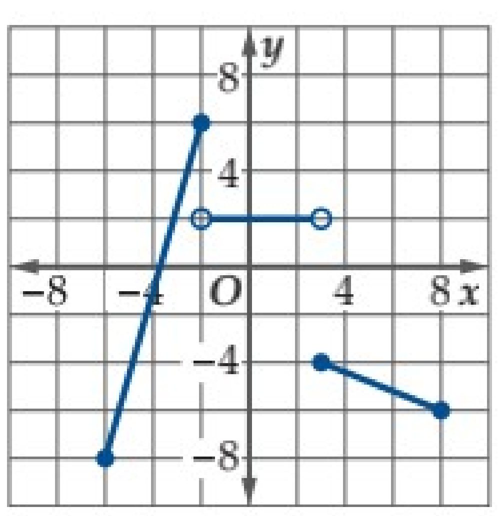
c) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x), f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

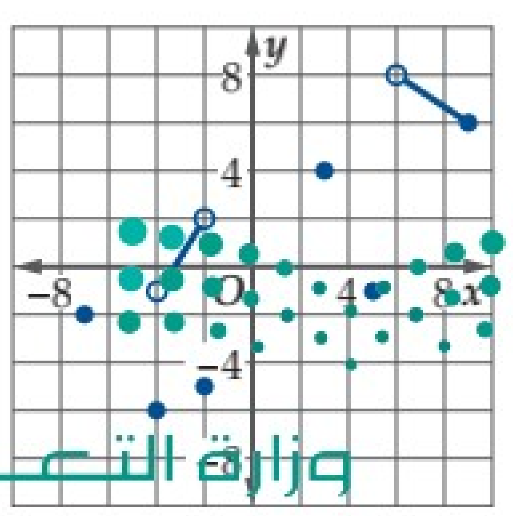
d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

حدّد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

32)


33)


34)


35)


كوّن جدولًا للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب.

36)

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

37)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

38) **درجات حرارة:** تُستعمل الدالة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة المطلقة (كلفن).

a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

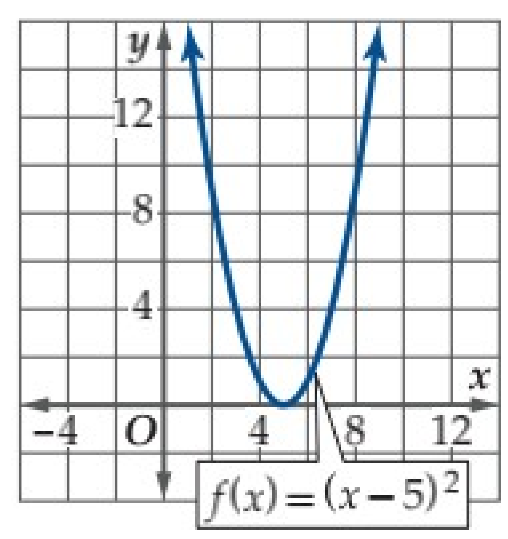
b) أثبت أن كلاً من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.

c) أوجد $(k \circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

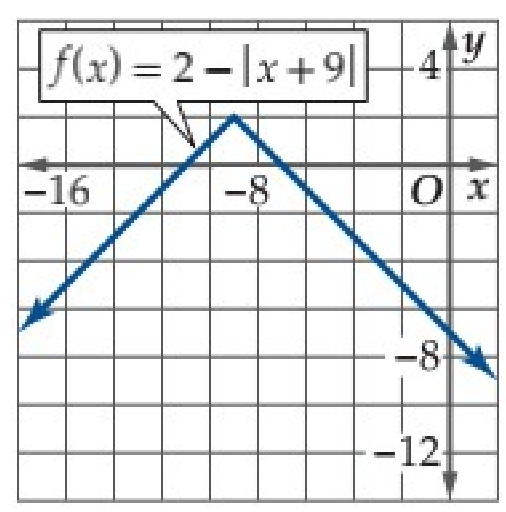
d) إذا كانت درجة الحرارة $60°C$، فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها.

ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة. ثم أوجد الدالة العكسية لها:

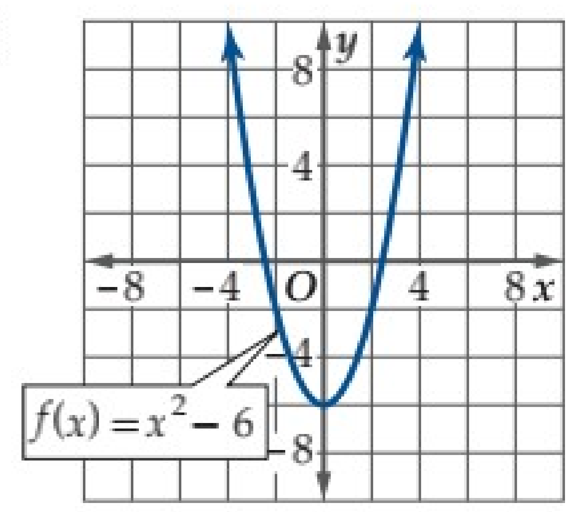
39)



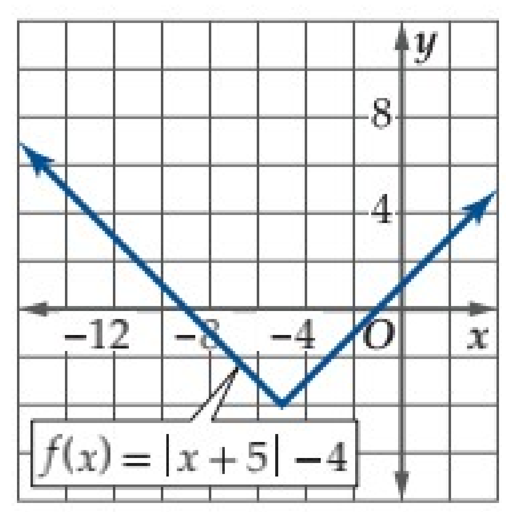
40)



41)



42)



43) **أزهار:** تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريالات للزهرة الواحدة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها ؟

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من f, f^{-1}:

44) $f(x) = \sqrt{x - 6}$

45) $f(x) = x^2 + 9$

46) $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 4}$

47) $f(x) = \frac{8x + 3}{2x - 6}$

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد. و اذكر أية قيود على المجال:

48) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ -4 \geq x \\ -2x + 5 & , \ -4 < x \end{cases}$

49) $f(x) = \begin{cases} -4x + 6 & , \ -5 \geq x \\ 2x - 8 & , \ -5 < x \end{cases}$

50) **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. فكانت الشركة تخصم 50 ريالًا وتمنح تخفيضًا مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم 50 ريالًا فقط.

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط.

c) اكتب قاعدة تمثّل $T = r \circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

d) أوجد T^{-1}، وماذا تمثّل؟

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالًا، فكم يكون سعره الأصلي؟

إذا كانت $f(x) = 8x - 4, g(x) = 2x + 6$ فأوجد:

51) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

52) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

53) $(f \circ g)^{-1}(x)$

54) $(g \circ f)^{-1}(x)$

55) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة وجود أو عدم وجود دالة عكسية لكلٍّ من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

b) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

c) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

d) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

مسائل مهارات التفكير العليا

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرًا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضّح بمثال.

58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برِّر إجابتك.

"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

59) **تحدٍّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - a$, $f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a .

60) **تبرير:** هل توجد دالة $f(x)$ تحقق اختبار الخط الأفقي، وتحقق المعادلتين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ في الوقت نفسه؟

مراجعة تراكمية

لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g$, $g \circ f$، ثم أوجد مجال دالة التركيب: (الدرس 1-6)

61) $f(x) = x^2 - 9$

$g(x) = x + 4$

62) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$

$g(x) = x + 6$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) المعطاة لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-5)

63) $f(x) = x^2$

a) $y = (0.2x)^2$

b) $y = (x - 5)^2 - 2$

c) $y = 3x^2 + 6$

64) $f(x) = x^3$

a) $y = |x^3 + 3|$

b) $y = -(2x)^3$

c) $y = 0.75(x + 1)^3$

65) $f(x) = |x|$

a) $y = |2x|$

b) $y = |x - 5|$

c) $y = |3x + 1| - 4$

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

66) $f(x) = x^3 - x$, $[0, 3]$

67) $f(x) = x^4 - 2x + 1$, $[-5, 1]$

تدريب على اختبار

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

69) إذا كان كل من m و n عددًا صحيحًا فرديًّا، فأي العبارات الآتية صحيحة؟

I) $m^2 + n^2$ عدد زوجي

II) $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4

III) $(m + n)^2$ يقبل القسمة على 4

A كلها غير صحيحة

B I فقط

C I و II فقط صحيحتان

D I و III فقط صحيحتان

الفصل 1

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدوال (الدرس 1-1)

- المجموعات الجزئية الشائعة من مجموعة الأعداد الحقيقية هي: الأعداد النسبية، الأعداد غير النسبية، الأعداد الصحيحة، الأعداد الكلية، الأعداد الطبيعية.
- الدالة هي علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.
- يحقق منحنى أي دالة اختبار الخط الرأسي.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الدرس 2-1)

- قد تكون المنحنيات متماثلةً حول المحور y، أو المحور x، أو نقطة الأصل.
- الدالة الزوجية متماثلة حول المحور y، والدالة الفردية متماثلة حول نقطة الأصل.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الدرس 3-1)

- إذا كانت قيم الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فنقول: إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c تساوي L. وتكتب $\lim_{x \to c} f(x) = L$.
- قد تكون الدالة غير متصلة، ونوع عدم الاتصال هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الدرس 4-1)

- تكون الدالة إما متزايدةً أو متناقصةً أو ثابتةً على فترات معينة.
- تتضمن القيم القصوى القيمة العظمى المحلية، والصغرى المحلية، والعظمى المطلقة، والصغرى المطلقة.
- يعطى متوسط معدل التغير بين نقطتين بالقاعدة
$$m_{\sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

الدالة الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الدرس 5-1)

تتضمن التحويلات الهندسية على الدالة الرئيسة (الأم): الانسحاب، الانعكاس، التمدد.

العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الدرس 6-1)

إن حاصل جمع، وطرح، وضرب، وقسمة، وتركيب أي دالتين ينتج دوال جديدةً.

العلاقات والدوال العكسية (الدرس 7-1)

- تكون كلٌ من العلاقتين A, B عكسية للأخرى إذا وفقط إذا وجد (b, a) في إحداهما فإنه يوجد (a, b) في الأخرى.
- تكون كلٌ من الدالتين f, f^{-1} عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x, f^{-1}[f(x)] = x$.

المفردات

الصفة المميزة للمجموعة (ص. 10)
رمز الفترة (ص. 11)
الدالة (ص. 11)
رمز الدالة (ص. 13)
المتغير المستقل (ص. 13)
المتغير التابع (ص. 13)
الدالة متعددة التعريف (ص. 14)
الأصفار (ص. 20)
الجذور (ص. 20)
التماثل حول مستقيم (ص. 21)
التماثل حول نقطة (ص. 21)
الدالة الزوجية (ص. 23)
الدالة الفردية (ص. 23)
الدالة المتصلة (ص. 28)
النهاية (ص. 28)
الدالة غير المتصلة (ص. 28)
عدم الاتصال اللانهائي (ص. 28)
عدم الاتصال القفزي (ص. 28)
عدم الاتصال القابل للإزالة (ص. 28)
عدم الاتصال غير قابل للإزالة (ص. 31)
سلوك طرفي التمثيل البياني (ص. 32)
المتزايدة (ص. 38)
المتناقصة (ص. 38)
الثابتة (ص. 38)
النقطة الحرجة (ص. 40)
العظمى (ص. 40)
الصغرى (ص. 40)
القصوى (ص. 40)
متوسط معدل التغير (ص. 42)
القاطع (ص. 42)
الدالة الرئيسة (الأم) (ص. 48)
الدالة الثابتة (ص. 48)
الدالة المحايدة (ص. 48)
الدالة التربيعية (ص. 48)
الدالة التكعيبية (ص. 48)
دالة الجذر التربيعي (ص. 48)
دالة المقلوب (ص. 48)
دالة القيمة المطلقة (ص. 49)
الدالة الدرجية (ص. 49)
دالة أكبر عدد صحيح (ص. 49)
التحويل الهندسي (ص. 49)
الانسحاب (ص. 50)
الانعكاس (ص. 50)
التمدد (ص. 52)
تركيب دالتين (ص. 59)
العلاقة العكسية (ص. 66)
الدالة العكسية (ص. 66)
الدالة المتباينة (ص. 67)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة، فاستبدل المفردة التي تحتها خط حتى تصبح صحيحة.

1) تعين <u>الدالة</u> لكل عنصر في مجالها عنصرًا واحدًا فقط في مداها.
2) المنحنيات <u>المتماثلة حول نقطة</u> يمكن تدويرها $180°$ حول النقطة، فتبدو كأنها لم تتغير.
3) <u>للدالة الفردية</u> نقطة تماثل.
4) لا يتضمن منحنى <u>الدالة المتصلة</u> فجوةً أو انقطاعًا.
5) الدالة <u>الفردية</u> متماثلة حول المحور y.
6) الدالة $f(x)$ التي تتناقص قيمها مع تزايد قيم x تسمى دالةً <u>متناقصة</u>.
7) تتضمن <u>القيم القصوى</u> لدالة قيمًا عظمى محليةً أو صغرى محليةً.
8) <u>انسحاب</u> المنحنى عبارة عن صورة مرآة للمنحنى الأصلي حول مستقيم.
9) تحقق <u>الدالة المتباينة</u> اختبار الخط الأفقي.
10) الدالة المتباينة لها <u>محور تماثل</u>.

ملخص الدروس

1-1 الدوال (الصفحات 10 - 17)

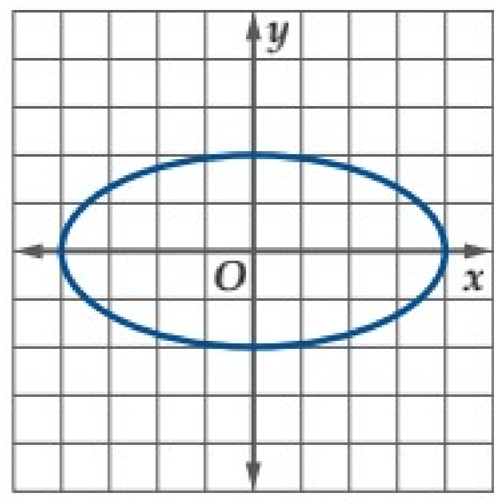
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا:

11) $3x - 2y = 18$　　12) $y^3 - x = 4$

13)

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

14)



إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$، فأوجد كلًّا من القيمتين الآتيتين:

15) $f(5)$　　16) $f(-3x)$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية:

17) $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$　　18) $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

19) $h(a) = \dfrac{5}{a + 5}$　　20) $v(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

مثال 1

في العلاقة $x = y^2 - 8$ حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

حل بالنسبة إلى y.

$y^2 - 8 = x$　　الدالة الأصلية

$y^2 = x + 8$　　أضف 8 للطرفين

$y = \pm\sqrt{x + 8}$　　خذ الجذر التربيعي للطرفين

في هذه العلاقة، y لا تمثّل دالة في المتغير x؛ لأن كل قيمة لـ x أكبر من -8 ترتبط بقيمتين من قيم y.

مثال 2

إذا كانت $g(x) = -3x^2 + x - 6$، فأوجد $g(2)$.

عوض 2 مكان x في العبارة: $-3x^2 + x - 6$.

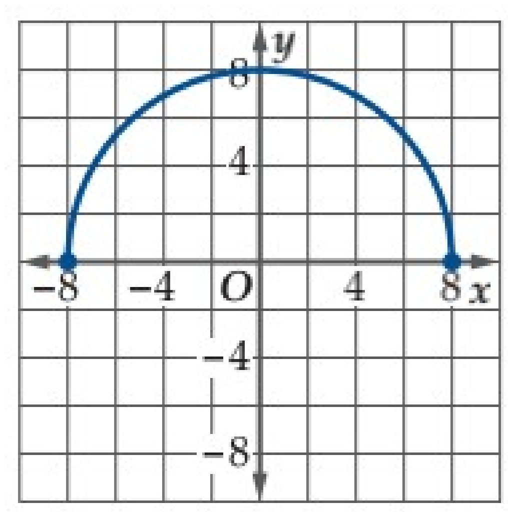
$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$　　$x = 2$

$= -12 + 2 - 6 = -16$　　بسّط

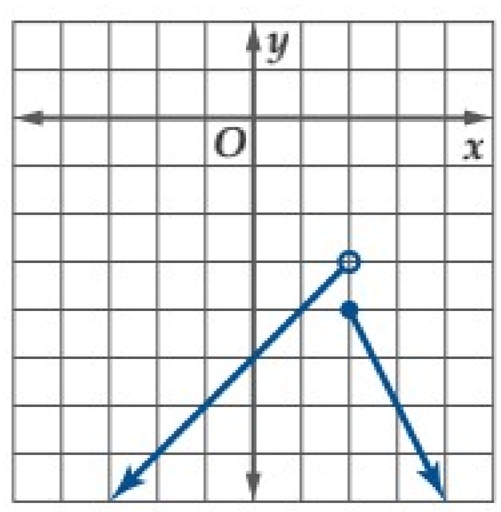
1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الصفحات 18 - 27)

استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة ومداها في كل مما يأتي:

21)



22)



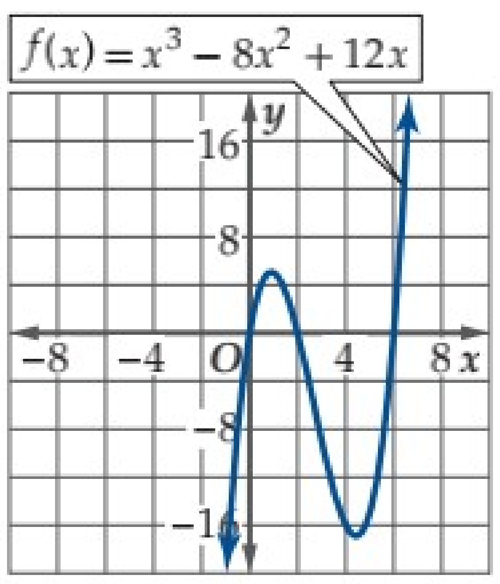
أوجد المقطع y ، والأصفار لكل دالة مما يأتي:

23) $f(x) = 4x - 9$　　24) $f(x) = x^2 - 6x - 27$

25) $f(x) = x^3 - 16x$　　26) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$

مثال 3

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد مقطعها y وأصفارها. ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.



التقدير بيانيًّا:

يتضح من الشكل أن منحنى $f(x)$ يقطع المحور y عند $(0, 0)$؛ لذا فإن المقطع y هو 0 .

المقاطع x (أصفار الدالة) تبدو قريبة من 0, 2, 6 .

الحل جبريًّا:

لإيجاد المقطع y، أوجد $f(0)$.

$f(0) = 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$

حلل المعادلة المرتبطة بالدالة إلى العوامل x لإيجاد أصفار الدالة.

$0 = x(x^2 - 8x + 12)$

$= x(x - 2)(x - 6)$

أصفار الدالة f هي 6 ,2 ,0 .

دليل الدراسة و المراجعة

1-3 الاتصال والنهايات (الصفحات 28 - 37)

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيم x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فبيّن نوع عدم الاتصال لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

27) $f(x) = x^2 - 3x\ ,\ x = 4$

28) $f(x) = \sqrt{2x - 4}\ ,\ x = 10$

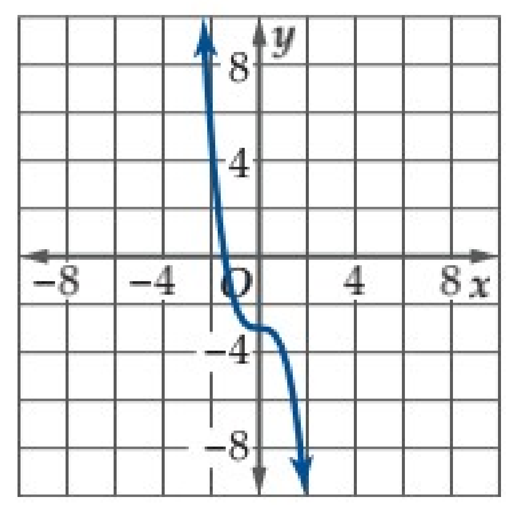
29) $f(x) = \dfrac{x}{x + 7}\ ,\ x = 0\ ,\ x = 7$

30) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}\ ,\ x = 2\ ,\ x = 4$

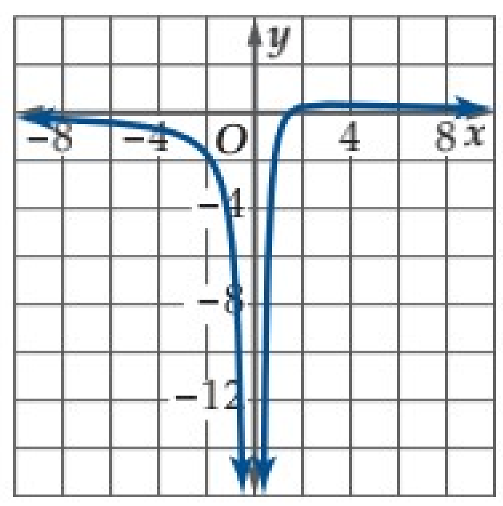
31) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1\ , & x < 1 \\ 2x\ , & x \geq 1 \end{cases}\ ,\ x = 1$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل منهما:

32)



33)



مثال 4

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$ متصلة عند $x = 0\ ,\ x = 4$. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$f(0) = -0.25$ ، لذلك f معرفة عند 0 . وتقترب قيم الدالة من -0.25 عندما تقترب x من 0 .

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	-0.244	-0.249	-0.25	-0.251	-0.256

بما أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -0.25\ ,\ f(0) = -0.25$ فإن $f(x)$ متصلة عند $x = 0$.

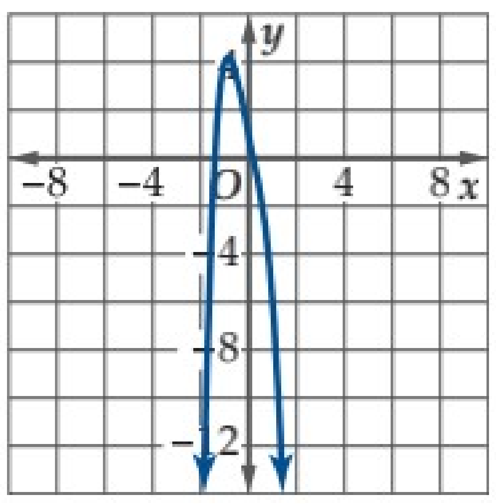
بما أن f غير معرفة عند $x = 4$ فإن f غير متصلة عند 4 وهو عدم اتصال لا نهائي.

مثال 5

استعمل التمثيل البياني للدالة:

$f(x) = -2x^4 - 5x + 1$

لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.



اختبر منحنى $f(x)$.

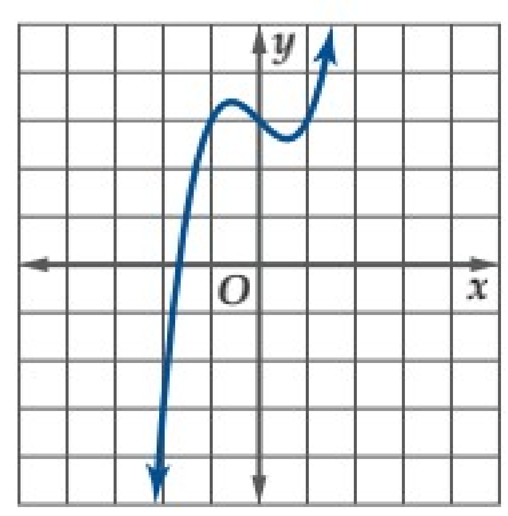
عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

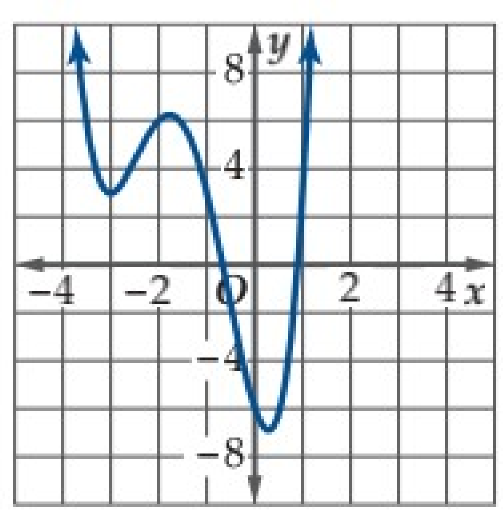
1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الصفحات 38 - 46)

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.

34)



35)



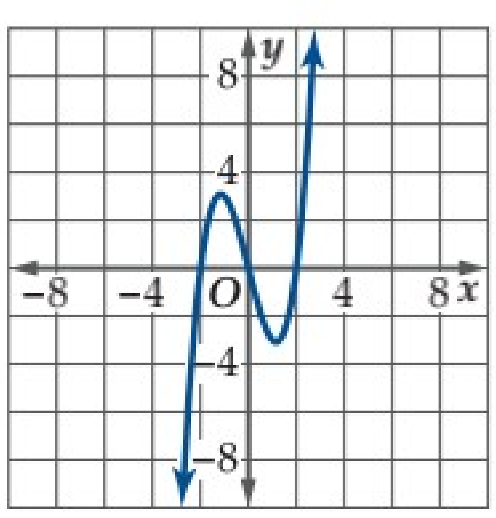
أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

36) $f(x) = -x^3 + 3x + 1,\ [0, 2]$

37) $f(x) = x^2 + 2x + 5,\ [-5, 3]$

مثال 6

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.



الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

للدالة قيمة عظمى محلية عند $(-1, 3)$ ، وقيمة صغرى محلية عند $(1, -3)$.

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الصفحات 48 - 57)

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وَصِف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثّلهما في مستوى إحداثي واحد.

38) $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$

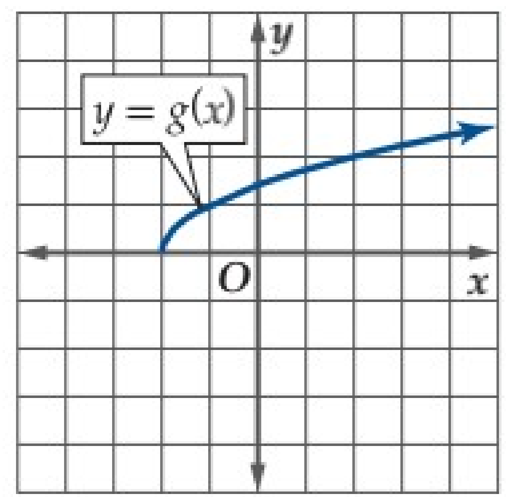
39) $g(x) = -(x-6)^2 - 5$

40) $g(x) = \dfrac{1}{2(x+7)}$

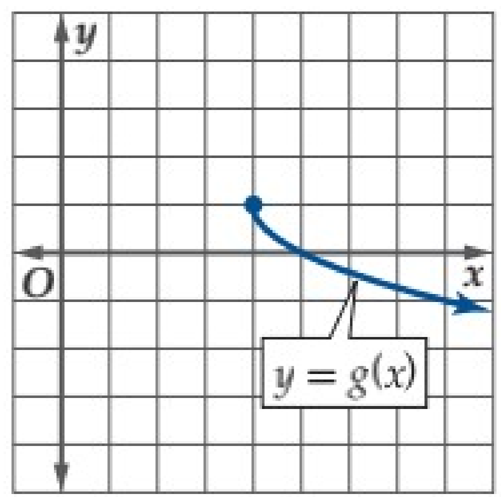
41) $g(x) = \frac{1}{4}[x] + 3$

صف العلاقة بين الدالتين $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$.

42)



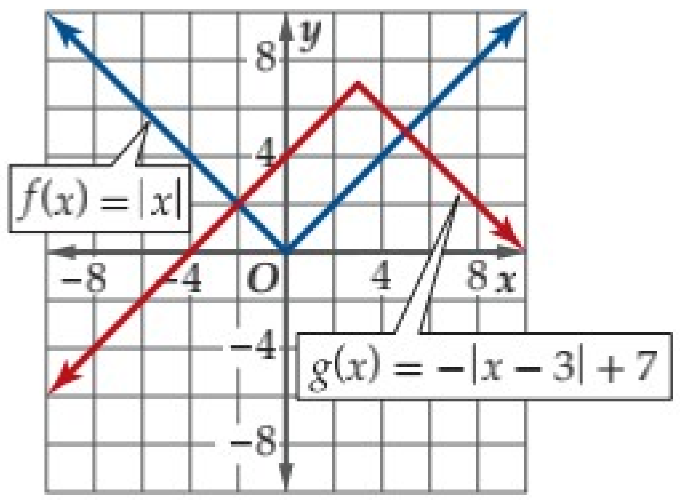
43)



مثال 7

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -|x-3| + 7$ ، وصف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثّلهما في مستوى إحداثي واحد.

الدالة الرئيسة (الأم) لـ $g(x)$ هي $f(x) = |x|$. ينتج منحنى الدالة g من منحنى الدالة f بانعكاس حول المحور x ، وانسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليمين، وانسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى.



1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الصفحات 58 - 65)

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ فيما يأتي. ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

44) $f(x) = x + 3$
$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

45) $f(x) = 4x^2 - 1$
$g(x) = 5x - 1$

46) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
$g(x) = 4x^2 - 3$

47) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](2)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

48) $f(x) = 4x - 11, g(x) = 2x^2 - 8$

49) $f(x) = x^2 + 2x + 8, g(x) = x - 5$

50) $f(x) = x^2 - 3x + 4, g(x) = x^2$

اكتب مجال $f \circ g$ متضمنًا أية قيود إذا لزم، ثم أوجد $f \circ g$.

51) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
$g(x) = 2x - 6$

52) $f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = 6x - 7$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x + 7$ ، فأوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^3 - 1) + (x + 7)\\ &= x^3 + x + 6\end{aligned}$$

مجال $(f+g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^3 - 1) - (x + 7)\\ &= x^3 - x - 8\end{aligned}$$

مجال $(f-g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x^3 - 1)(x + 7)\\ &= x^4 + 7x^3 - x - 7\end{aligned}$$

مجال $(f \cdot g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 1}{x + 7}$$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$.

دليل الدراسة و المراجعة

1-7 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات 66 - 73)

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد.

53) $y = 2x$

54) $y = -4x + 8$

55) $y = 2\sqrt{x+3}$

56) $y = \frac{1}{x} - 3$

مثّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثّل دالةً أم لا.

57) $f(x) = |x| + 6$

58) $f(x) = x^3$

59) $f(x) = -\frac{3}{x+6}$

60) $f(x) = x^3 - 4x^2$

مثال 9

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = x^3 - 9$.

بدّل مكاني x, y لتحصل على المعادلة $x = y^3 - 9$، ثم حل بالنسبة إلى y .

$$x = y^3 - 9$$
$$x + 9 = y^3$$
$$\sqrt[3]{x+9} = y$$

أي أن الدالة العكسية هي $y = \sqrt[3]{x+9}$.

تطبيقات ومسائل

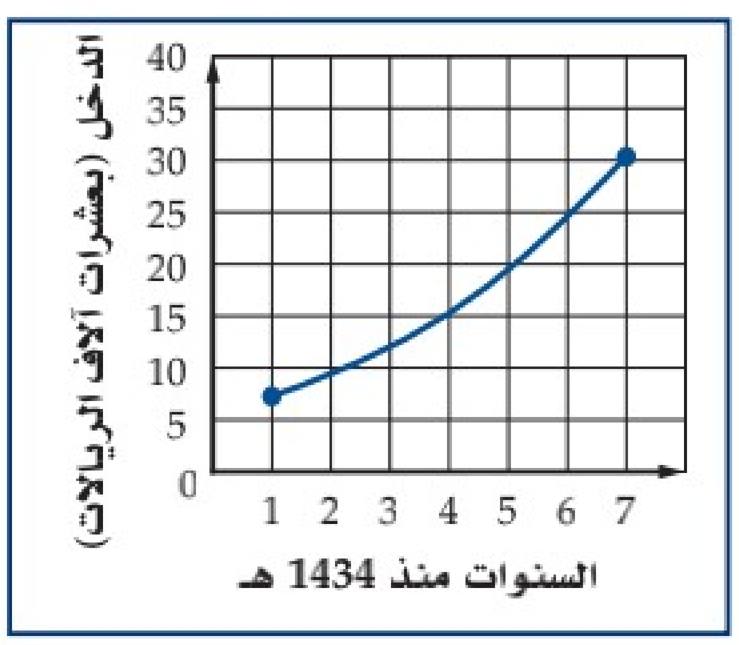
61) **الهواتف المحمولة:** قدمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا على الهواتف المحمولة بحيث يدفع المشترك 40 ريالًا في الشهر. ويتضمن ذلك 500 دقيقة مكالمات نهارية مجانية كحد أقصى خلال الشهر، ويدفع 0.2 ريال عن كل دقيقة نهارية تزيد على 500 دقيقة. (الدرس 1-1)

a) اكتب الدالة $p(x)$ للتكلفة الشهرية لإجراء مكالمات نهارية مدتها x دقيقة.

b) كم سيدفع مشترك إذا أجرى مكالمات نهارية مدتها 450 دقيقةً، 550 دقيقةً؟

c) مثّل الدالة $p(x)$ بيانيًّا.

62) **أعمال:** يبين التمثيل البياني أدناه الدخل الذي حققه متجر صغير في الفترة من عام 1434 هـ إلى 1440 هـ (الدرس 1-2)



a) قدّر دخل المتجر سنة 1437 هـ.

b) قدّر السنة التي حقق فيها المتجر دخلًا مقداره 100000 ريال.

63) **رواتب:** بعد 5 سنوات من عمل وليد في إحدى الشركات تقاضى زيادةً على راتبه مقدارها 1500 ريال شهريًّا. هل الدالة التي تمثّل راتب وليد متصلة أم غير متصلة؟ برِّر إجابتك. (الدرس 1-3)

64) **كرة قدم:** يبين الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجلها لاعب في خمسة مواسم كروية. (الدرس 1-4)

السنة	1433	1434	1435	1436	1437
عدد الأهداف	5	36	23	42	42

a) وضح لماذا يمثّل عدد الأهداف عام 1435 هـ قيمةً صغرى محليةً.

b) إذا كان متوسط معدل التغير لعدد الأهداف بين عامي 1437 و1440هـ يساوي 5 أهداف لكل عام. فكم هدفًا سجل اللاعب عام 1440 هـ ؟

65) **فيزياء:** رُمي حجر أفقيًّا من على حافة جرف، وكان مقدار سرعته معطى بالدالة: $v(t) = \sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ السرعة بالمتر لكل ثانية. مثل بيانيًّا دالة السرعة خلال أول 6 ثوانٍ من رمي الحجر. (الدرس 1-5)

66) **ثقافة مالية:** إذا كان ثمن شريحة الإنترنت 500 ريال. وقدمت إحدى الشركات العرض التالي: خصم 10% من ثمن الشريحة و20 ريالًا عند تفعيلها. كم سيكون ثمن الشريحة بعد تفعيلها. (الدرس 1-6)

67) **قياس:** تذكر أن 1 بوصةً تساوي 2.54 سم تقريبًا. (الدرس 1-7)

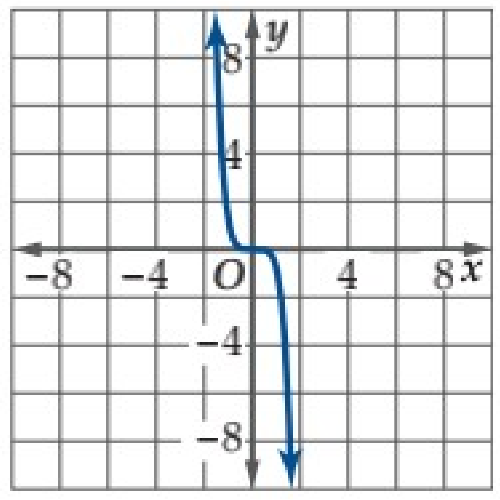
a) اكتب دالة $A(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من البوصات المربعة إلى السنتمترات المربعة.

b) أوجد $A^{-1}(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من السنتمترات المربعة إلى البوصات المربعة.

اختبار الفصل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x:

1) $x = y^2 - 5$

2) 

3) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

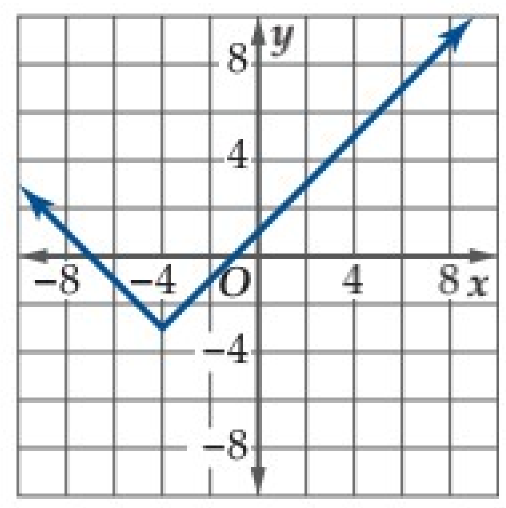
4) **موقف سيارات:** يتقاضى موقف للسيارات مبلغ 3 ريالات مقابل كل ساعة أو جزءٍ من الساعة لأول ثلاث ساعات، فإذا زادت المدة عن الثلاث ساعات، فإنه يتقاضى 15 ريالًا عن المدة كلها.

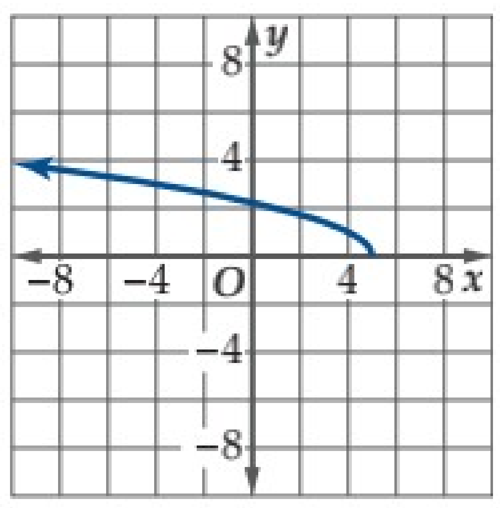
a) اكتب دالة $c(x)$ تمثّل تكلفة وقوف سيارة مدة x من الساعات.

b) أوجد $c(2.5)$.

c) عيّن مجال الدالة $c(x)$، وبرر إجابتك.

حدد مجال كل دالة من الدالتين الممثلتين أدناه ومداها:

5) 

6) 

أوجد المقطع y والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين:

7) $f(x) = 4x^2 - 8x - 12$

8) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

9) **اختيار من متعدد:** أي العلاقات الآتية متماثلة حول المحور x ؟

A $-x^2 - yx = 2$

B $x^3y = 8$

C $y = |x|$

D $-y^2 = -4x$

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلةً عند $x = 3$ ، وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة.

10) $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 3 \\ 9 - x & , \quad x \geq 3 \end{cases}$

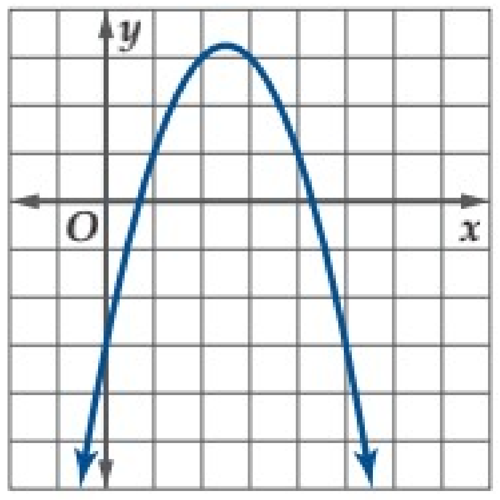
11) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

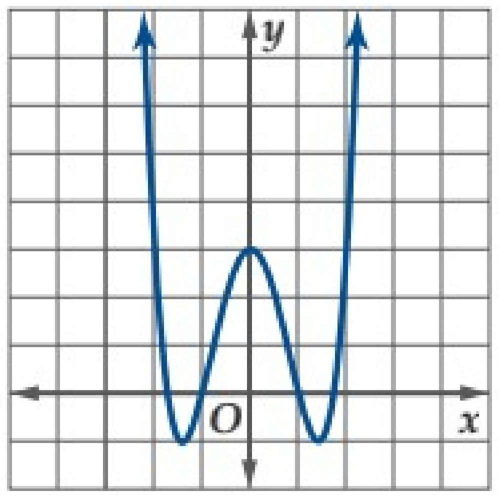
أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدالتين الآتيتين في الفترة $[-2, 6]$:

12) $f(x) = -x^4 + 3x$

13) $f(x) = \sqrt{x+3}$

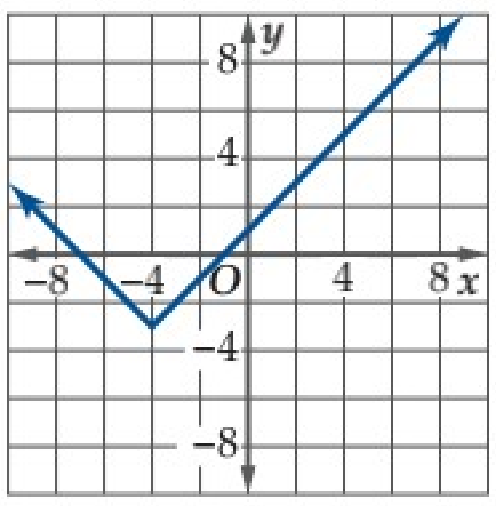
استعمل منحنى كل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة إلى أقرب 0.5 وحدة.

14) 

15) 

16) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 14 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيِّن نوعها.

17) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية يمثّلها التمثيل البياني المجاور؟



A $f(x) = |x - 4| - 3$

B $f(x) = |x - 4| + 3$

C $f(x) = |x + 4| - 3$

D $f(x) = |x + 4| + 3$

18) عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -(x+3)^3$، ثم مثِّل الدالة $g(x)$ بيانيًّا.

إذا كانت $f(x) = x - 6$, $g(x) = x^2 - 36$ ، فأوجد كل دالة من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجالها.

19) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

20) $[g \circ f](x)$

21) **درجة الحرارة:** تستعمل معظم دول العالم الدرجات السيليزية C لقياس درجة الحرارة. والمعادلة التي تربط بين درجات الحرارة السيليزية C والفهرنهايتية F هي $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) اكتب C كدالة بالنسبة إلى F .

b) أوجد دالتين f و g بحيث يكون $C = [f \circ g](F)$.

بيِّن ما إذا كان للدالة f دالة عكسية أم لا في كل مما يأتي، أوجدها في حالة وجودها، وحدّد أية قيود على مجالها.

22) $f(x) = (x - 2)^3$

23) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-8}$

24) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

25) $f(x) = x^2 - 16$

الفصل 2

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانيًا.

والآن:

- أتعرّف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثّل الدوال الأسّية واللوغاريتمية بيانيًا.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

لماذا؟

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطًا وثيقًا، ويظهر ذلك جليًا في الفيزياء والكيمياء والأحياء، وغيرها. وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية. وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم: الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والهزات الأرضية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $a^4a^3a^5$

2) $(2xy^3z^2)^3$

3) $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$

4) $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم $7.5 \times 10^3 g$، وحجمه $1.5 \times 10^3 cm^3$، فما كثافته؟

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

6) $f(x) = 2x + 5$

7) $f(x) = x - 3$

8) $f(x) = -4x$

9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

12) $f(x) = x - 6$
$g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$
$g(x) = 2x - 5$

14) **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني.

مراجعة المفردات

المجال (domain):
مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

المدى (range):
مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

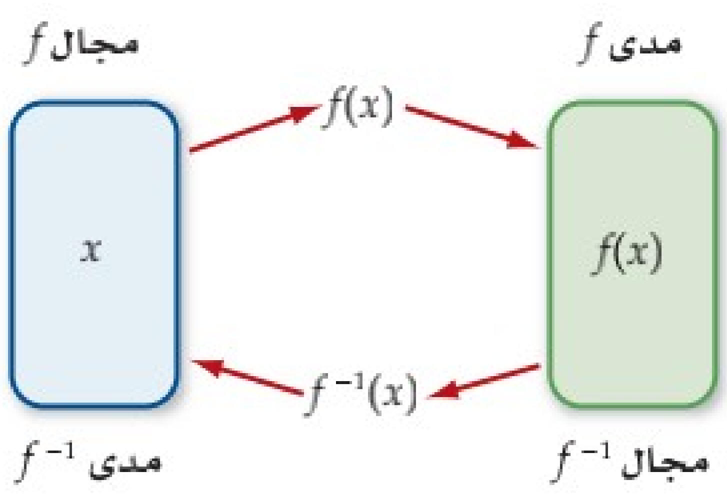
الدالة (function):
علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

سلوك طرفي التمثيل البياني (end behaviour):
سلوك تمثيل $f(x)$ البياني عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$ أو سالب مالانهاية $(x \to -\infty)$.

خط التقارب (asymptote):
مستقيم يقترب منه تمثيل الدالة البياني.

الدالة المتباينة (one-to-one function):
هي دالة تحقق اختبار الخط الأفقي؛ أي لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.

الدالة العكسية (inverse function):
تكون كل من الدالتين f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:
$f[f^{-1}(x)] = x$ ، $f^{-1}[f(x)] = x$.



الدالة المتصلة (continuous function):
هي الدالة التي يخلو منحناها من الانقطاعات أو الفجوات؛ أي يمكن تمرير القلم على منحناها دون أن نضطر لرفعه.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-1 الدوال الأسّية
Exponential Functions

فيما سبق:

درستُ دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانيًا. (الدرس 1-1)

والآن:

- أتعرف الدالة الأسية.
- أمثّل الدالة الأسية.
- أمثّل دوال النمو الأسي بيانيًا.
- أمثّل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.

المفردات:

الدالة الأسية
exponential function

النمو الأسّي
exponential growth

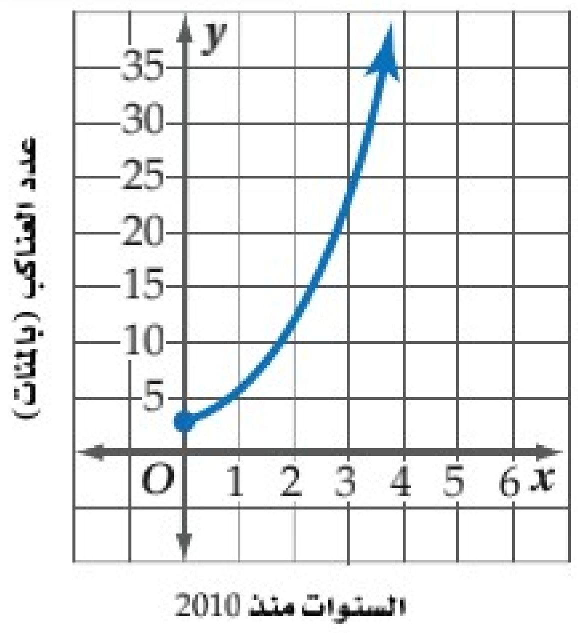
عامل النمو
growth factor

الاضمحلال الأسّي
exponential decay

عامل الاضمحلال
decay factor

لماذا؟

قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيِّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.



لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًّا، وليس تربيعيًّا أيضًا، وإنما يمثِّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.

تمثيل الدوال الأسّيّة: **الدالة الأسّية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

مفهوم أساسي — الدالة الأسية

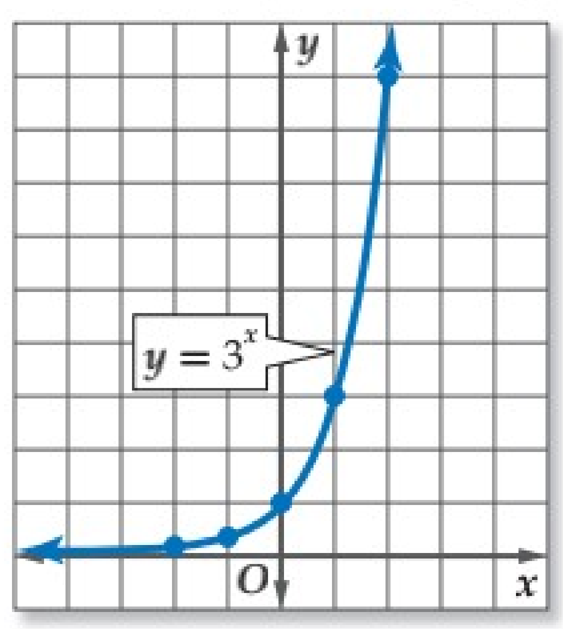
التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة $y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

أمثلة: $y = (\frac{1}{2})^x$ $\quad y = 4^x$ $\quad y = 2(3)^x$

مثال 1 تمثيل الدالة الأسّيّة عندما $a > 0$ ، $b > 1$

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.

x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y، حيث $y = 3^x$، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

إرشادات للدراسة

الدالة $y = ab^x$:
تكون الدالة الأسية $y = ab^x$ معرفة لجميع قيم x التي تحقق الشرط: $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$ وذلك لأنه:
- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^x$ تكون غير معرفة عند بعض القيم، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة.

تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

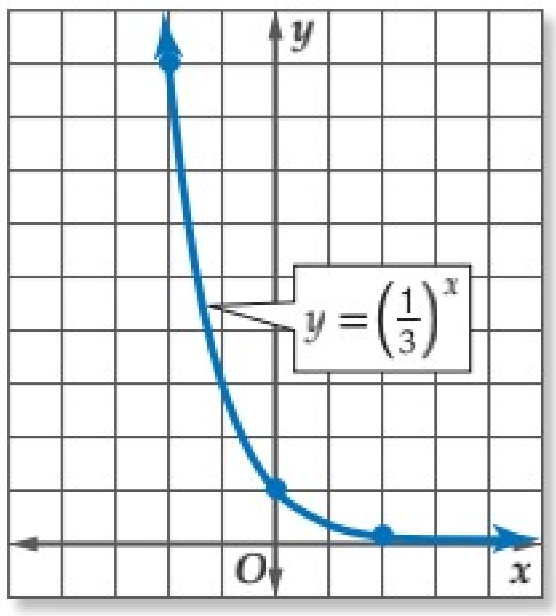
1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

يتضح من المثال (1) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 1)، فإن قيم y تزداد أيضًا بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل 3 أمثال القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متزايدة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

مثال 2 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $0 < b < 1$ ، $a > 0$

a) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{3})^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

x	$(\frac{1}{3})^x$	y
-2	$(\frac{1}{3})^{-2}$	9
0	$(\frac{1}{3})^0$	1
2	$(\frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{9}$



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{3})^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$، فإن قيمة $y \approx 5.2$، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $(\frac{1}{3})^{-1.5} \approx 5.19615$).

تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = (\frac{1}{2})^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها.

2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $(\frac{1}{2})^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

إرشادات للدراسة

a < 0

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x .

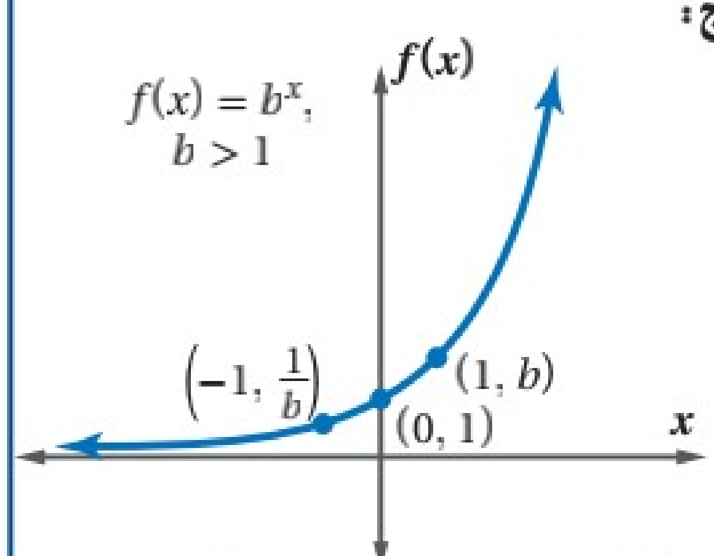
يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 2)، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثِّل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقاربٍ أفقي لها.

النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**، فالدالة $y = 3^x$ الواردة في المثال 1 هي دالة نمو أسي.

مفهوم أساسي الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(\mathbb{R}^+)$

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

يمكنك تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل الدوال الأسية، كما يمكنك الاستفادة من النقاط: $(-1, \frac{1}{b}), (0, 1), (1, b)$

لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a(1 + r)^t$ ، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(r + 1)$ ويُسمى **عامل النمو**.

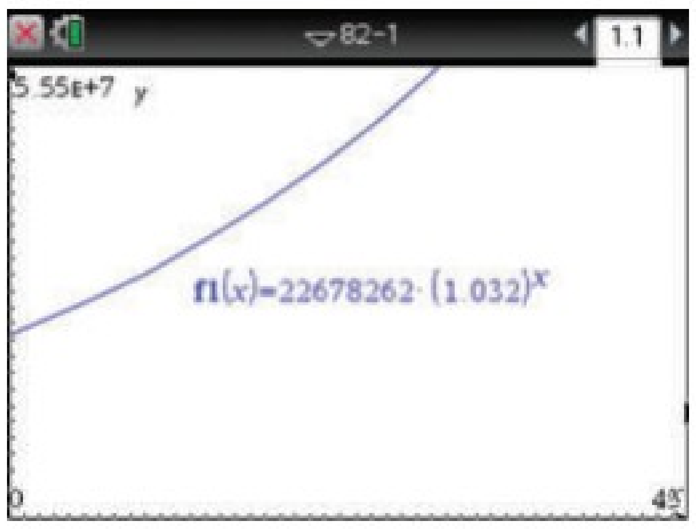
وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريبًا.

مثال 3 من واقع الحياة — تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًّا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431 - 1425 %3.2 تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثِّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملًا $a = 22678262, r = 0.032$

$$y = 22678262\,(1.032)^t$$

b) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته %8.5 سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثِّل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ ، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

تنبيه!

النسبة المئوية

تذكّر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية. فمثلًا، $12.5\% = 0.125$

الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$ ، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسي.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x,\ 0 < b < 1$

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

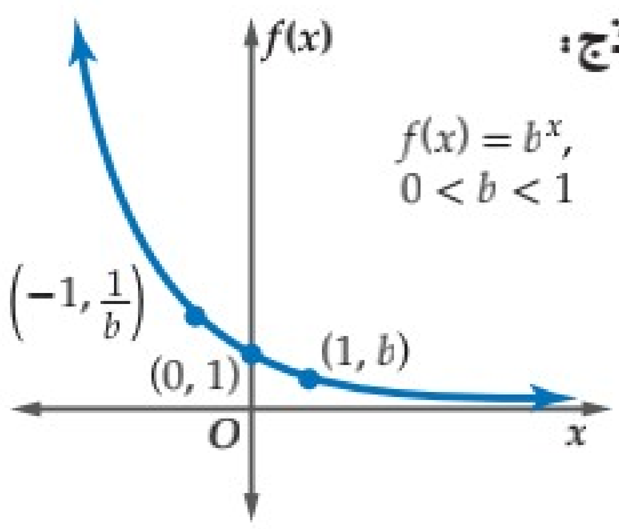
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية(R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة(R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

النموذج:



يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x ، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a(1 - r)^t$ ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

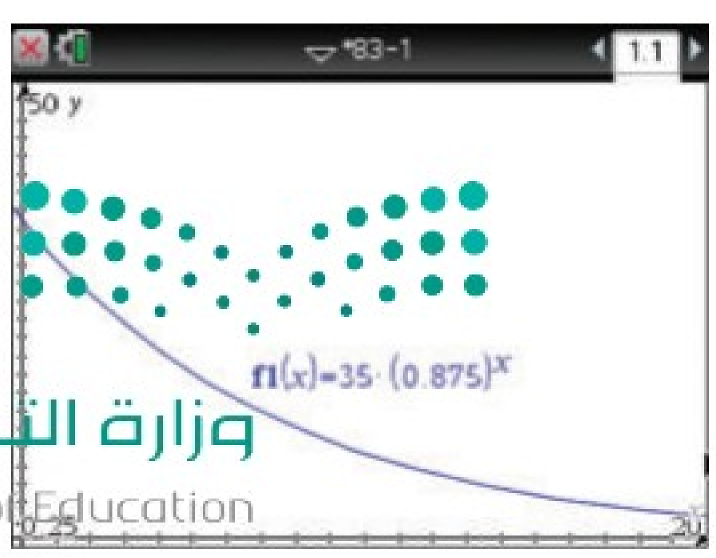
وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

الربط مع الحياة

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عُرضةً للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.

مثال 4 من واقع الحياة — تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافايين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من %12.5 تقريبًا من كمية الكافايين من أجسامهم في الساعة.



a) أوجد دالة أسّية تمثِّل كمية الكافايين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

$$y = a(1-r)^t$$
$$= 35(1-0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) **قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.**

$y = 35(0.875)^t$	المعادلة من الفرع a
$= 35(0.875)^3$	عوّض 3 بدلًا من الزمن t
≈ 23.45	استعمل الحاسبة

سيبقى في جسم هذا الشخص $23.45mg$ من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

تحقق من فهمك

4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدِّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

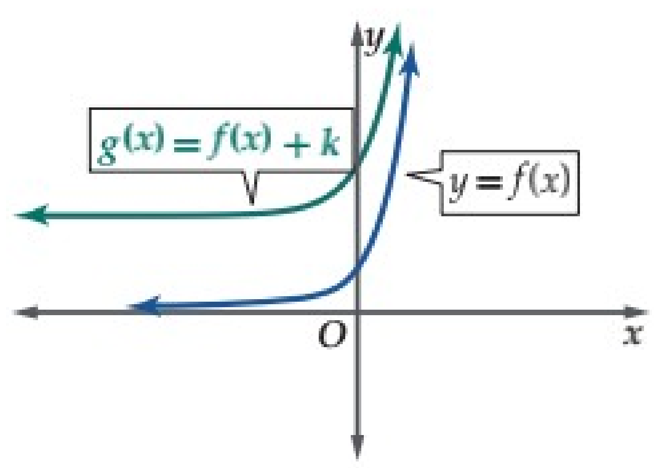
التحويلات الهندسية: تؤثّر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال، وستقتصر دراستنا على بعض التحويلات الهندسية لهاتين الدالتين.

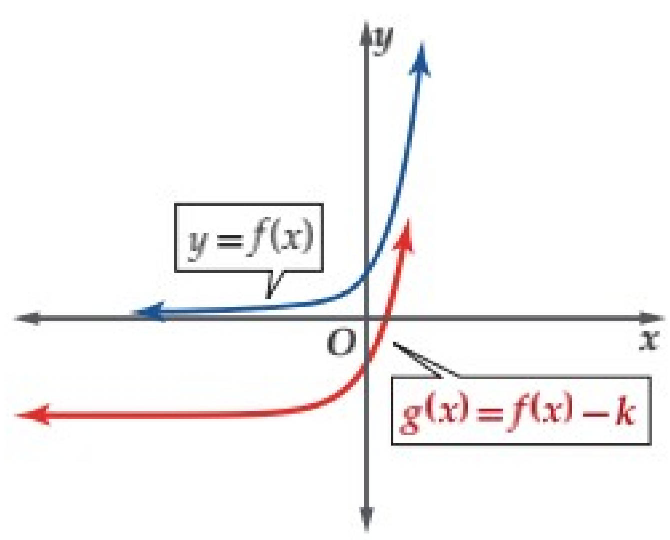
مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

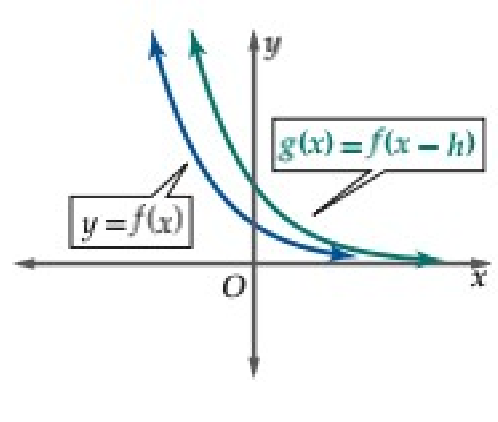


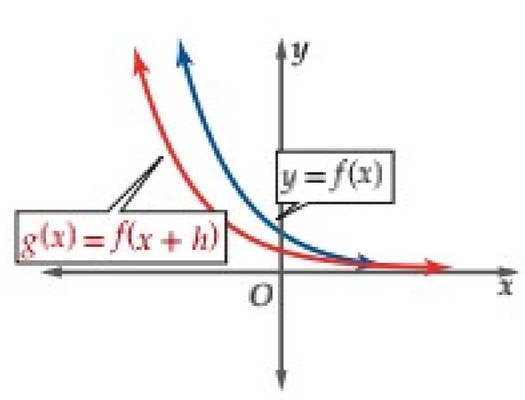


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x-h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:

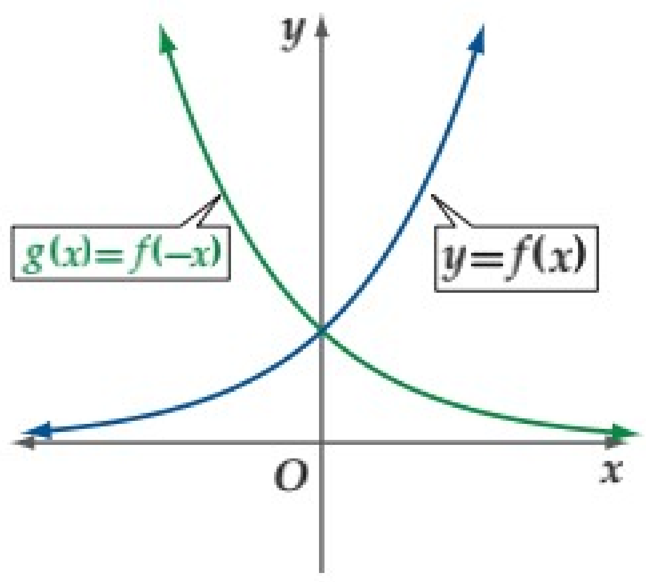
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحور y

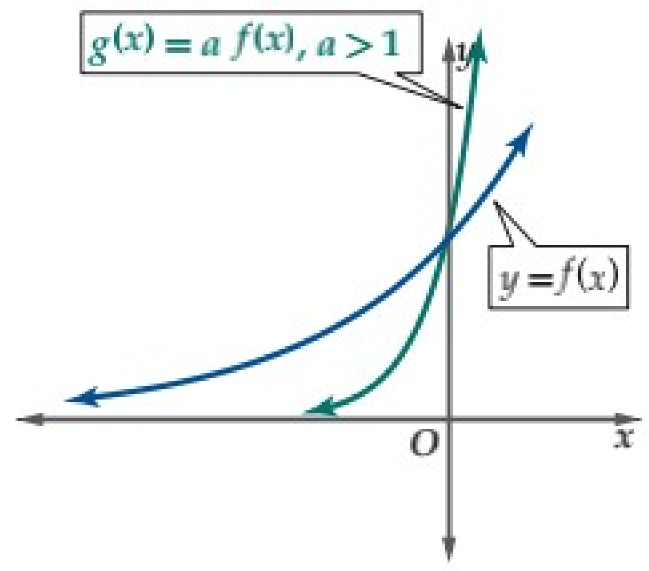
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



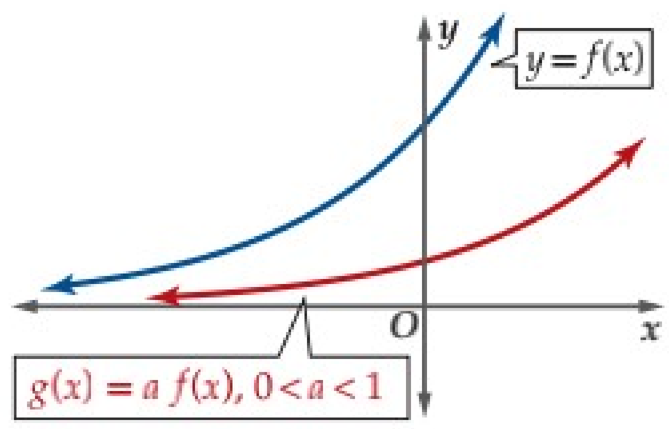
مفهوم أساسي — التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



إرشادات للدراسة

الاضمحلال الأسي: تأكد من عدم الخلط بين تضييق التمثيلات البيانية، حيث $|a| < 1$. والاضمحلال الأسي، حيث $0 < b < 1$

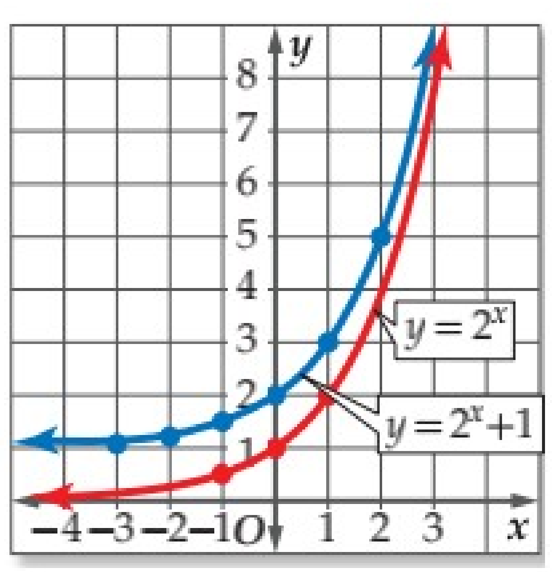
مثال 5 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدِّد مجالها، ومداها:

a) $y = 2^x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1, b)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1, 2)$، $(0, 1)$، $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$، والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$، بما أن $k = 1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثِّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبالاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.

x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^{0} + 1$	2
1	$2^{1} + 1$	3
2	$2^{2} + 1$	5



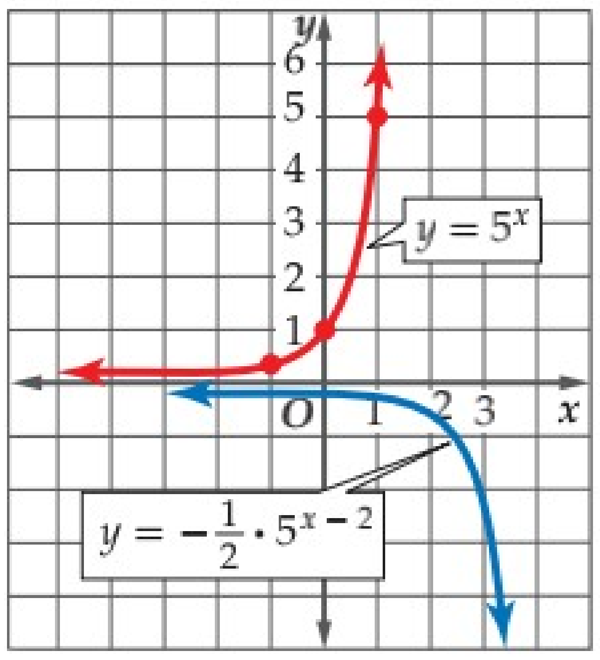
المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال $(5a)$ أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من 1. وفي المثال $(5b)$ عندما تقترب x من مالانهاية فإن y تقترب من سالب مالانهاية، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من الصفر.

$y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$ (b



حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,5)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًا.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

تحقق من فهمك

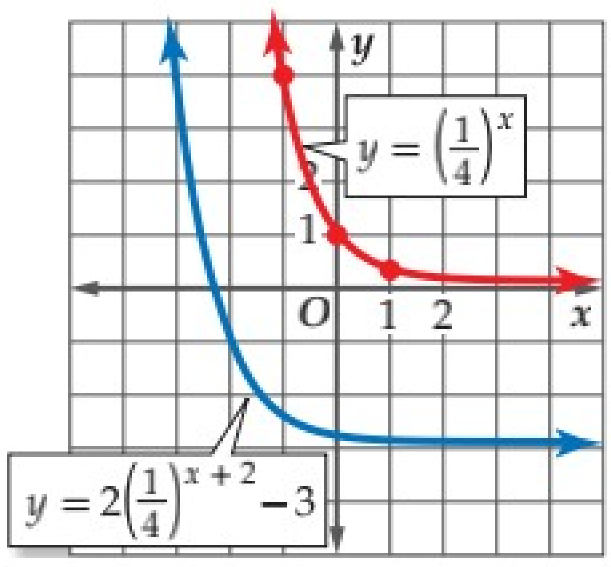
5A) $y = 2^{x+3} - 5$ 5B) $y = 0.1(6)^x - 3$

> **إرشادات للدراسة**
>
> **تمثيل تحويلات الدالة الأسية بيانياً:**
> يمكن استعمال إحدى الطريقتين الآتيتين؛ لتمثيل تحويلات دوال النمو الأسي والاضمحلال الأسي بيانيًا:
> – استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأم، وتعزيز ذلك بجدول لقيم الدالة عندما لا تكون التحويلات الهندسية كافية وواضحة؛ لمزيد من الدقة، كما في المثال 5A
> – استعمال التحويلات الهندسية للدالة الأمّ فقط، كما في المثالين 5B , 6

مثال 6 تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها.

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا استعمل النقاط $\left(1, \frac{1}{4}\right)$، $(0,1)$، $(-1,4)$



والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .

تحقق من فهمك

6) $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.: (مثال 1)

1) $y = 2^x$ ، $2^{1.5}$

2) $y = 2(8)^x$ ، $2(8)^{-0.5}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.: (مثال 2)

3) $y = 2\left(\frac{1}{6}\right)^x$ ، $2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$ 4) $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ، $3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5}$

5) **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل النمو في انتشار الفيروس منذ البداية، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانيّة. (مثال 3)

6) **سيارات:** سيارة كان سعرها 80000 ريال، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ثم مثّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدِّر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها. (مثال 4)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدّد مجالها، ومداها: (مثال 5)

7) $f(x) = 2(3)^x$

8) $f(x) = 4^{x+1} - 5$

9) $f(x) = 2^{x+1} + 3$

10) $f(x) = 3^{x-2} + 4$

11) $f(x) = 3(2)^x + 8$

12) $f(x) = 0.25(4)^x - 6$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها، ومداها: (مثال 6)

13) $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$

14) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$

15) $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$

16) $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

17) $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$

18) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$

19) **علوم:** يتكاثر نحل في خلية، فيزداد العدد بمعدل 30% كل أسبوع. إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة، فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد النحل بعد 10 أسابيع.

20) **كرة قدم:** تناقص عدد الحضور لمباريات فريق كرة قدم بمعدل 5% لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم. أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور (y) في المباراة (t)، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدّر عدد الحضور في المباراة 15.

21) **هواتف:** تناقص عدد الهواتف العمومية في الآونة الأخيرة نتيجة انتشار الهواتف المحمولة. فإذا كان عدد الهواتف العمومية بالآلاف في إحدى المدن يعطى بالدالة $P(x) = 2.28(0.9)^x$ في السنة x منذ عام 1420 هـ.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) وضّح ماذا يمثل مقطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة.

22) **صحة:** أخذ مريض حقنة، وفي كل يوم تلى ذلك، استهلك جسمه 10% مما تبقى من المادة المحقونة.

a) مثّل الدالة التي تعبّر عن هذا الموقف بيانيًّا.

b) متى يكون في جسم المريض أقل من 50% من المادة المحقونة؟

c) كم يبقى من المادة المحقونة في الجسم بعد 9 أيام؟

23) **نظرية الأعداد:** تتبع متتابعة عددية نمطًا معينًا، حيث يساوي كل حد فيها 125% من الحد السابق له، فإذا كان الحد الأول يساوي 18 فأجب عما يأتي:

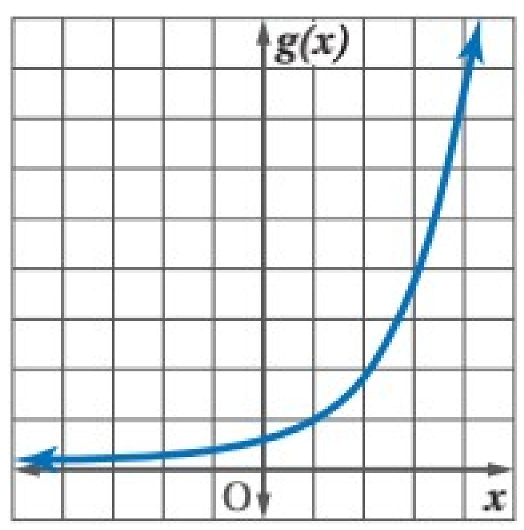
a) اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف.

b) مثّل الدالة لأول 10 حدود بيانيًّا.

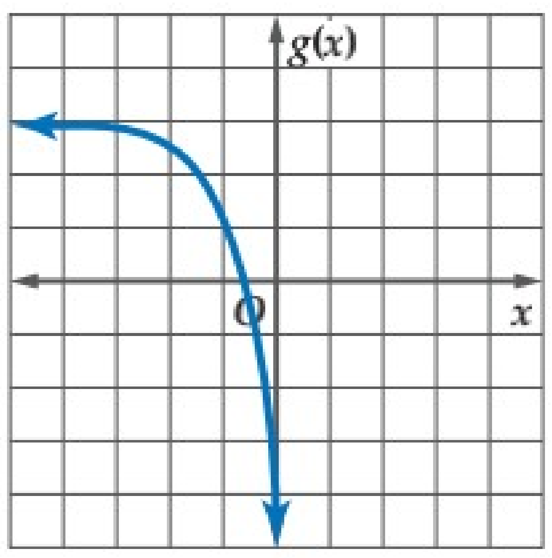
c) ما قيمة الحد العاشر؟ قرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسة (الأم) لكل دالة ممثلة بيانيًّا أدناه، والتمثيل البياني لـ $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني لـ $f(x)$، فأوجد الدالة $g(x)$:

24)



25)



26) **تمثيلات متعددة:** ستستعمل لحل هذا التمرين جداول القيم أدناه للدوال الأسية $f(x), g(x), h(x)$.

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	−1	−5	−13	−29

x	−1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	−1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a) **بيانيًّا:** مثّل كل دالة بيانيًّا في الفترة $-1 \leq x \leq 5$ على ورقة تمثيل بياني مستقلة.

b) **لفظيًّا:** أي الدوال معاملها (a) سالب؟ وضّح إجابتك.

c) **تحليليًّا:** أي الدوال تمثل نموًّا أسيًّا؟ وأيها تمثل اضمحلالًا أسيًّا؟

27) **مدارس:** يزداد عدد خريجي إحدى المدارس بمعدل 1.055 كل عام منذ عام 1434هـ. إذا كان عدد الخريجين عام 1434هـ 110 طلاب، فإن الدالة $N = 110\ (1.055)^t$ تمثل عدد الخريجين في العام t بعد العام 1434هـ. ما عدد الخريجين المتوقع في عام 1445هـ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** اكتب دالة أسية يمر منحناها بكل من النقطتين $(1, 6)$, $(0, 3)$

29) **تبرير:** حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك.

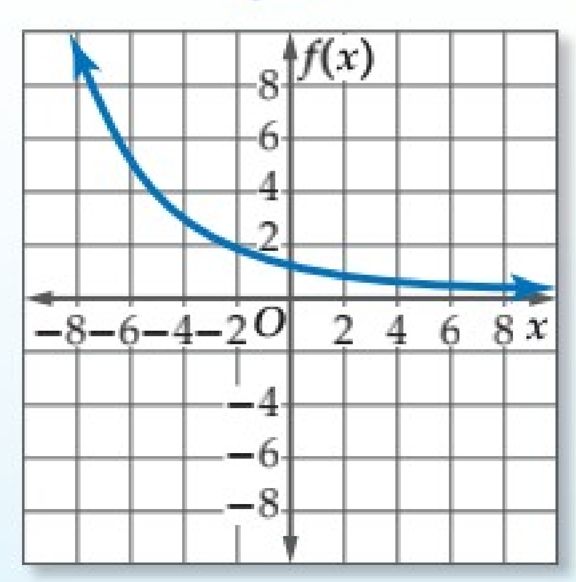
a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y.

b) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور x.

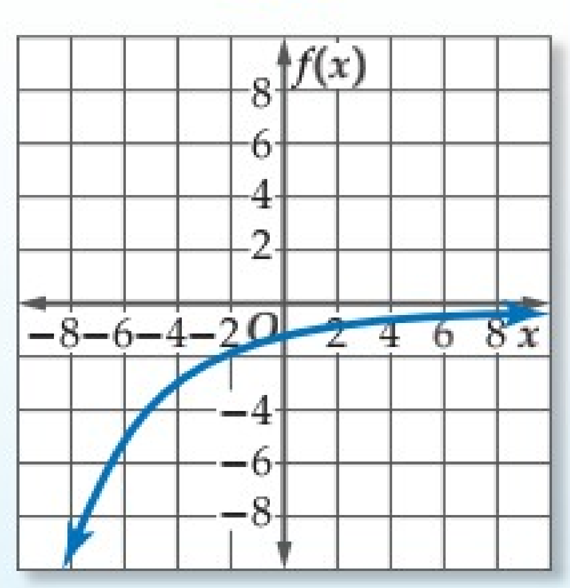
c) إذا كان b عددًا صحيحًا، فإن الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي.

30) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى عمر وماجد أن يمثّلا الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$ بيانيًّا. أي منهما تمثيله صحيح؟ وضّح إجابتك.

عمر



ماجد



31) **تحدٍّ:** تتناقص مادة بنسبة 35% مما تبقى كل يوم، إذا بقي منها $8\,mg$ بعد 8 أيام، فكم ملجرامًا من المادة كان موجودًا في البداية؟

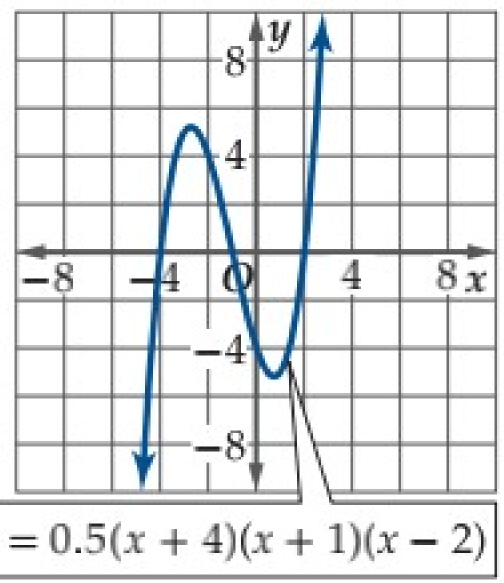
32) **مسألة مفتوحة:** أعطِ قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسّي.

33) **اكتب:** صِف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$.

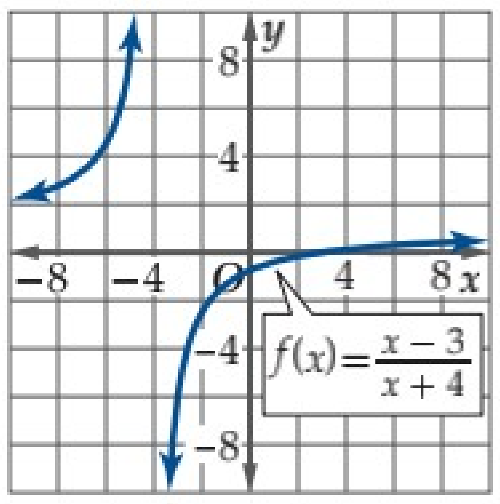
مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًّا: (الدرس 1-4)

34)



35)



استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (الدرس 1-5)

36) $f(x) = -4x + 2$

37) $f(x) = \sqrt{x+3} - 6$

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (الدرس 1-6)

38) $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

39) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار

40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ ؟

A 3
B 2
C 1
D 0

41) إذا كانت $g(x) = 4x$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ فما قيمة $(fog)(2)$؟

A $\sqrt{3}$
B $4\sqrt{3}$
C 3
D 8

استكشاف

2-2

معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الأسية

Solving Exponential Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي

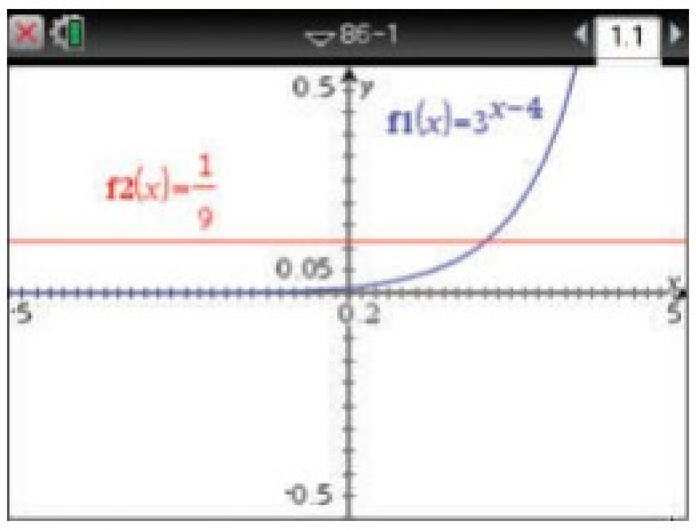
www.ien.edu.sa

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، لحل المعادلات الأسية بيانيًّا أو باستعمال خاصية الجدول.

ولعمل ذلك اكتب المعادلات الأسية على صورة نظام من المعادلات.

نشاط 1

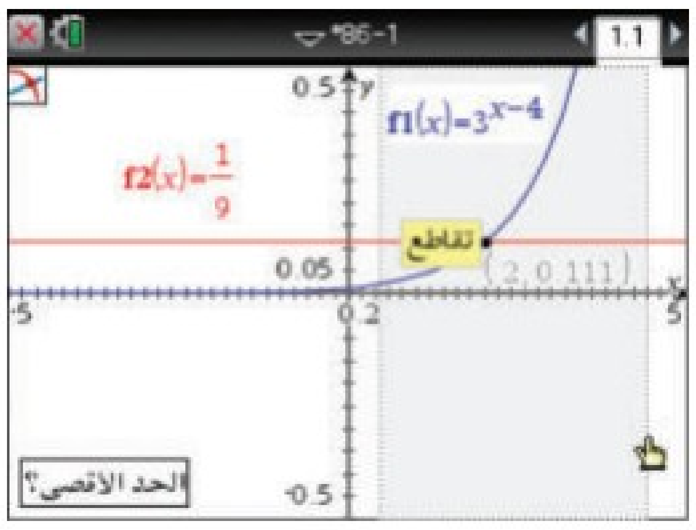
استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلة $3^{x-4} = \frac{1}{9}$



الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا في صورة دالتين مستقلتين، وأدخل 3^{x-4} في f1، و $\frac{1}{9}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

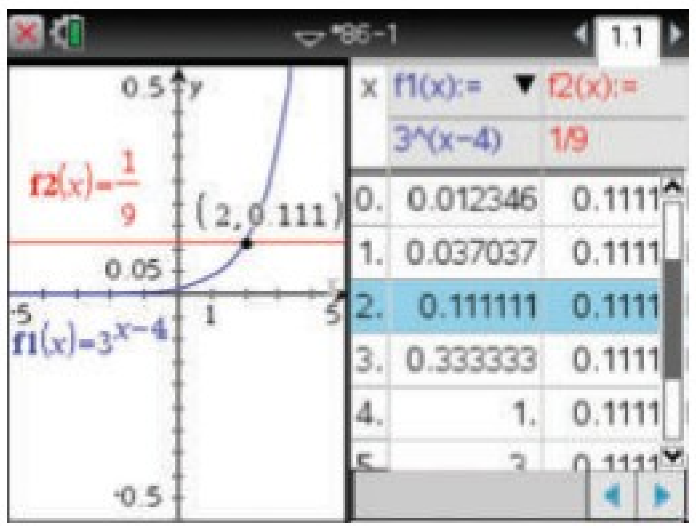
on 3^{x-4} enter tab $\frac{1}{9}$ enter



الخطوة 2: استعمال ميزة نقاط التقاطع.

إن ميزة **نقاط التقاطع** في قائمة **تحليل الرسم البياني** تمكنك من تقدير الزوج المرتب الذي يمثِّل نقطة التقاطع.

اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرِّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2, 0.111)$؛ أي أن الحل هو 2



الخطوة 3: استعمال خاصية الجدول

تستعمل هذه الخاصية عادة لإنشاء جدول لقيم الدالة؛ يسهم في تحليلها (تحديد أصفارها، وتحديد خطوط التقارب لها، وتحديد نقطة تقاطع دالتين، .. إلخ).

تحقق من صحة حلِّك باستعمال **خاصية الجدول**. اعمل جدولًا في شاشة جانبية، وذلك بالضغط على مفتاح: menu واختر منها 7: الجدول ثم اختر 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)

يبيِّن الجدول قيم x وقيم $f(x)$ أو y المناظرة لها لكل تمثيل بياني؛ فعندما $x = 2$، يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي $\frac{1}{9} \approx 0.111$، وهذا يعني أن حل المعادلة هو 2 .

التحقق عوّض عن x بـ 2 في المعادلة الأصلية.

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	المعادلة الأصلية
$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	بتعويض 2 بدلًا من x
$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	بالتبسيط
$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓	الحل صحيح

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل معادلة مما يأتي :

1) $9^{x-1} = \frac{1}{81}$

2) $4^{x+3} = 2^{5x}$

3) $5^{x-1} = 2^{x}$

4) $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$

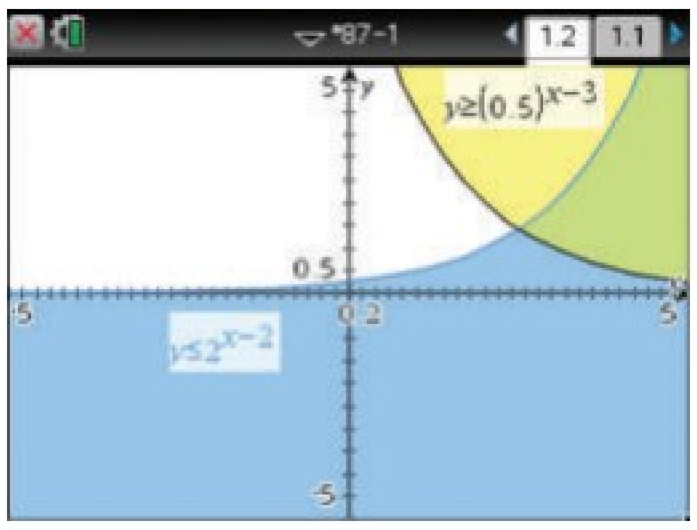
5) $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$

6) $6^{3x} = 8^{x-1}$

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل متباينات أسية.

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية لحل المتباينة $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$



الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة.

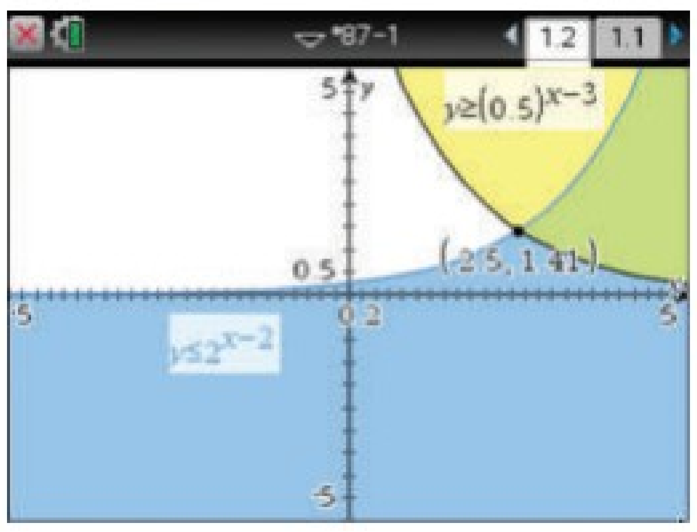
أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي: $2^{x-2} \geq y$ أو $y \leq 2^{x-2}$، والمتباينة الثانية هي: $y \geq 0.5^{x-3}$.

ثم مثِّلها بالضغط على المفاتيح:

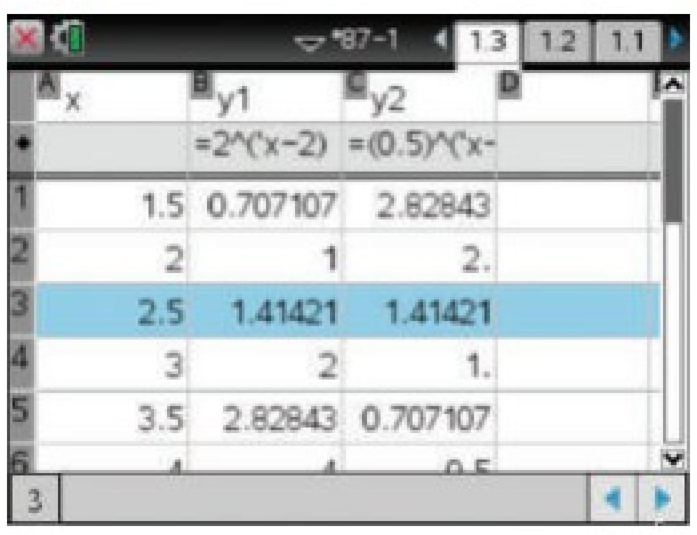
on del $\leq$ 2^{x-2} enter tab del $\geq$ 0.5^{x-3} enter

فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل

مجموعة إحداثيات x للنقاط التي تقع في منطقة تقاطع التظليلين تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأصلية، و باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** وذلك بالضغط على مفتاح menu ، واختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم اختيار 4: نقاط التقاطع والضغط في أي نقطة على الشاشة وتحريك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2.5, 1.41)$، حيث يمكن استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.



الخطوة 3: استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

تحقق من الحل باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات. أنشئ جدولًا لقيم x بزيادة 0.5 في كل مرة، وذلك بالضغط على المفاتيح: on ، واكتب $y1 = 2^{x-2}$ في العمود الثاني، $y2 = 0.5^{x-3}$ في العمود الثالث واختر مرجع المتغير في كل مرّة. لاحظ أنه لقيم x الأكبر من $x = 2.5$ تكون $y1 > y2$، وهذا يؤكد أن حل المتباينة هو $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل متباينة مما يأتي:

7) $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$　**8)** $16^{x-1} > 2^{2x+2}$　**9)** $3^x - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$

10) $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$　**11)** $12^{x-5} \geq 9.32$　**12)** $12^{4x-7} < 4^{2x+3}$

13) **اكتب:** وضح لماذا يكون تمثيل نظام من المعادلات بيانيًّا صالحًا لحل معادلات أو متباينات أسية.

2-2

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

حل المعادلات والمتباينات الأسّية
Solving Exponential Equations and Inequalities

فيما سبق:

درستُ تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. (الدرس 1-2)

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالًا أسيًا.

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation

الربح المركب
compound interest

المتباينة الأسية
exponential inequality

لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1435 هـ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في **المعادلة الأسية** في موقع الأسس.

مفهوم أساسي **خاصية المساواة للدوال الأسية**

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0 , b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$.

يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية.

مثال 1 **حل المعادلات الأسية**

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

✓ تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$

يمكنك استعمال معلومات عن النمو أو الاضمحلال لكتابة دالة أسية.

مثال 2 من واقع الحياة كتابة دالة أسية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a.

$y = ab^x$	الدالة الأسية
$7500 = a\,b^0$	بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500
$7500 = a$	$b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$	بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	بقسمة كلا الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	بإيجاد الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	باستعمال الحاسبة

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y = 7500(1.323)^x$	المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية
$= 7500(1.323)^{12}$	بالتعويض عن x بالعدد 12
≈ 215664	باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تحقق من فهمك

2) إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1436 هـ، وفي عام 1440 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1436 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1481 هـ؟

الربط مع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال العبوات المعاد تدويرها للمواد الغذائية.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال 3 الربح المركب

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2% ، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر . ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

حُلّ:

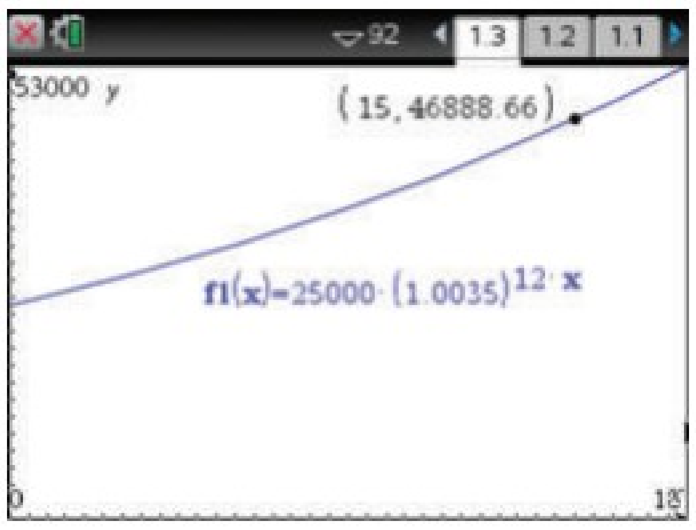
$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ صيغة الربح المركب

$= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$ $P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

≈ 46888.66 باستعمال الحاسبة

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $f(x) = 25000(1.0035)^{12x}$ ، ثم أوجد قيمة y عندما $x =$ 15 على الرسم بالضغط على مفتاح menu ثم اختر 8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات ومنها 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على الرسم البياني لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها.

اضغط esc ثم حدِّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.



تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12% ، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

> **تنبيه!**
> **نسب مئوية :** تذكر تحويل جميع النسب المئوية إلى كسور عشرية، مثل: $4.2\% = 0.042$

> **تنبيه!**
> **تقريب الأعداد:** يمكنك تقريب الأعداد الظاهرة على الشاشة، بحيث تظهر على الرسم بالشكل المناسب وذلك بالضغط على مفتاح on واختيار 5 الإعدادات ثم اختيار 2: إعدادات المستند... واختيار التقريب المناسب، وستظهر الأعداد بحسب عدد المنازل المطلوبة.

حل المتباينات الأسية : **المتباينة الأسية** هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، و إذا كان ؛ $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين ≥

مفهوم أساسي خاصية التباين لدالة الاضمحلال

التعبير اللفظي: إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ، و إذا كان ؛ $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين ≥

مثال 4 حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$ المتباينة الأصلية

$(2^4)^{2x-3} < 2^3$ $16 = 2^4 , 8 = 2^3$

$2^{8x-12} < 2^3$ خاصية قوة القوة

$8x - 12 < 3$ خاصية التباين لدالة النمو

$8x < 15$ بجمع 12 للطرفين

$x < \frac{15}{8}$ بقسمة الطرفين على 8

> **إرشادات للدراسة**
> **دالتا النمو والاضمحلال الأسي:** لاحظ أن خاصية التباين لدالة النمو تبين أن هذه الدالة متزايدة على مجالها، وأن خاصية التباين لدالة الاضمحلال تبين أن هذه الدالة متناقصة على مجالها.

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B) $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $8^{4x+2} = 64$

2) $5^{x-6} = 125$

3) $3^{5x} = 27^{2x-4}$

4) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

5) $2^{6x} = 32^{x-2}$

6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

7) $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

8) $256^{b+2} = 4^{2-2b}$

9) $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

10) $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

11) **علوم:** الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تمامًا للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسّية على الصورة $c = ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق.

b) إذا بدأت خلية بكتيرية واحدة بالانقسام، فكم خلية ستتكون بعد ساعة؟

12) **مال:** ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430 هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمَر سيصبح 169588 ريالًا بحلول عام 1442 هـ. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430 هـ.

b) افترض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 1450 هـ إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.3%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3)

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 2.25%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3)

حل كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

15) $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$

16) $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$

17) $625 \geq 5^{a+8}$

18) $10^{5b+2} > 1000$

19) $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$

20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21) $(3,100)$, $(0, 6.4)$

22) $(4, 81)$, $(0, 256)$

23) $(5,371293)$, $(0, 128)$

24) $(4, 21609)$, $(0, 144)$

25) **علوم:** وُضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسطٍ درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C، فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة.

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة.

c) إذا كانت درجة الحرارة المناسبة لشرب الشاي هي 60°C، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟

26) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًّا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6 m، وقطر قاعدة جذعها 19.1cm، فاكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة عندما يكون ارتفاعها h متر.

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي:

27) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

28) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

29) $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

30) $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

31) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

32) $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

33) **سكان:** بلغ عدد سكان العالم عام 1950م ، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

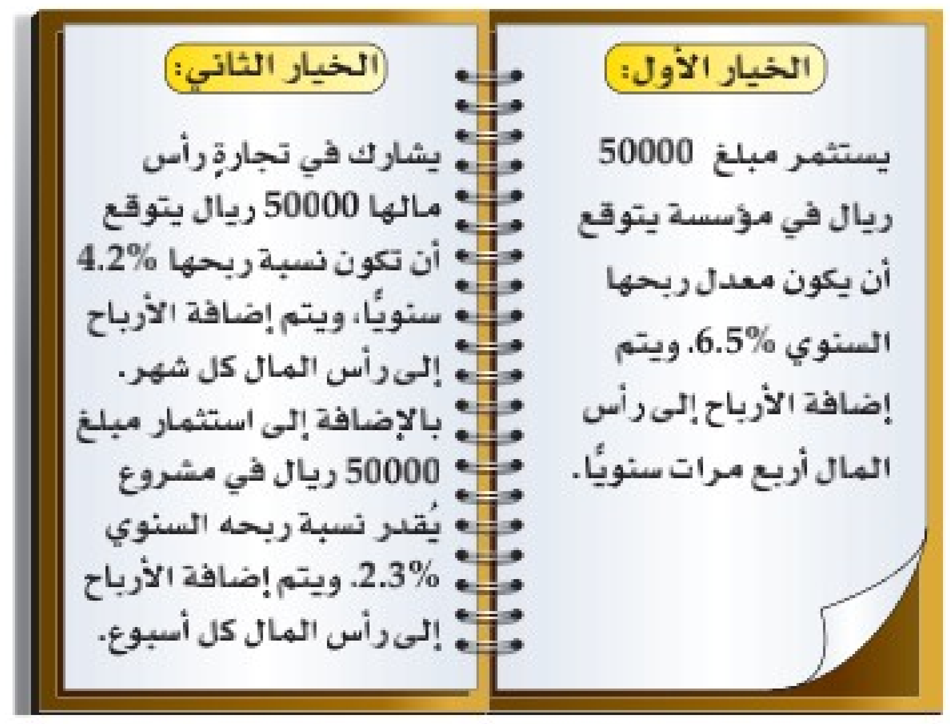
a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثِّل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرِّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف)

b) افترض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدِّر عدد سكان العالم عام 2000 .

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان.

d) استعمل الدالة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضِّح إجابتك.

34) **ثقافة مالية:** يُفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار الطويل الأمد، ويريد أن يختار أحدهما.



a) اكتب دالة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

b) مثِّل بالحاسبة البيانية منحنىً يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.

c) أي الخيارين أفضل في الاستثمار الخيار الأول أم الثاني؟ فسِّر إجابتك؟

35) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية . قصَّ ورقة إلى نصفين، وضع بعضهما فوق بعض، ثم قصَّهما معًا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض، وكرِّر هذه العملية عدة مرات.

a) **حسيًّا:** عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع.

b) **جدوليًّا:** دوِّن نتائجك في جدول.

c) **رمزيًّا:** استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد القص x مرة.

d) **تحليليًّا:** يُقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in ، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة.

e) **تحليليًّا:** ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة الأسية $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$.

37) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$.

38) **برهان:** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

39) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك

$2^x > -(8^{20x})$ لجميع قيم x .

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1–2)

40) $y = 2(3)^x$ **41)** $y = 5(2)^x$ **42)** $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $\sqrt{x+5} - 3 = 0$ **44)** $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$

45) $\sqrt[4]{2x-1} = 2$ **46)** $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$

47) $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$ **48)** $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$

أوجد $[g \circ h](x)$, $[h \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية: (الدرس 1–6)

49) $h(x) = 2x - 1$ ، $g(x) = 3x + 4$

50) $h(x) = x + 4$ ، $g(x) = |x|$

51) **أوجد الدالة العكسية للدالة:** $f(x) = 2x + 1$ (الدرس 1–7)

تدريب على اختبار

52) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$ ؟

A -1 **B** 0 **C** 1 **D** 2

53) إذا كانت $f(x) = 5x$ ، فما قيمة $f[f(-1)]$ ؟

A -25 **B** -5 **C** 5 **D** 25

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 7-1)

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثّل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات:

اللوغاريتم logarithm

الدالة اللوغاريتمية logarithmic function

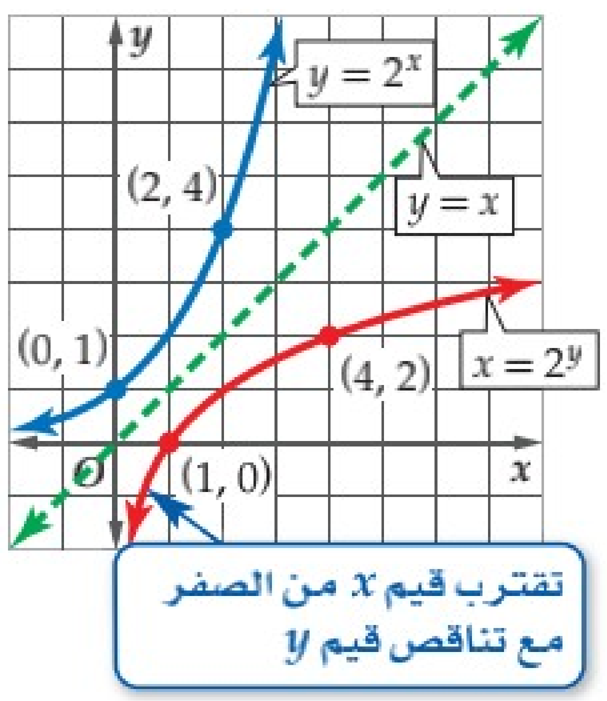
لماذا؟

يُرجِّع كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b.

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

مفهوم أساسي — اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرَّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية .

تنبيه!

أساس اللوغاريتم:
قد يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية؛ لذا استعمل لونين مختلفين لكتابة كل منهما في أثناء الحل؛ لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

a) $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

1A) $\log_4 16 = 2$

1B) $\log_3 729 = 6$

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة المعادلات الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية.

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$4 = 16^y$ تعريف اللوغاريتم

$4^1 = 4^{2y}$ $16 = 4^2$

$1 = 2y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

$\frac{1}{2} = y$ اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$\frac{1}{49} = 7^y$ تعريف اللوغاريتم

$7^{-2} = 7^y$ $\frac{1}{49} = 7^{-2}$

$-2 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي: الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:
- تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

مثال 4 استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $5^3 = 125$

$= 3$ $\log_b b^x = x$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $b^{\log_b x} = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\log_b b^x = x$

d) $\log_{10} (-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$ ، فإن $\log_{10} (-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

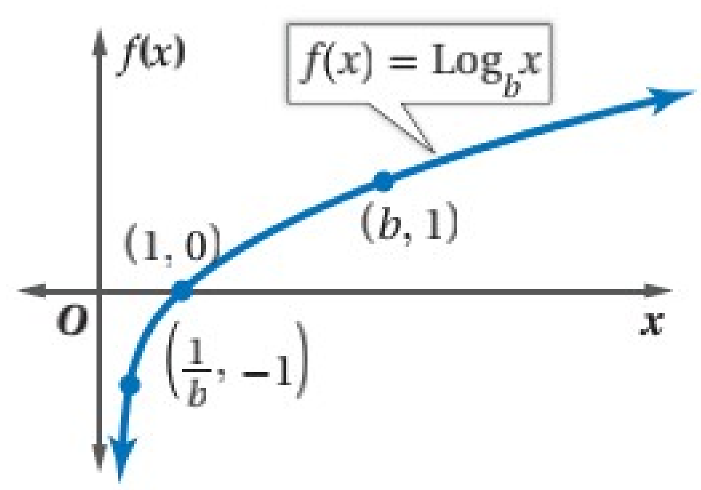
تحقق من فهمك

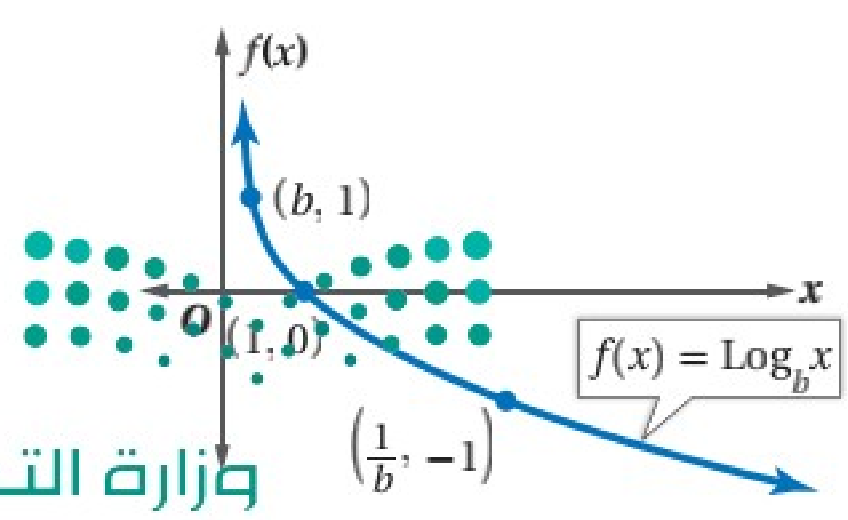
4A) $\log_9 81$ 4B) $3^{\log_3 1}$

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ ، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي: الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

	$b > 1$	$0 < b < 1$
الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x, b > 1$	$f(x) = \log_b x, 0 < b < 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب:	المحور y	المحور y
مقطع المحور x:	1	1

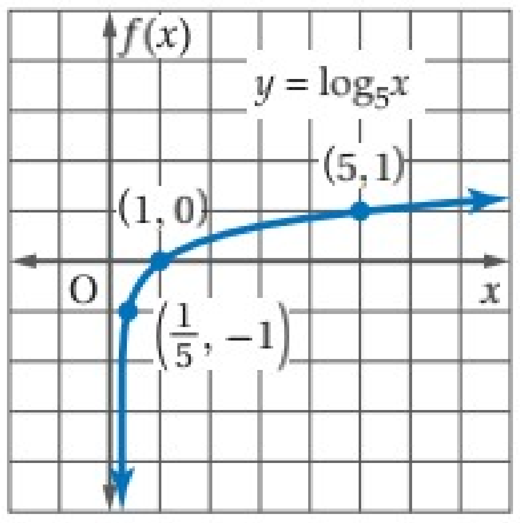




مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

a) $f(x) = \log_5 x$



الخطوة 1: حدّد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

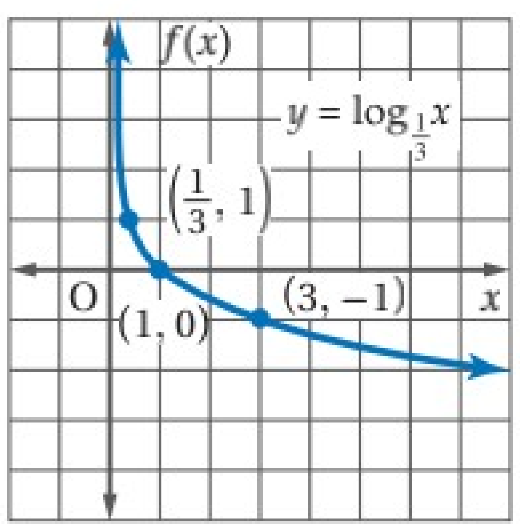
بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $(5, 1)$، $(1, 0)$، $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$.

الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $(3, -1)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.

✓ تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \log_2 x$

5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

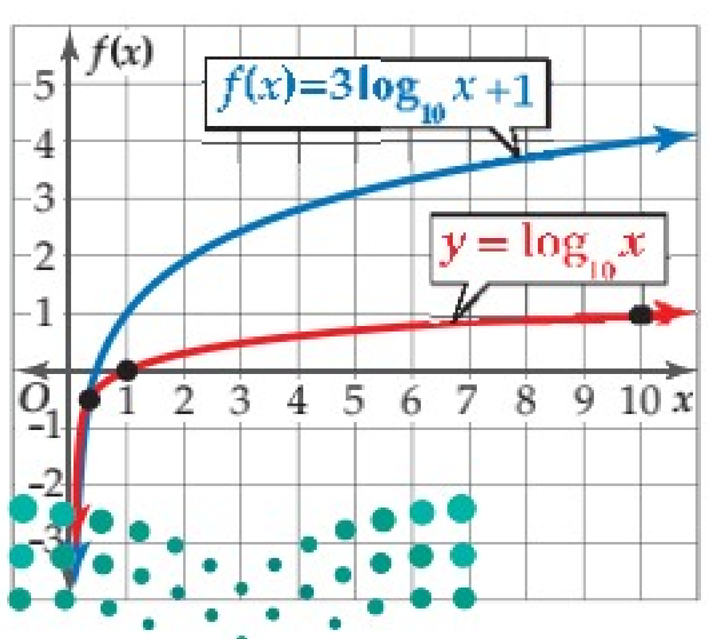
مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

a) $f(x) = 3 \log_{10} x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10>1$ فاستعمل النقاط $(b , 1)$, $(1 , 0)$, $\left(\frac{1}{b} , -1\right)$، أي النقاط $(10 , 1)$, $(1 , 0)$, $\left(\frac{1}{10} , -1\right)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

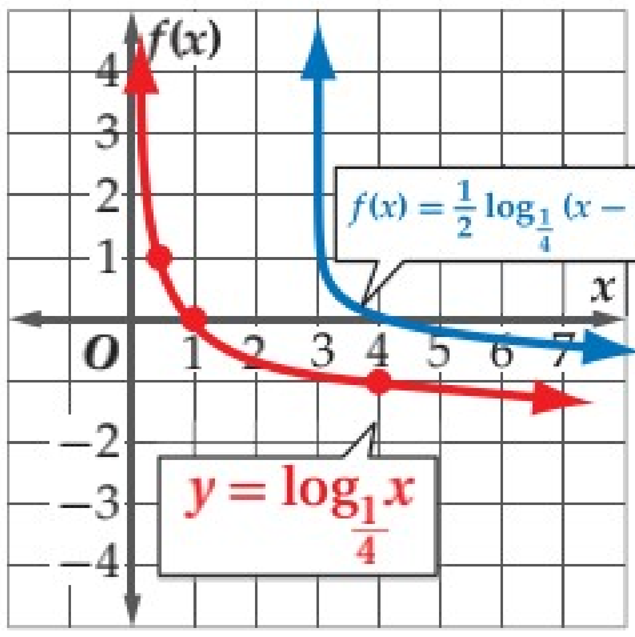


إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

b) $f(x) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x - 3)$



التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = 2 \log_3 (x - 2)$

6B) $f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - 5$

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

مثال 7 من واقع الحياة — إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوّض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بسّط
$= 158489319.2$	استعمل الحاسبة

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	أضف العدد 1 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1) $\log_8 512 = 3$
2) $\log_5 625 = 4$
3) $\log_2 16 = 4$
4) $\log_7 343 = 3$
5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
6) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
7) $\log_{12} 144 = 2$
8) $\log_9 1 = 0$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية: (مثال 2)

9) $11^3 = 1331$
10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$
11) $9^{-1} = \frac{1}{9}$
12) $6^{-3} = \frac{1}{216}$
13) $2^8 = 256$
14) $4^6 = 4096$
15) $27^{\frac{2}{3}} = 9$
16) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (المثالان 3, 4)

17) $\log_{13} 169$
18) $\log_2 \frac{1}{128}$
19) $\log_6 1$
20) $\log_4 1$
21) $\log_{10} 10$
22) $\log_{10} 0.01$
23) $\log_3 \frac{1}{9}$
24) $\log_4 \frac{1}{64}$
25) $\log_6 216$
26) $\log_{27} 3$
27) $\log_{32} 2$
28) $\log_{121} 11$
29) $\log_{\frac{1}{5}} 3125$
30) $\log_{\frac{1}{8}} 512$
31) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (المثالان 5, 6)

32) $f(x) = \log_3 x$
33) $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$
34) $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$
35) $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$
36) $f(x) = 4 \log_2 x + 6$
37) $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$
38) $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$
39) $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$
40) $f(x) = -8 \log_3 (x - 4)$
41) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

42) **علوم:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. أوجد معكوس الدالة اللوغاريتمية المعطاة. (مثال 7)

43) **تصوير:** تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أُعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟

b) مثّل الدالة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **b** لتقدير نسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات. هل يؤدي ذلك إلى زيادة الإضاءة أم نقصانها؟

44) **تربية:** لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها، ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$ ، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$ ؟

b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر؟

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟

45) مثّل الدالة $f(x) = 15 \log_{14} (x + 1) - 9$ بيانيًّا.

46) **تحليليًّا:** اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى أعلى.

47) **إعلانات:** تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الريالات بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20 \log_4(a + 1)$ ، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الريالات، $a \geq 0$.

a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم يُنفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات 10000 ريال. أوجد كلًّا من: $S(3), S(15), S(63)$.

b) فسِّر معنى كل من القيم التي أوجدتها في الفرع **a**.

c) مثّل الدالة بيانيًّا.

d) استعمل التمثيل البياني في الفرع **c** ، وإجابتك في الفرع **a** لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

48) أحياء: زمن الجيل بالنسبة للخلايا البكتيرية هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليْ ما كان عليه. فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا يُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$ ، حيث t الفترة الزمنية، b عدد الخلايا البكتيرية عند بداية التجربة، f عدد الخلايا البكتيرية عند نهاية التجربة.

a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16 h ، ما الزمن الذي تحتاج إليه 4 خلايا بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 1024 ؟

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 160000 خلية؟

c) تتكاثر بكتيريا E.coli بسرعة، بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 خلال 4.4 h . احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli .

مسائل مهارات التفكير العليا

49) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$	$\log_2 4$	$\log_2 16$	$\log_4 16$

50) تحدٍّ: إذا كان $y = \log_b x$ ، حيث b, x, y أعداد حقيقية، فإن الصفر ينتمي إلى المجال دائمًا أو أحيانًا أو لا ينتمي أبدًا. وضح إجابتك.

51) اكتشف الخطأ: يقول فهد: إن التمثيل البياني لجميع الدوال اللوغاريتمية يقطع المحور y في النقطة $(0, 1)$ ؛ لأن أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1، ولكن سليمان لم يوافقه الرأي. أيهما على صواب؟ فسر إجابتك.

52) اكتشف الخطأ: أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$ ، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

مها	مريم
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$49^y = \frac{1}{7}$	$(\frac{1}{7})^y = 49$
$(7^2)^y = (7)^{-1}$	$(7^{-1})^y = 7^2$
$7^{2y} = (7)^{-1}$	$(7)^{-y} = 7^2$
$2y = -1$	$y = -2$
$y = -\frac{1}{2}$	

53) تبرير: دون استعمال الآلة الحاسبة، بيِّن أي القيم التالية أكبر، وبرِّر إجابتك: $\log_7 51, \log_8 61, \log_9 71$

54) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ لكل من الحالات الآتية:

a) y تساوي 25

b) y عدد سالب

c) y بين 0 و 1

d) x تساوي 1

55) اكتب: إذا كان $g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$ تحويلًا للدالة اللوغاريتمية $\log_{10} x$ ، فاشرح كيفية تمثيل هذا التحويل بيانيًّا.

مراجعة تراكمية

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1-2)

56) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$ **57)** $y = -2.5(5)^x$

58) $y = 30^{-x}$ **59)** $y = 0.2(5)^{-x}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (الدرس 2-2)

60) $3^{n-2} > 27$ **61)** $2^{2n} \le \frac{1}{16}$

62) $16^n < 8^{n+1}$ **63)** $32^{5p+2} \ge 16^{5p}$

64) إذا كان $4^{x+2} = 48$ ، فأوجد قيمة 4^x؟ (الدرس 2-2)

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

65) $9^x = \frac{1}{81}$ **66)** $2^{6x} = 4^{5x+2}$

67) $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$ **68)** $9^{x^2} = 27^{x^2-2}$

تدريب على اختبار

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** 2

70) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟

A 5 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $-\frac{1}{5}$ **D** -5

71) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$ ؟

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–2 إلى 3–2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 1-2)

1) $f(x) = 3(4)^x$

2) $f(x) = -(2)^x + 5$

3) $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

4) $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5) **علوم:** بدأت تجربة مخبرية بـ 6000 خلية بكتيرية، وبعد ساعتين أصبح عددها 28000 خلية. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر ازدياد عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه، مقربًا الناتج إلى أقرب 4 منازل عشرية.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 4 ساعات؟

6) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, 125)$، $(3, 1000)$؟ (الدرس 1-2)

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

7) **سكان:** كان عدد سكان إحدى المدن 45000 نسمة عام 1995 م، وتزايد عددهم ليصبح 68000 نسمة عام 2007 م. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد سكان المدينة y بعد x سنة منذ عام 1995 م، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

b) استعمل الدالة لتقدير عدد سكان المدينة عام 2015 م.

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

8) $11^{2x+1} = 121^{3x}$

9) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

10) $5^{2x+3} \leq 125$

11) $16^{2x+3} < 64$

12) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x+3} \geq 16^{3x}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-2)

13) $f(x) = 3\log_2(x-1)$

14) $f(x) = -4\log_3(x-2) + 5$

15) $f(x) = 2 + \log_4(1+x)$

16) **اختيار من متعدد:** ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$؟ (الدرس 3-2)

A $\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$

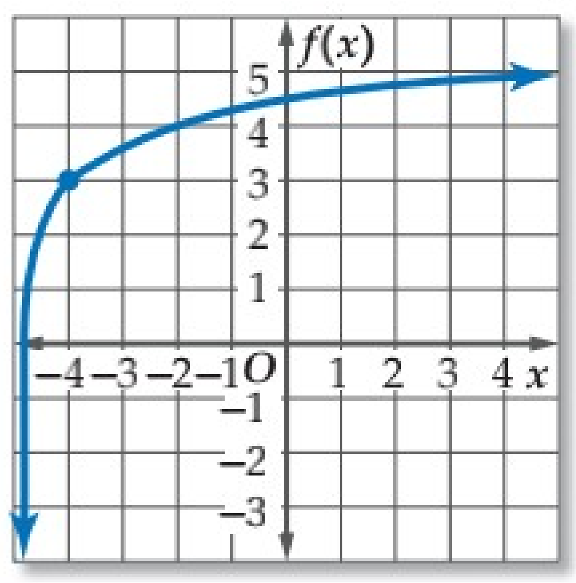
C $\log_5 625 = \frac{1}{4}$

B $\log_5 625 = 4$

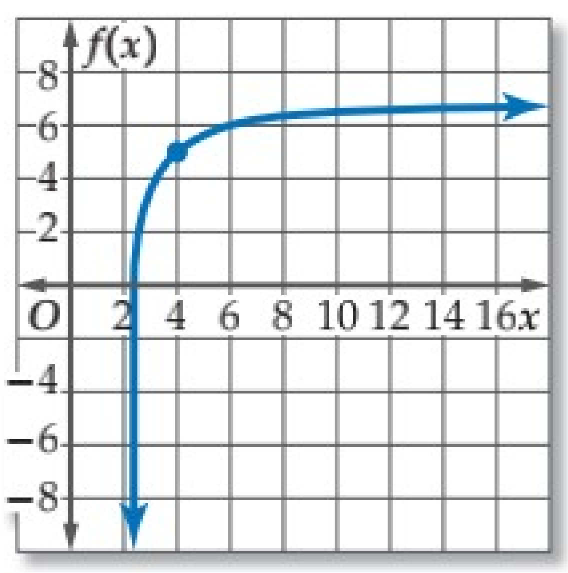
D $\log_{\frac{1}{4}} 5 = 625$

17) **اختيار من متعدد:** أي التمثيلات البيانية الآتية هو تمثيل الدالة $f(x) = \log_3(x+5) + 3$ البياني؟ (الدرس 3-2)

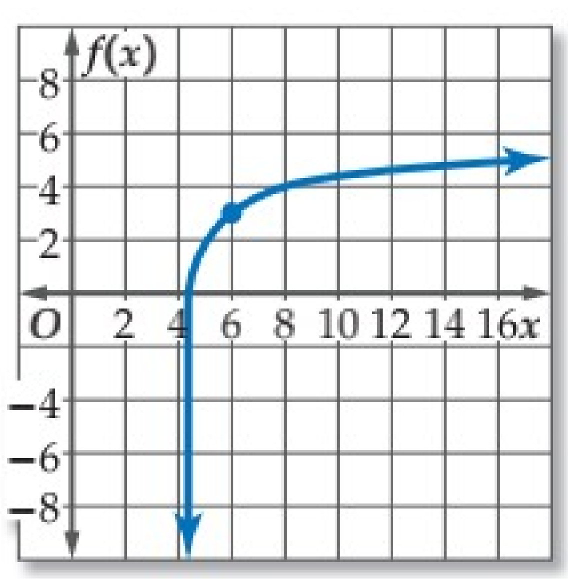
A



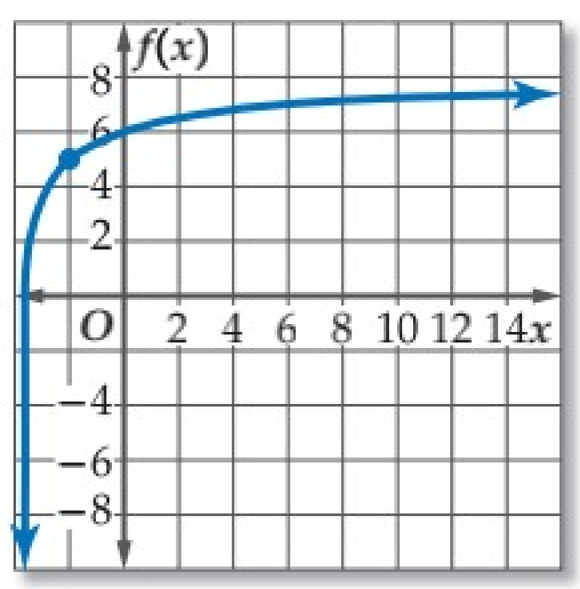
C



B



D



أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

18) $\log_4 32$

19) $\log_5 5^{12}$

20) $\log_{16} 4$

21) اكتب المعادلة $\log_9 729 = 3$ على الصورة الأسية. (الدرس 3-2)

2-4

خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية. (الدرس 3-2)

والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

مستوى pH	المادة
2.1	عصير الليمون
3.5	المخلل
4.2	الطماطم
5.0	القهوة
6.4	الحليب
7.0	الماء النقي
7.8	البيض

لماذا؟

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$\log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}} - \log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}} = pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$ والتي تكتب بالشكل:

$$pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}} = \log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}}$$ وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي — خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي — خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $b^m = x$ ، و $b^n = y$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $m = \log_b x, n = \log_b y$.

$b^m b^n = xy$	عوّض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	عوّض عن m, n بالقيمتين $\log_b x, \log_b y$ على الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2025 - 1446

مـثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$	$192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$
$= \log_4 4^3 + \log_4 3$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$= 3 + \log_4 3$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$	$\log_4 3 \approx 0.7925$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.
افترض أن $b^m = x, b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m, \log_b y = n$

$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$	
$b^{m-n} = \frac{x}{y}$	خاصية قسمة القوى
$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m - n = \log_b \frac{x}{y}$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$	عوّض عن n ، m بالقيمتين $\log_b x$ ، $\log_b y$ على الترتيب

مفهوم أساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مـثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$\log_6 7.2 = \log_6 (\frac{36}{5})$	$7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$
$= \log_6 6^2 - \log_6 5$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$= 2 - 0.8982$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$= 1.1018$	$\log_6 5 \approx 0.8982$

تحقق من فهمك

2) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	المعادلة الأصلية
$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$	$\log_{10} 1 = 0$
$4.2 = -\log_{10} [H^+]$	بسِّط
$-4.2 = \log_{10} [H^+]$	اضرب كلا الطرفين في -1
$10^{-4.2} = [H^+]$	تعريف اللوغاريتم

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$	عوِّض $[H^+] = 10^{-4.2}$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$4.2 = 4.2$ ✓	

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون.

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو. والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية، كما يظهر في الصورة أعلاه.

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي — خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48

مثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$$\log_2 25 = \log_2 5^2 \quad 5^2 = 25$$

$$= 2 \log_2 5 \quad \text{خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438 \quad \log_2 5 = 2.3219$$

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة
يمكنك التحقق من إجابة مثال 4 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $25 \approx 2^{4.6438}$.

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية.

مثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}} \quad \sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}} \quad 4^3 = 64$$

$$= \log_4 4^{\frac{3}{5}} \quad \text{خاصية قوة القوة}$$

$$= \frac{3}{5} \log_4 4 \quad \text{خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5} \quad \log_b b = 1$$

تحقق من فهمك

5A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B) $\log 7 \sqrt[6]{49}$

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة، إذ يمكنك تحويل الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح، والقوى والجذور إلى ضرب.

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$ خاصية لوغاريتم القوة

b) $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$ خاصية لوغاريتم القوة

c) $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$

$= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5}\log_3 (3-2x)$

تحقق من فهمك

6A) $\log_{13} 6a^3bc^4$ **6B)** $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$ **6C)** $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات السابقة في إعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطولة إلى الصورة المختصرة.

تنبيه!

لوغاريتم المجموع

لو غاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات.

$\log_a (x \pm 4) \neq \log a\, x \pm \log a\, 4.$

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$ بإنطاق المقام

b) $0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x$

$0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2},\ 2^6 = 64$

$= \log_7 64x^6\sqrt{x+2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

7A) $-5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$ **7B)** $\log_3 (2x-1) - \frac{1}{4}\log_3 (x+1)$

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ ،$\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $\log_4 15$
2) $\log_4 \frac{5}{3}$
3) $\log_4 \frac{3}{4}$
4) $\log_4 0.6$

استعمل $\log_4 2 = 0.5$, $\log_4 3 \approx 0.7925$, $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (المثالان 1, 2)

5) $\log_4 30$
6) $\log_4 20$
7) $\log_4 \frac{2}{3}$
8) $\log_4 \frac{4}{3}$
9) $\log_4 9$
10) $\log_4 8$

11) **تسلق الجبال:** يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. (مثال 3)

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

إذا كان $\log_6 8 \approx 1.1606$, $\log_5 7 \approx 1.2091$, $\log_3 5 \approx 1.465$, $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 4)

12) $\log_3 25$
13) $\log_5 49$
14) $\log_6 48$
15) $\log_7 81$
16) $\log_6 512$
17) $\log_7 729$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (مثال 5)

18) $\log_5 \sqrt[4]{25}$
19) $\log_2 \sqrt[5]{32}$
20) $3 \log_7 \sqrt[6]{49}$
21) $4 \log_2 \sqrt{8}$
22) $50 \log_5 \sqrt{125}$
23) $\log_3 \sqrt[5]{243}$

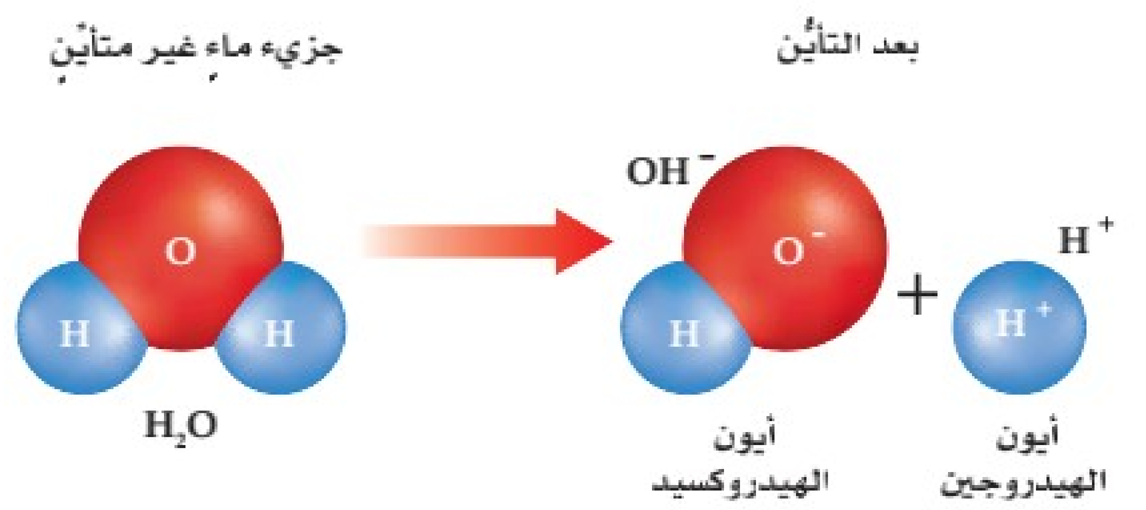
اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: (مثال 6)

24) $\log_9 6x^3y^5z$
25) $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$
26) $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$
27) $\log_4 10t^2uv^{-3}$
28) $\log_5 a^6b^{-3}c^4$
29) $\log_2 \frac{3x + 2}{\sqrt[7]{1 - 5x}}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة: (مثال 7)

30) $3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6 - x)$
31) $5 \log_7 (2x) - \frac{1}{3} \log_7 (5x + 1)$
32) $7 \log_3 a + \log_3 b - 2 \log_3 (8c)$
33) $2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x - 5)$
34) $2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c$
35) $\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z$

36) **كيمياء:** ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



أي أن صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمول لكل لتر.

a) عبّر عن $\log_{10} K_w$ بدلالة $\log_{10} [H^+]$ و $\log_{10} [OH^-]$.

b) بسّط المعادلة في الفرع a إذا علمت أن قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر ، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم غير صحيحة:

(37 $\log_8 (x-3) = \log_8 x - \log_8 3$

(38 $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

(39 $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$

(40 $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

(41 $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

(42 $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$

(43 $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

(44 $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$

(45 **هزات أرضية:** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر . إذا علمت أن قوة الهزة M تُعطى بالعلاقة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث تمثل x شدة الهزة الأرضية، فأجب عما يأتي:

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939 م	تركيا	8.0
1963 م	يوغسلافيا	6.0
1970 م	البيرو	7.8
1988 م	أرمينيا	7.0
2004 م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟ وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963 م؟

(46 استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(47 **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة.

(48 **برهان:** استعمل خصائص الأسس لبرهنة خاصية لوغاريتم القوة.

(49 **تحدٍ:** أوجد القيمة الدقيقة للعبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$

(50 **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

(51 استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 18$

مراجعة تراكمية

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسي الذي يُنتج منحنى g، ثم مثّل منحنى كل منهما بيانيًّا في كل مما يأتي (الدرس 1-2)

(52 $f(x) = 2^x\ ;\ g(x) = -2^x$

(53 $f(x) = 5^x\ ;\ g(x) = 5^{x+3}$

(54 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x\ ;\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

(55 $\log_4 16^x$

(56 $\log_3 27^x$

(57 **كهرباء:** يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير، والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث P القدرة بالواط، R المقاومة بالأوم. ما كمية التيار الكهربائي التي يستهلكها جهاز ما إذا كانت $P = 120\text{w}$، و $R = 3\Omega$.
قرِّب الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة)

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، مع ذكر السبب: (الدرس 7-1)

(58 $f(x) = x + 73, g(x) = x - 73$

(59 $g(x) = 7x - 11, h(x) = \frac{1}{7}x + 11$

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

(60 $3^{4x} = 3^{3-x}$

(61 $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$

(62 $49^x = 7^{x^2-15}$

(63 $\log_2 (x+6) = 5$

تدريب على اختبار

(64 ما قيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$ ؟

A $\log_5 2$ **C** $\log_5 3$

B $\log_5 0.5$ **D** 1

(65 ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$ ؟

A 3 **C** 1

B 2 **D** 0

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inequalites

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 4–2)

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

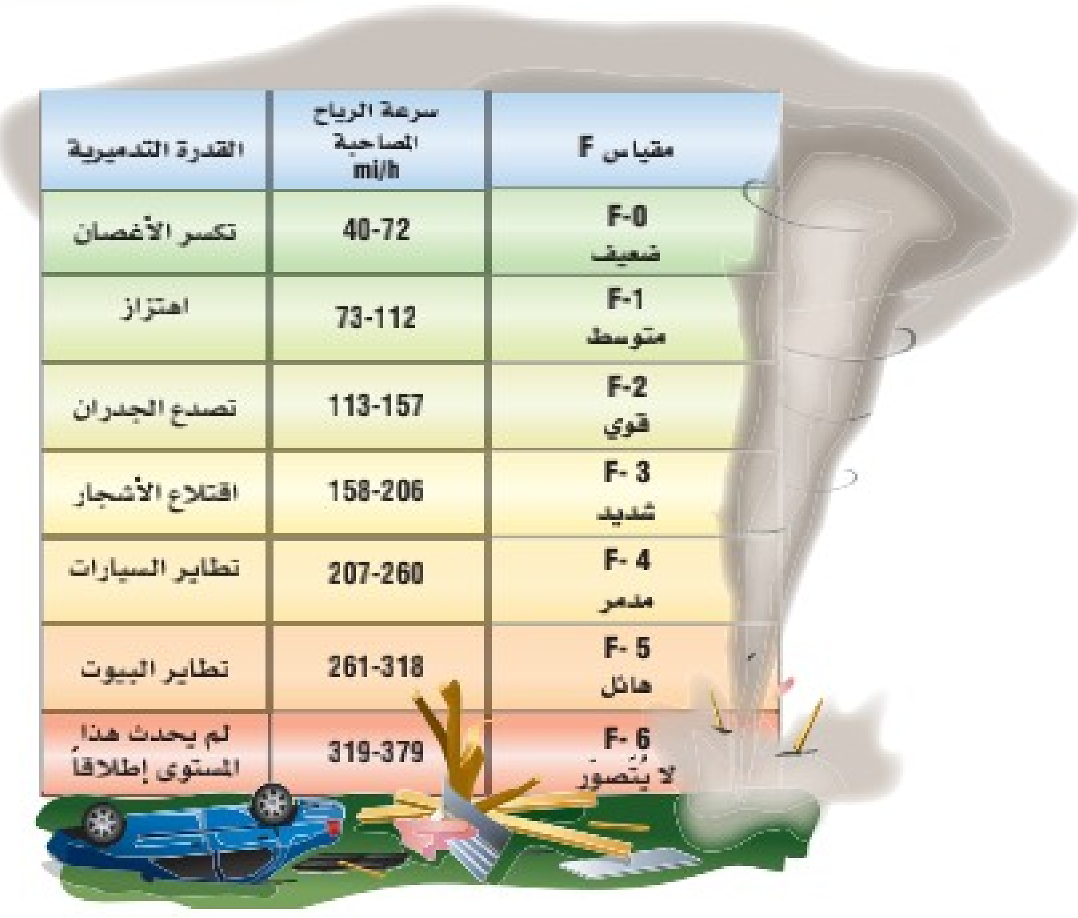
المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F–0 إلى F–6 بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وبحسب طول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة F–6 هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.



مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F- 3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F- 4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F- 5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F- 6 لا يُتصور	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3 = 216$	خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	عوّض 216 بدلًا من x
$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	حلّل
$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة
$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	بسّط
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓	الحل صحيح

تحقق من فهمك

(1A $\log_9 x = \frac{3}{2}$

(1B $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 B -1 C 2 D 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$ المعادلة الأصلية

$x^2 - 4 = 3x$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$x^2 - 3x - 4 = 0$ اطرح $3x$ من كلا الطرفين

$(x - 4)(x + 1) = 0$ حلّل إلى العوامل

$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = -1$ أو $x = 4$ حُل كل معادلة

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$

$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$

$\log_2 (-3) = \log_2 (-3)$ ✗

$x = 4$

$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$

$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2 (-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

A -3 B -1 C 5 D 15

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ المعادلة الأصلية

$\log_6 x(x - 9) = 2$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$x(x - 9) = 6^2$ تعريف اللوغاريتم

$x^2 - 9x - 36 = 0$ بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين

$(x - 12)(x + 3) = 0$ حلّ

$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = -3$ $x = 12$ حُل كل معادلة

إرشادات للدراسة

التعويض

اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة

يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6 (x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$ ، وبما أن $-3 \not> 9$ فإن $x = -3$ ليس حلًا للمعادلة.

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \overset{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \overset{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \overset{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \overset{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \overset{?}{=} 2$

$\log_6 36 \overset{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

3A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B) $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$

حل المتباينات اللوغاريتمية: **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

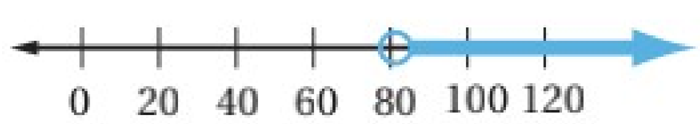
تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 4 — حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

أوجد مجموعة حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأساسية
$x > 3^4$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x > 81$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 81 , x \in R\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$x = 9$

$\log_3 9 \overset{?}{>} 4$

$2 > 4$ ✗

$x = 243$

$\log_3 243 \overset{?}{>} 4$

$5 > 4$ ✓

إذن الحل صحيح.

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية: عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفًا.

تحقق من فهمك

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلِّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي **خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية**

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 5 حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

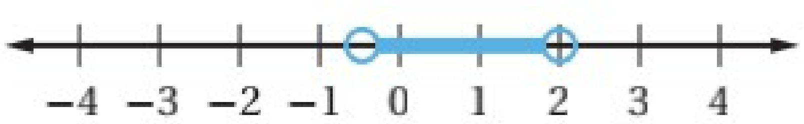
$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ المتباينة الأساسية

$x + 3 > 2x + 1$ خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$2 > x$ اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ ($x \leq -3$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x < 2 , x \in R\right\}$.



التحقق: عوّض بعدد يقع في الفترة $(-\frac{1}{2} , 2)$، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2} ، 2)$.

$x = 1$	$x = 3$
$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$	$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$
$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$	$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$
$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1	$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلِّك: (مثال 1)

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$

2) $\log_{16} x = \frac{4}{3}$

3) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$

4) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$

5) $\log_8 \frac{1}{2} = x$

6) $\log_6 \frac{1}{36} = x$

7) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

8) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (المثالان 2, 3)

9) $5 \log_2 x = \log_2 32$

10) $3 \log_2 x = \log_2 8$

11) $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

12) $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

13) $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$

14) $\log_7 (x-3) + \log_7 (x-2) = \log_7 (2x+24)$

15) $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$

16) $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلِّك: (مثال 4)

17) $\log_5 x > 3$

18) $\log_8 x \leq -2$

19) $\log_6 x < -3$

20) $\log_4 x \geq 4$

21) $\log_3 x \geq -4$

22) $\log_2 x \leq -2$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (مثال 5)

23) $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$

25) $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

26) $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$

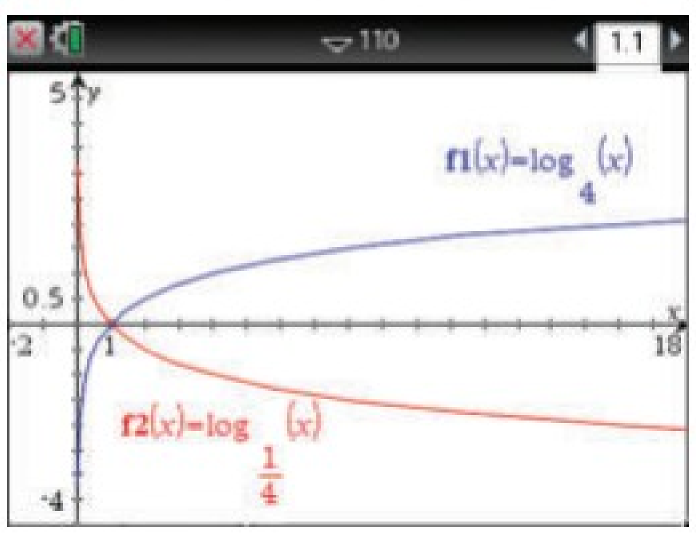
27) **صوت:** يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R هي شدة الصوت. احسب شدة صوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل.

28) **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x تمثل شدة الهزة الأرضية.

a) كم تبلغ شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر؟

b) كم مرة تبلغ شدة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بشدة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟

29) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين الدالتين $y = \log_4 x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



a) **تحليليًّا:** قارن بين منحنيي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

b) **لفظيًّا:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

c) **تحليليًّا:** صف العلاقة بين كل من الدالتين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ وما مجال ومدى كل منهما؟

30) **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ ، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

a) اكتب المعادلة بصورة أسية.

31) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1واط لكل متر مربع، وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع.

b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة الصوت الذي مقداره 10^{-2} واط لكل متر مربع، فهل تضاعف عدد وحدات الديسبل بمقدار 100مرة ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

لينا	ريم
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \leq 2^{-2}$	$x \geq 2^{-2}$
$0 < x \leq \frac{1}{4}$	$x \geq \frac{1}{4}$

33) **تحدٍّ:** أوجد قيمة

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

34) **تبرير:** نص خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية هو: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. كيف يصبح نص الخاصية إذا كان $0 < b < 1$ ، وضّح إجابتك.

35) **اكتب:** وضح العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسيّة المناظرة لها.

36) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على معادلة لوغاريتمية ليس لها حل.

37) **تبرير:** ضع خطًّا تحت التعبير الذي يجعل الجملة صحيحة، مع ذكر السبب: (علمًا بأن جميع المعادلات اللوغاريتمية المذكورة على الصورة $y = \log_b x$).

a) إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين 1 ,0 ، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

b) إذا كان أساس اللوغاريتم بين 1 ,0 وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

c) المعادلة $y = \log_b 0$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

d) المعادلة $y = \log_b 1$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

38) **اكتب:** فسّر لماذا يقطع منحنى أي دالة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ المحور x عند النقطة $(1, 0)$ ولا يقطع المحور y .

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

39) $3^{3x-2} > 81$

40) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

41) $8^{x-4} = 2^{4-x}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-2)

42) $\log_4 256$

43) $\log_2 \frac{1}{8}$

44) $\log_6 216$

45) $\log_7 2401$

بسّط كلًّا مما يأتي. مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي الصفر: (مهارة سابقة)

46) $x^5 \cdot x^3$

47) $(2p^2n)^3$

48) $\frac{x^4y^6}{xy^2}$

49) $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حًلا للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$

C -2

D 2

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-6

اللوغاريتمات العشرية
Common Logarithms

فيما سبق:

درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

(الدروس من 3–2 إلى 5–2)

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

المفردات:

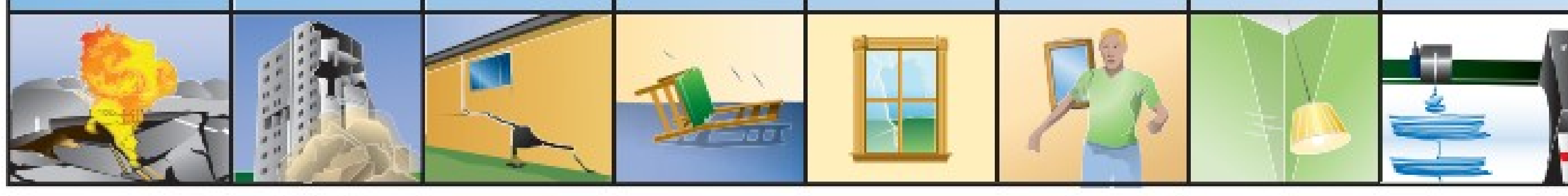
اللوغاريتم العشري
common logarithm

صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثير في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.



يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

قراءة الرياضيات

اللوغارتيم العشري

عند كتابة اللوغاريتم دون أساس، فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: ENTER 5 LOG تجد أن:

$\log 5 \approx 0.6990$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: ENTER 0.3 LOG تجد أن:

$\log 0.3 \approx -0.5229$

تحقق من فهمك

1A) $\log 7$

1B) $\log 0.5$

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90–100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

مثال 2 من واقع الحياة — حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6,\ m = 1$
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

تحقق من فهمك

2) هزات أرضية: ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

إرشادات للدراسة

وحدة الجول: تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج = 10^{-7} جول

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسّية بدلالة الأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين.

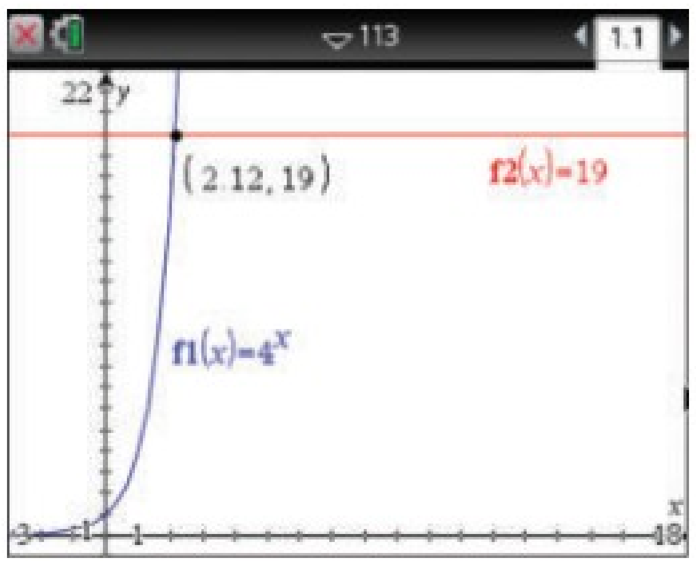
مثال 3 — حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	استعمل الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا.

تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا باستعمال ميزة **نقاط التقاطع في** الحاسبة البيانية TI–nspire.



مثّل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانيًّا على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (2.12, 19).

الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓

✓ تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$

3B) $6^x = 42$

يمكنك استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسّية لحل متباينات أسّية.

مثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

إرشادات للدراسة

حل المتباينات
تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يعكس اتجاه رمز التباين.

✓ تحقق من فهمك

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

4B) $4^y < 5^{2y+1}$

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي — صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ← $\log_b n$

لوغاريتم الأساس القديم للأساس b ← $\log_b a$

مثال: $\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	$x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي

هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (780–848م) لُقب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، أسس علم الجبر ووضع أسسه وابتكر حساب اللوغاريتمات.

مثال 5 استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$	صيغة تغيير الاساس
≈ 2.7268	استعمل الحاسبة

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$$R = \log_2 n$$ المعادلة الأصلية

$$= \log_2 240$$ $n = 240$

$$= \frac{\log 240}{\log 2}$$ صيغة تغيير الأساس

$$\approx 7.9$$ بسِّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$ **2)** $\log 21$ **3)** $\log 0.4$

4) $\log 3$ **5)** $\log 11$ **6)** $\log 3.2$

7) $\log 8.2$ **8)** $\log 0.9$ **9)** $\log 0.04$

10) **علوم:** ترتبط كمية الطاقة E المقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. (مثال 2)

11) **صوت:** أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB، إذا علمت أن ارتفاع الصوت L بالديسبل يُعطى بالعلاقة $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حد من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. (مثال 2)

a) فكم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 3)

12) $6^x = 40$

13) $2.1^{a+2} = 8.25$

14) $7^{x^2} = 20.42$

15) $11^{b-3} = 5^b$

16) $8^x = 40$

17) $9^{b-1} = 7^b$

18) $15^{x^2} = 110$

19) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

حل كلًّا مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: **(مثال 4)**

20) $5^{4n} > 33$ 21) $6^{p-1} \leq 4^{p}$

22) $3^{y-1} \leq 4^{y}$ 23) $5^{p-2} \geq 2^{p}$

24) $2^{4x} \leq 20$ 25) $6^{3n} > 36$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 5)

26) $\log_3 7$ 27) $\log_2 16$

28) $\log_4 9$ 29) $\log_3 21$

30) $\log_5 (2.7)^2$ 31) $\log_7 \sqrt{5}$

32) **شحن:** اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t عدد السنوات التي مرت منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. **(مثال 6)**

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 15% سنويًا، فما عدد السنوات التي مرت منذ شرائها لأقرب سنة؟

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 10% سنويًا، فما عدد السنوات التي مرت منذ شرائها لأقرب سنة؟

33) **علوم البيئة:** يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية؛ للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بـ 0.025 ppm (حيث ppm تعني جزءًا من المليون) ، كما أن الرقم الهيدروجيني pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5، حتى يكون الماء صالحًا للشرب.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع الرقم الهيدروجيني لمادة الزرنيخ علمًا بأن قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $\mathrm{pH} = -\log [\mathrm{H}^+]$ ؟

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها 3L من ماء بئر، فهل هذا الماء صالح للشرب؟
(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1L تقريبًا. 1 ppm = 1 mg/kg)

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يقابل الرقم الهيدروجيني pH = 9.5 والذي يجعل الماء غير صالح للشرب؟

34) **هزات أرضية:** يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة.

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم روك في كاليفورنيا عام 2007 م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في ألاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟

d) بصورة عامة ، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟

35) **تمثيلات متعددة:** ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) **جدوليًا:** أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وذلك بتغيير قيم x بمقدار 0.1 في كل مرة. وابحث عن قيمتين تقع بينهما قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول.

b) **بيانيًا:** مثّل بيانيًّا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intersect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

c) **عدديًا:** حُلّ المعادلة جبريًّا. هل طريقتا الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

بلال	خالد
$4^{3p} = 10$	$4^{3p} = 10$
$\log 4^{3p} = \log 10$	$\log 4^{3p} = \log 10$
$3p \log 4 = \log 10$	$p \log 4 = \log 10$
$p = \dfrac{\log 10}{3 \log 4}$	$p = \dfrac{\log 10}{\log 4}$

37) تحدٍّ: حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة.

38) اكتب: منحنى $g(x) = \log_b x$ هو في حقيقة الأمر تحويل هندسي لمنحنى $f(x) = \log x$. استعمل صيغة تغيير الأساس لتجد التحويل الهندسي الذي يربط بين هذين المنحنيين. ثم اشرح تأثير اختلاف قيم b على منحنى اللوغاريتم العشري .

39) برهان: أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. واكتب تخمينًا حول العلاقة بين $\log_a b , \log_b a$ ، وبرهن تخمينك.

40) اكتب: فسِّر العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وضمّن تفسيرك أمثلة شبيهة بتلك التي توضح كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال الأسس، وحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات.

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

41) $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$

42) $2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$

43) $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

44) $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$

45) $\log_9 (9x + 4) \le \log_9 (11x - 12)$

46) افترض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة.
تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ لتقدير عدد السنوات t ليصبح عدد هذا النوع من الطيور p طائرًا. بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر؟ (الدرس 2-5)

A سنتان

B 5 سنوات

C 3 سنوات

D 8 سنوات

تدريب على اختبار

47) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3 , g(x) = x - 5$؟

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثّل حلًّا للمعادلة $27 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$؟

A -4

B -2

C 2

D 4

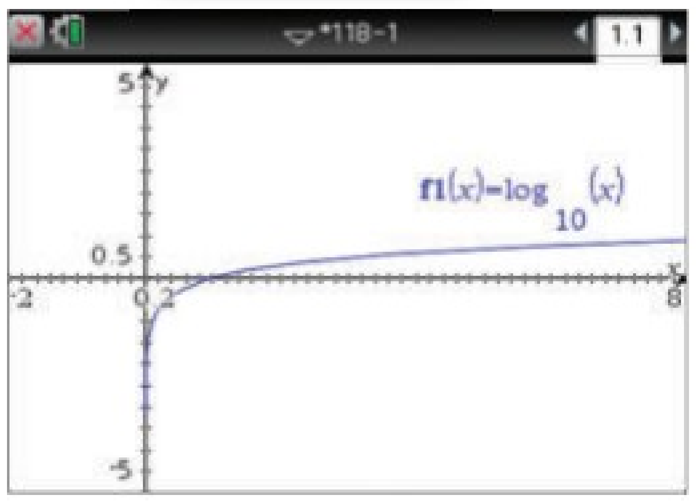
توسع

2-6 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

Solving Logarithmic Equations and Inqualites

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa



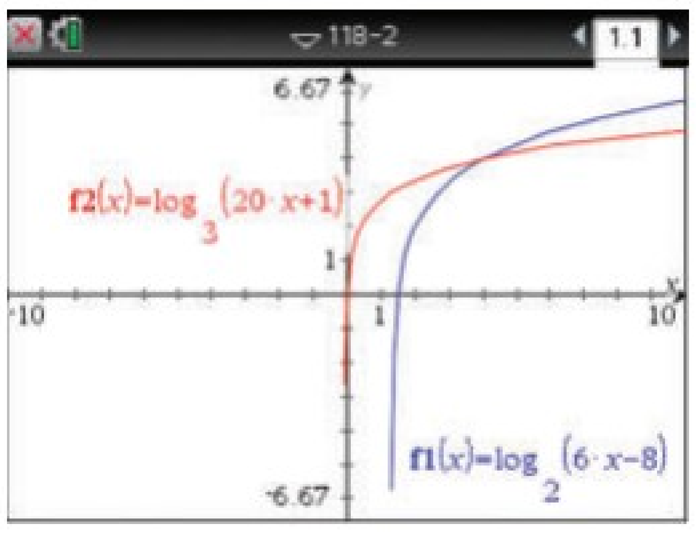
لقد قمت بحل معادلات لوغاريتمية جبريًّا، ويمكنك أيضًا حلها بيانيًّا أو باستعمال جدول.

فالحاسبة البيانية TI–nspire تحتوي على $y = \log_{10} x$ باعتباره أمرًا أساسيًّا.

اضغط على المفاتيح: enter x log (لعرض التمثيل البياني للدالة $y = \log_{10} x$، ويمكن أيضًا تمثيل الدوال اللوغارتمية بأساسات لا تساوي عشرة من دون استعمال صيغة تغيير الأساس، وذلك باستعمال أوامر مباشرة لكتابة الدالة اللوغاريتمية.

نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلة: $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.



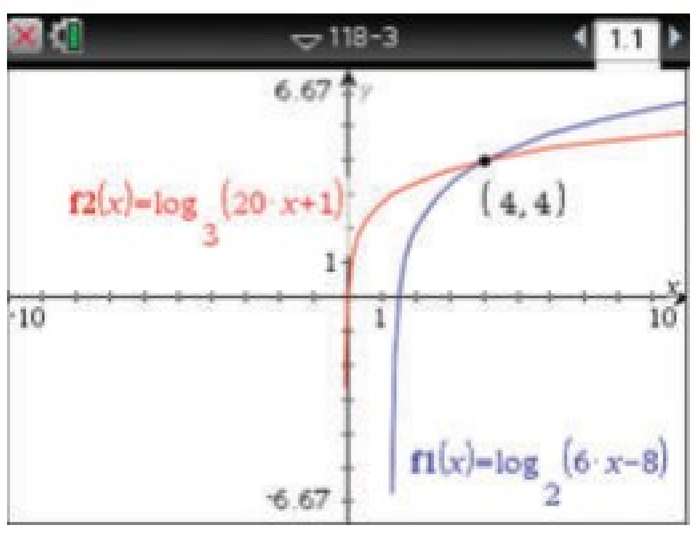
الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل كل طرف بيانيًّا على أنه دالة مستقلة.

أدخل $\log_2 (6x - 8)$؛ لتكون f1، و $\log_3 (20x + 1)$ لتكون f2 .

ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

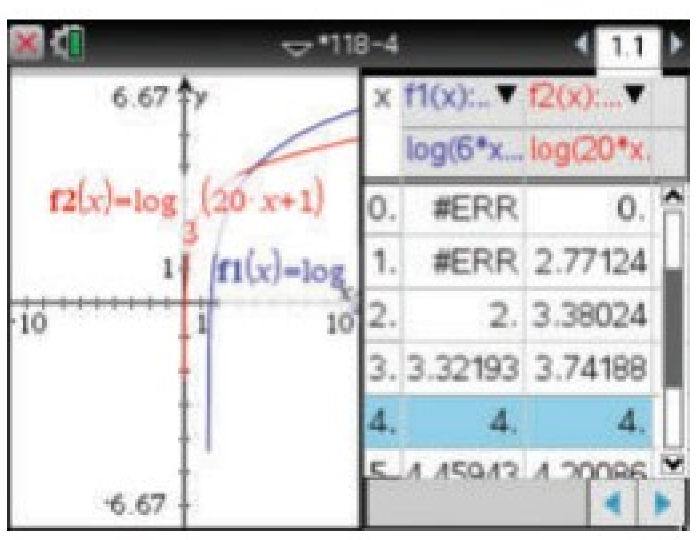
on ctrl 10^x $\log_2 (6x - 8)$ enter tab ctrl 10^x $\log_3 (20x + 1)$ enter



الخطوة 2: استعمال ميزة **نقاط التقاطع**

استعمل ميزة 4: نقاط التقاطع في قائمة 6: تحليل الرسم البياني، لتقدير إحداثيِّ الزوج المرتب لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(4, 4)$، وحيث إن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 4؛ إذن حل المعادلة يساوي 4



x	f1(x):...	f2(x):...
	log(6*x...	log(20*x...
0.	#ERR	0.
1.	#ERR	2.77124
2.	2.	3.38024
3.	3.32193	3.74188
4.	4.	4.
5.	4.45943	4.20086

الخطوة 3: استعمل خاصية **الجدول** لتتحقق من الحلّ.

تحقق من صحة حلّك باستعمال خاصية **الجدول** وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 7: الجدول ثم اختيار 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)

اختبر قيم الجدول لتجد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y للتمثيلين البيانيين وهي $x = 4$ ، عند القيمة $x = 4$، تكون قيمَتَا y للدالتين متساويتين؛ لذا فإن حل المعادلة يساوي 4.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لحل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

1) $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$

2) $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$

3) $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$

4) $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$

5) $\log_4 (3x + 7) = \log_3 (5x - 6)$

6) $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x + 7)$

7) $\log_5 (2x + 1) = \log_4 (3x - 2)$

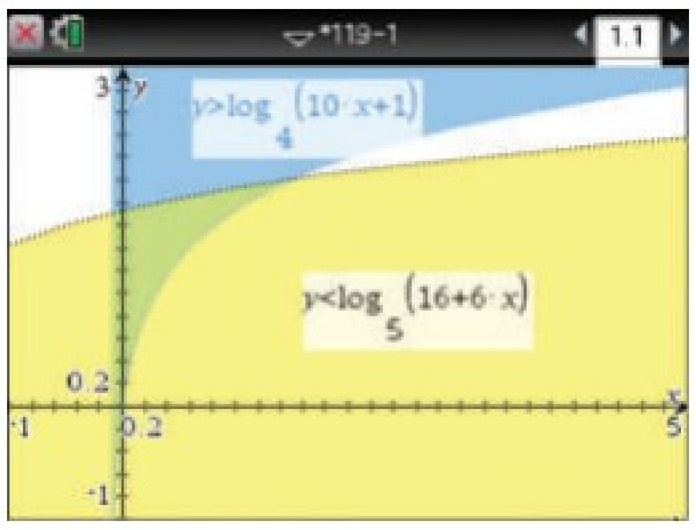
8) $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة TI–nspire لحل متباينات لوغاريتمية

نشـاط 2

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المتباينة اللوغاريتمية: $\log_4 (10x + 1) < \log_5 (16 + 6x)$.

الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة



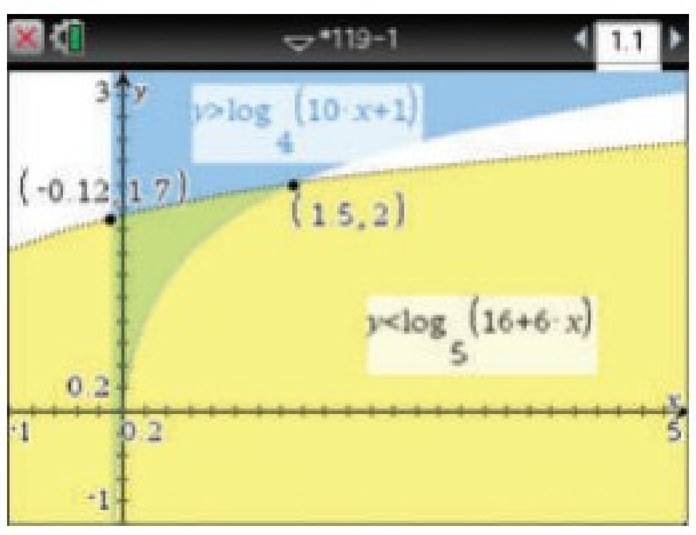
أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي $y < \log_4 (10x + 1)$ أو $y > \log_4 (10x + 1)$،

والمتباينة الثانية هي $y < \log_5 (16 + 6x)$، ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

on del > ctrl 10^x $\log_4 (10x - 1)$ enter tab del < $\log_5 (16 + 6x)$ enter

الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل



الحد الأيسر لمجموعة الحل هو عندما تكون المتباينة

الأولى غير معروفة، وهي كذلك عندما $10x + 1 \le 0$.

$$10x + 1 \le 0$$

$$10x \le -1$$

$$x \le -\frac{1}{10}$$

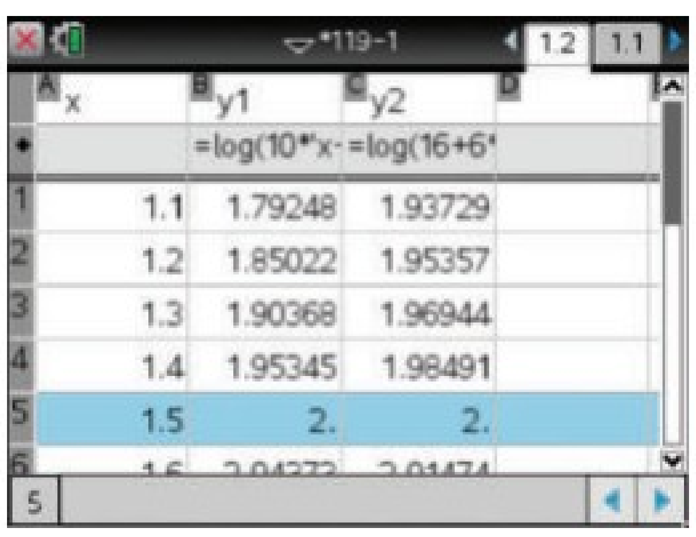
استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحد الأيمن، وذلك بالضغط على مفتاح menu

واختيار 6: تحليل الرسم البياني ومنها 4: نقاط التقاطع ثم اضغط في أي نقطة

على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (1.5, 2)،

ويمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3: استعمال ميزة تطبيق القوائم وجداول البيانات للتحقق من الحل.



ابدأ الجدول عند -0.1، واستعرض قيم x بزيادة 0.1 كل مرة، وحرك المؤشر باحثًا في الجدول.

اضغط على المفاتيح: on، واكتب $y1 = \log_4 (10x + 1)$ في العمود الثاني،

$y2 = \log_5 (16 + 6x)$ في العمود الثالث، واختر مرجع المتغير في كل مرّة، سترى أن قيم

الجدول تؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانيّة TI-nspire؛ لحل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك:

9) $\log_7 x < -1$

10) $\log_5 (12x + 5) \le \log_5 (8x + 9)$

11) $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$

12) $\log_5 (3 - 2x) \ge \log_5 (4x + 1)$

13) $\log_4 (9x + 1) > \log_3 (18x - 1)$

14) $\log_3 (3x - 5) \ge \log_3 (x + 7)$

15) $\log_5 (2x + 1) < \log_4 (3x - 2)$

16) $\log_2 2x \le \log_4 (x + 3)$

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية (الدرسان 2-2 ,2-1)

- تكون الدوال الأسية على الصورة $y = ab^x$ ، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
- خاصية المساواة للدوال الأسية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذًا وفقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين للدوال الأسية: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, b > 1$ دالة نمو أسي.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, 0 < b < 1$ دالة اضمحلال أسي.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 3-2)

- إذا كان $b > 0, b \neq 1, x > 0$ فإن الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $y = \log_b x$ هي $b^y = x$ ، والصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $x = b^y$ هي $\log_b x = y$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 4-2)

- خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- الضرب والقسمة: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
  $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
  وَ $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- لوغاريتم القوة: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b x^m = m \log_b x$.
- خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.

اللوغاريتم العشري (الدرس 6-2)

- اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم الذي أساسه 10 .
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \log b \; n \_ \log b \; a$

المفردات

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ تسمى دالة ________ .

2) في المعادلة $x = b^y$. المتغير y يسمى ________ x للأساس b .

3) يسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 ________ .

4) ________ هي معادلة يظهر فيها المتغير على صورة أس.

5) يمكنك باستعمال ________ كتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة للوغاريتم بأساس مختلف.

6) يُسمى الأساس $r - 1$ في الدالة الأسية $A(t) = a(1 - r)^t$ ________ .

7) تُسمى الدالة $y = \log_b x$، حيث $b > 0, b \neq 1$ ________

دليل الدراسة و المراجعة

مراجعة الدروس

2-1 الدوال الأسية (الصفحات 82 - 89)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها:

8) $f(x) = 3^x$

9) $f(x) = -5(2)^x$

10) $f(x) = 3(4)^x - 6$

11) $f(x) = 3^{2x} + 5$

12) $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$

13) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

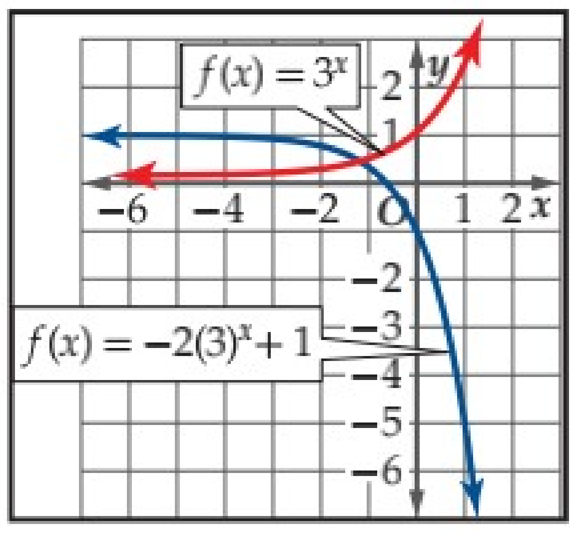
14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3% سنويًا.

a) اكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنة.

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات؟

مثال 1

مثّل الدالة $f(x) = -2(3)^x + 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.



التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$

- $a = -2$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويتسع رأسيًا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى الأعلى.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية .

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < 1\}$

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية (الصفحات 92- 96)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

15) $16^x = \frac{1}{64}$

16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$

17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$

18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$

19) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$

20) $27^{3x} \leq 9^{2x-1}$

21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية. وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبًا.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

b) ما عدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32 h؟

مثال 2

حُلّ المعادلة $4^{3x} = 32^{x-1}$.

$4^{3x} = 32^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$	أعد الكتابة لتوحيد الأساس
$2^{6x} = 2^{5x-5}$	بسّط
$6x = 5x - 5$	خاصية المساواة للأسس
$x = -5$	بسّط

الحل هو -5 .

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ على الصورة الأسية.

23) اكتب $10^2 = 100$ على الصورة اللوغاريتمية.

أوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $\log_4 256$

25) $\log_2 \frac{1}{8}$

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$

27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

مثال 3

أوجد قيمة $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$ افرض أن العبارة تساوي y

$64 = 2^y$ تعريف اللوغاريتم

$2^6 = 2^y$ $64 = 2^6$

$6 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

إذن $\log_2 64 = 6$.

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227$, $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

28) $\log_5 8$

29) $\log_5 64$

30) $\log_5 4$

31) $\log_5 \frac{1}{8}$

32) $\log_5 \frac{1}{2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة:

33) $\log_3 2x^5 y^2 z^3$

34) $\log_5 ab^{-3} c^4 d^{-2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة:

35) $3\log_2 x^2 - \frac{1}{3}\log_2(x-4)$

36) $2\log_2(z-1) - \log_2(2z-1)$

37) **هزات أرضية:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x شدة الهزة الأرضية. كم مرة تعادل شدةُ هزة أرضية سجّلت 10 درجات على مقياس ريختر شدةَ هزة أرضية أخرى سجّلت 7 درجات على المقياس نفسه؟

مثال 4

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227$, $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5(16 \times 2)$ $32 = 16 \times 2$

$= \log_5 16 + \log_5 2$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$\approx 1.7227 + 0.4307$ استعمل الحاسبة

≈ 2.1534 بسّط

مثال 5

اكتب $\log_3 x^2 y^{-4} z$ بالصورة المطولة:

العبارة هي لوغاريتم حاصل ضرب x^2, y^{-4}, z

$\log_3 x^2 y^{-4} z$

$= \log_3 x^2 + \log_3 y^{-4} + \log_3 z$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_3 x - 4\log_3 y + \log_3 z$ خاصية لوغاريتم القوة

دليل الدراسة و المراجعة

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية (الصفحات 112 - 117)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي إن أمكن، ثم تحقق من صحة حلك:

38) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

39) $\log_{2} \frac{1}{64} = x$

40) $\log_{4} x < 3$

41) $\log_{5} x < -3$

42) $\log_{9} (3x - 1) = \log_{9} (4x)$

43) $\log_{2} (x^2 - 18) = \log_{2} (-3x)$

44) $\log_{3} (3x + 4) \le \log_{3} (x - 2)$

45) **صوت:** استعمل القانون $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث L ارتفاع الصوت، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد الفرق بين ارتفاع أصوات 20 شخصًا يتكلمون في الوقت نفسه وارتفاع صوت شخص واحد على فرض أن الشدة النسبية لصوت الشخص الواحد يساوي 80 dB .

مثال 6

حُلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$	المعادلة الأصلية
$\log_3 3x(4) = \log_3 36$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$3x(4) = 36$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$12x = 36$	اضرب
$x = 3$	اقسم كلا الطرفين على 12

التحقق:

$$\log_3 3x + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 3\times 3 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 9 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 (9 \times 4) \stackrel{?}{=} \log_3 36$$

$$\log_3 36 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$

الحل صحيح.

مثال 7

حُلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$	المتباينة الأصلية
$x < 27^{\frac{2}{3}}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x < 9$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x < 9 , x \in R\}$

التحقق:

عوض بعدد أقل من 9، وعدد أكبر من 9 في المتباينة الأصلية

$x = 1$	$x = 27$
$\log_{27} 1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$\log_{27} 27 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 < \frac{2}{3}$ ✓	$1 < \frac{2}{3}$ ✗

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

46) $3^x = 15$

47) $6^{x^2} = 28$

48) $8^{m+1} = 30$

49) $12^{r-1} = 7^r$

50) $3^{5n} > 24$

51) $5^{x+2} \leq 3^x$

52) اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a) $\log_4 11$

b) $\log_2 15$

53) **مال:** استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري، وتوقع ربحًا سنويًّا نسبته 5%، وتضاف الأرباح إلى رأس المال كل 4 أشهر. استعمل القانون $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$، حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدّل الربح السنوي، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

a) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي 15000 ريال؟

b) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ الأصلي؟

مثال 8

حُلّ المعادلة: $5^{3x} = 7^{x+1}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$5^{3x} = 7^{x+1}$	المعادلة الأصلية
$\log 5^{3x} = \log 7^{x+1}$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$3x \log 5 = (x+1) \log 7$	خاصية القوة للوغاريتمات
$3x \log 5 = x \log 7 + \log 7$	خاصية التوزيع
$3x \log 5 - x \log 7 = \log 7$	اطرح $x \log 7$ من كلا الطرفين
$x(3 \log 5 - \log 7) = \log 7$	أخرج x عامل مشترك
$x = \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $3 \log 5 - \log 7$
$x \approx 0.6751$	استعمل الحاسبة

تطبيقات ومسائل

54) أسعار: تزداد أسعار السلع سنويًّا؛ بسبب ما يسمى التضخم. ونتيجة لذلك، يزداد سعر إحدى السلع بمعدل 4.5% سنويًّا، ويُعطى سعر هذه السلعة بالدالة $M(t)=275(1.045)^t$، حيث t عدد السنوات بعد عام 1432هـ (الدرس 2-1)

a) كم كان سعر السلعة عام 1432هـ؟

b) إذا استمر تضخم سعر السلعة بمعدل 4.5% سنويًّا، فكم سيكون سعرها عام 1447هـ تقريبًا؟

55) سيارات: ينخفض سعر سيارة جديدة سنويًّا بدءًا من لحظة شرائها، ويُعطى سعر هذه السيارة بعد t سنة من شرائها بالمعادلة $f(t) = 80000(0.8)^t$. (الدرس 2-2)

a) ما معدل انخفاض سعر السيارة سنويًّا؟

b) متى يصبح سعر السيارة مساويًا لنصف سعرها الأصلي؟

56) استثمار: ورثت فاطمة عن والدها مبلغ 250000 ريال، واستثمرته في مشروع، وتزايد كما في الجدول أدناه: (الدرس 2-2)

السنة	المبلغ (ريال)
1422 هـ	250000
1430 هـ	329202
1435 هـ	390989

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لإيجاد المبلغ الكلي بعد t سنة من الاستثمار.

b) إذا استمر تزايد المبلغ بالمعدل نفسه، ففي أي سنة يصبح المبلغ الكلي 500000 ريال تقريبًا؟

57) كيمياء: يُعطى عدد السنوات t اللازمة لاضمحلال الكمية الأصلية N_0 جرام من مادة مشعة لتصبح N جرام بالمعادلة

$$t = \frac{16 \log_{10} \frac{N}{N_0}}{\log_{10} \frac{1}{2}}$$ (الدرس 2-3)

a) بشكل تقريبي، بعد كم سنة تقريبًا يضمحل 100g من المادة المشعة لتصبح 30g؟

b) ما النسبة التقريبية لما يتبقى من 100g بعد 40 سنة؟

58) زلازل: مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. وتعتمد درجة مقياس ريختر R على الطاقة الصادرة عن الزلزال E بوحدة الكيلوواط لكل ساعة. وتُعطى R بالعلاقة:

$$R = 0.67 \cdot \log_{10} (0.37E) + 1.46$$ (الدرس 2-5)

a) أوجد قيمة R لزلزال أصدر 1000000 كيلو واط في الساعة.

b) قدّر كمية الطاقة الصادرة عن زلزال قوّته 7.5 على مقياس ريختر.

59) أحياء: يعرّف زمن الجيل G بأنه الزمن اللازم ليصبح عدد فصيلة نادرة من الحيوانات مثلي ما كان عليه، ويُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الفترة الزمنية. إذا كان زمن الجيل لهذه الفصيلة 6 سنوات، ويوجد الآن من هذه الفصيلة 5 حيوانات، فما الفترة الزمنية اللازمة ليصبح عدد حيوانات هذه الفصيلة 3125 حيوانًا؟ (الدرس 2-5)

60) صوت: تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع (I)، وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$ (الدرس 2-6)

a) حدّد شدة الصوت إذا كان عدد وحدات الديسبل 100.

b) قارنت سميرة الصوت في الفرع a مع صوت آخر عدد وحدات الديسبل فيه 50 ديسبل ، فاستنتجت أن شدّة الصوت الثاني تساوي نصف شدّة الصوت الأول. هل استنتاجها صحيح؟ برّر إجابتك.

c) صوت شدّته 1×10^{-8} واط لكل متر مربع. كم يزيد عدد وحدات الديسبل إذا ضوعفت شدته؟

61) مال: السعر الأصلي لسلعة 8000 ريال، وازداد سعرها باستمرار؛ بسبب التضخم بطريقة الربح المركب حتى بلغ 12000 ريال بعد 5 سنوات. (الدرس 2-6)

a) إذا كان معدل التضخم 6% سنويًّا، فبعد كم سنة يصبح سعر السلعة 12000 ريال ؟

b) ما معدل التضخم الذي يصبح عنده سعر السلعة 12000 ريال بعد 5 سنوات؟

اختبار الفصل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

1) $f(x) = 3^{x-3} + 2$

2) $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك:

3) $8^{c+1} = 16^{2c+3}$

4) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^x$

5) $2^{a+3} = 3^{2a-1}$

6) $\log_2 (x^2 - 7) = \log_2 6x$

7) $\log_5 x > 2$

8) $\log_3 x + \log_3 (x-3) = \log_3 4$

9) $6^{n-1} \le 11^n$

استعمل $\log_5 11 \approx 1.4899$, $\log_5 2 \approx 0.4307$، لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_5 44$

11) $\log_5 \frac{11}{2}$

12) **سكان:** كان عدد سكان مدينة ما قبل 10 أعوام 150000 نسمة، ثم تزايد بعد ذلك عددهم بمعدل ثابت كل سنة، ليصبح الآن 185000 نسمة.

a) اكتب دالة أسية يمكن أن تمثّل عدد السكان بعد x سنة إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية.

b) كم يصبح عدد السكان بعد 25 سنة؟

13) اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ على الصورة الأسية.

14) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟

A -3 | C $\frac{1}{3}$

B $-\frac{1}{3}$ | D 3

15) **زراعة:** تمثّل المعادلة $y = 3962520(0.98)^x$ تراجع عدد المزارع في بلد ما، حيث x عدد الأعوام منذ عام 1380 هـ، y عدد المزارع.

a) كيف يمكنك أن تعرف أن عدد المزارع يتناقص؟

b) بأي نسبة يتناقص عدد المزارع؟

c) تنبأ بعد كم سنة يصبح عدد المزارع مليون مزرعة.

16) **توفير:** استثمر سلمان مبلغ 75000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 9% ، بحيث يتم إضافة الأرباح إلى رأس المال شهريًّا .

a) ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات؟

b) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ المستثمر عند البداية؟

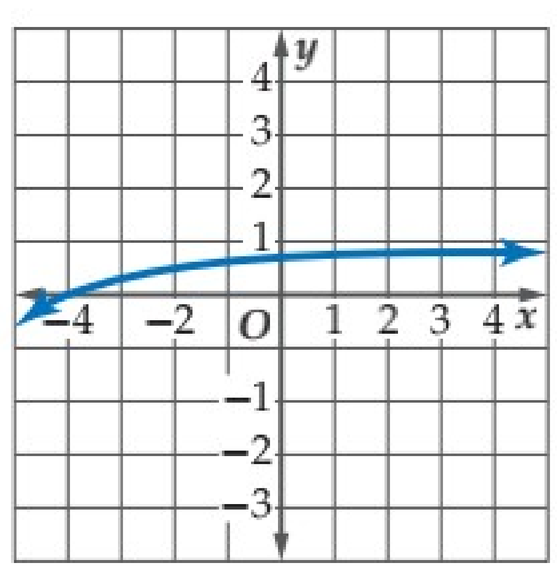
c) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي 100000 ريال؟

17) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟

A $\frac{1}{2}$ | C 2

B 4 | D 8

18) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية لها التمثيل البياني أدناه؟



A $y = \log_{10}(x-5)$

B $y = 5\log_{10} x$

C $y = \log_{10}(x+5)$

D $y = -5\log_{10} x$

19) اكتب العبارة اللوغاريتمية $-2\log_3 x + 6\log_3 (z-2) + \log_3 t^2$ بالصورة المختصرة.

الصيـغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

خاصية لوغاريتم القوة	$\log_b x^p = p\log_b x$	الربح المركب	$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
صيغة تغيير الأساس	$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات	$\log_b xy=\log_b x+\log_b y$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$\log_b \frac{x}{y}=\log_b x-\log_b y$		

الهندسة الإحداثية

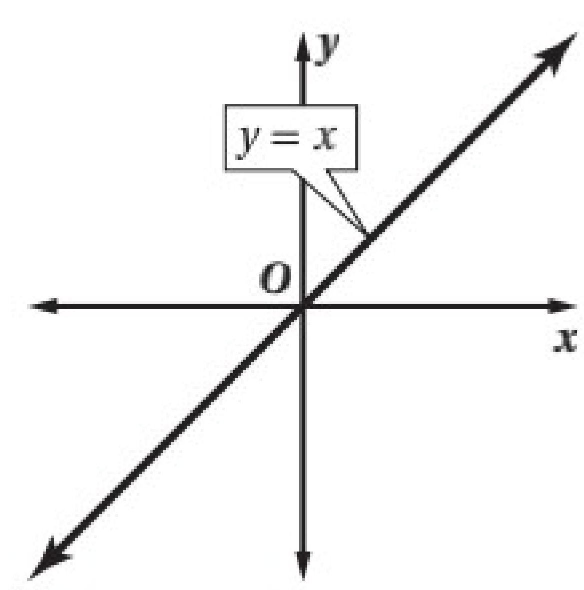
المسافة	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	نقطة المنتصف	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
الميل	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2\neq x_1$		

كثيرات الحدود

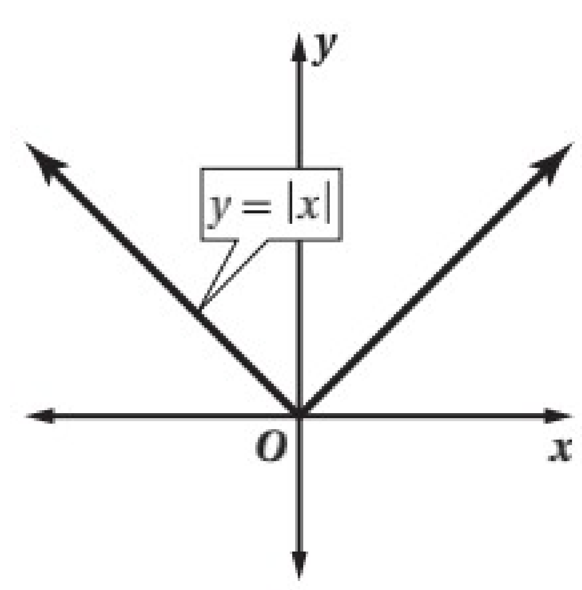
القانون العام	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, a\neq 0$	مربع الفرق	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
مربع المجموع	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	الفرق بين مربعين	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

التمثيل البياني للدوال الرئيسة (الأم)

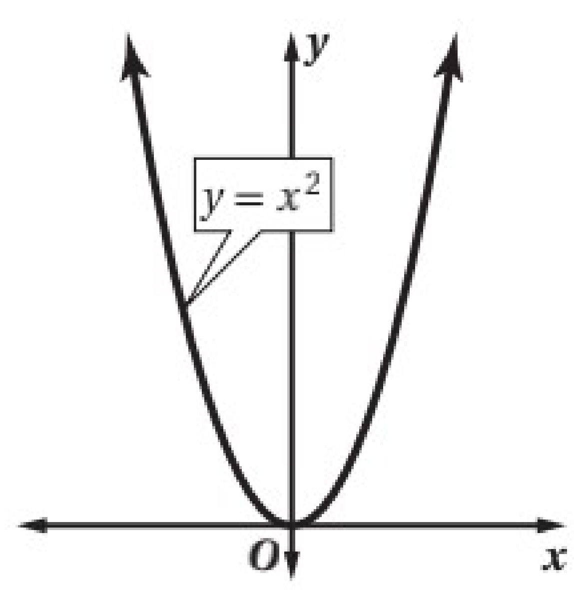
الدالة المحايدة



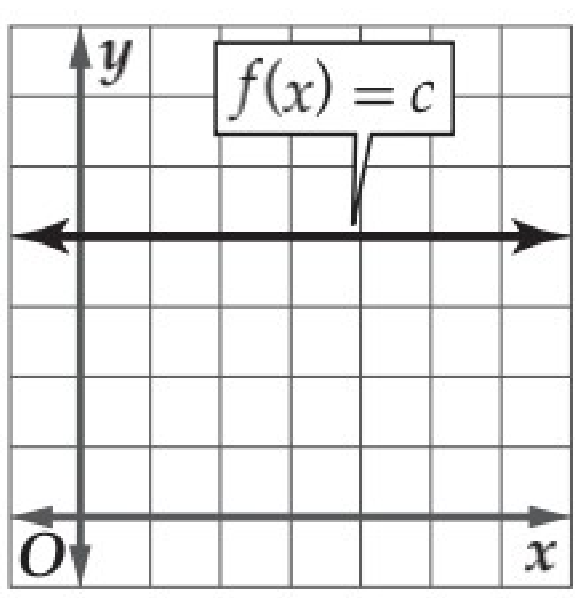
دالة القيمة المطلقة



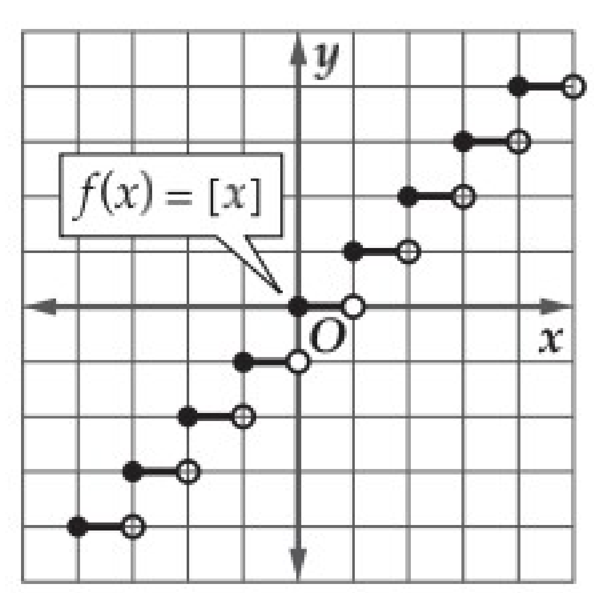
الدالة التربيعية



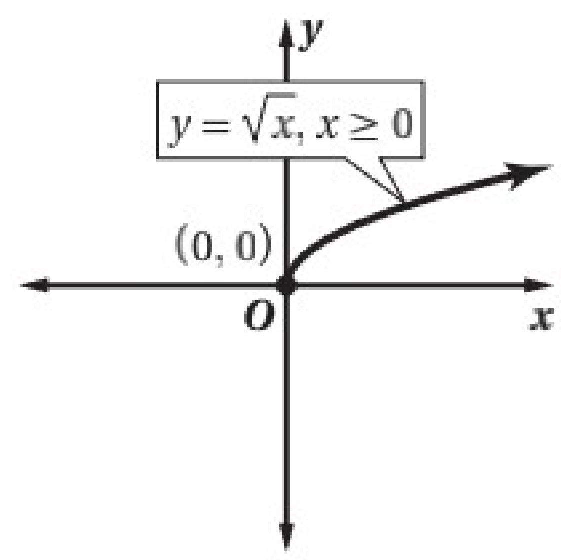
الدالة الثابتة



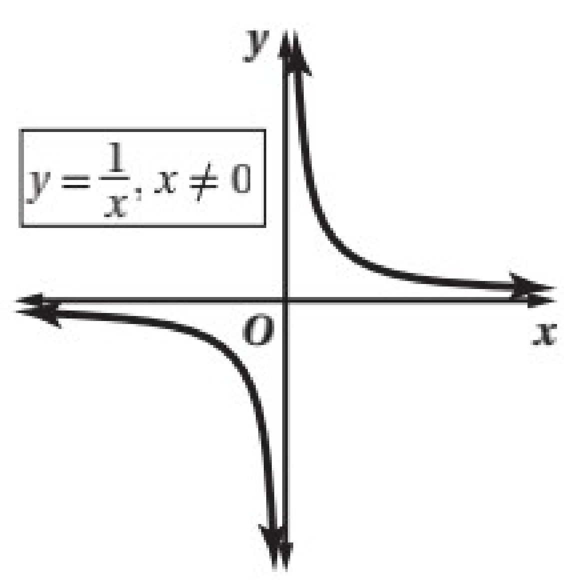
دالة أكبر عدد صحيح



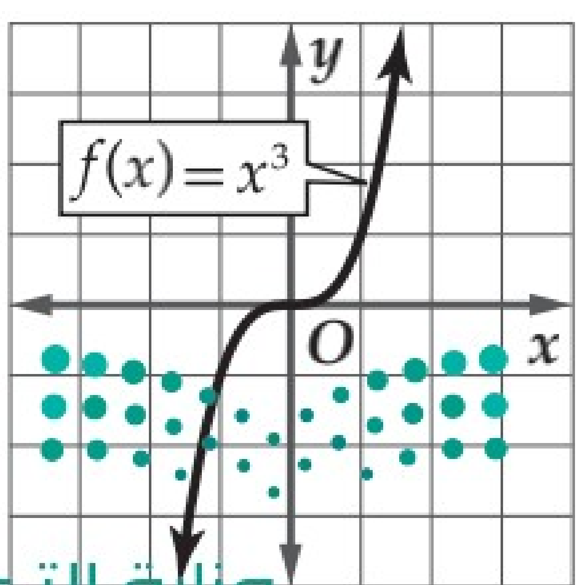
دالة الجذر التربيعي



دالة المقلوب



الدالة التكعيبية



الرموز

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
تركيب الدالتين f وَ g	$[f \circ g](x)$
الدالة العكسية للدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
المجال	D
المدى	$\mathcal{R}$
تقاطع	$\cap$
اتحاد	$\cup$
المجموعة الخالية	$\varnothing$

مالانهاية	∞
سالب مالانهاية	$-\infty$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \lvert x \rvert$
الدالة متعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [\![x]\!]$
معكوس الدالة f	f^{-1}
لوغاريتم x للأساس b	$\log_b x$
اللوغاريتم العشري	$\log x$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

القسم الثاني

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفهرس

الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل 4 القطوع المخروطية

الفهرس

الفصل 5 المتجهات

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفصل 3

المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 3

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

1) $-16a^2 + 4a$

2) $5x^2 - 20$

3) $4x^2 - x + 6$

4) $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\ \text{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)\ \text{cm}$، فما عرضها؟

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

6) $x^2 + 6x = 0$

7) $x^2 + 2x - 35 = 0$

8) $x^2 - 9 = 0$

9) $x^2 - 7x + 12 = 0$

10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\ \text{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

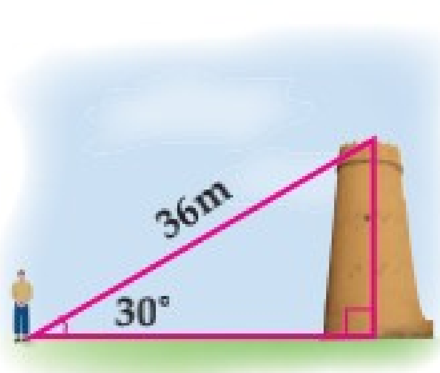
11) $\sin 45°$

12) $\cos 225°$

13) $\tan 150°$

14) $\sin 120°$

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لايحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

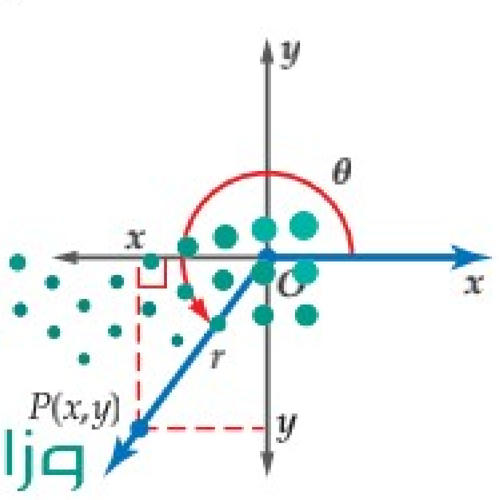
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$$



3-1 المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

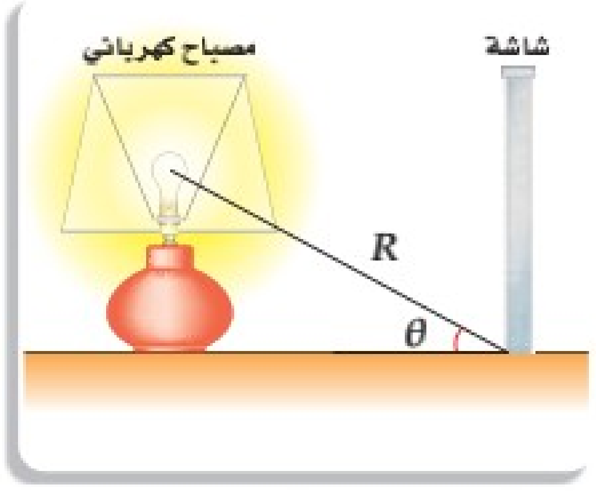
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

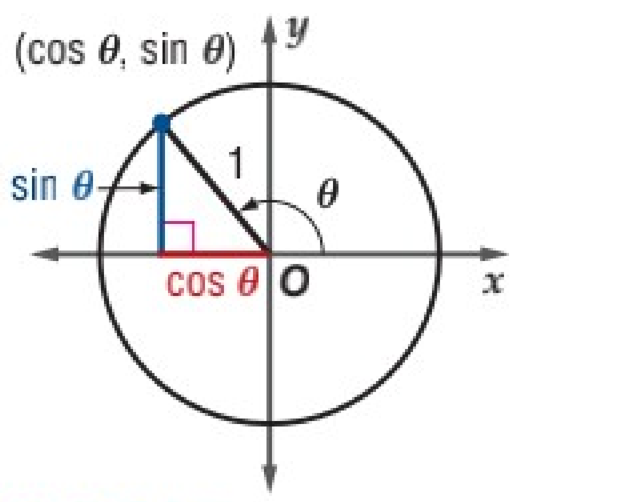
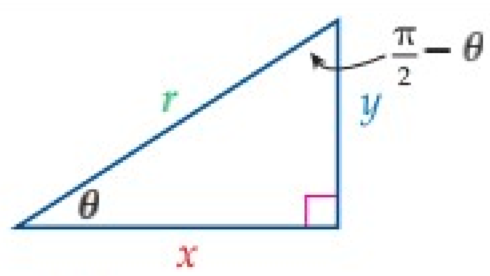
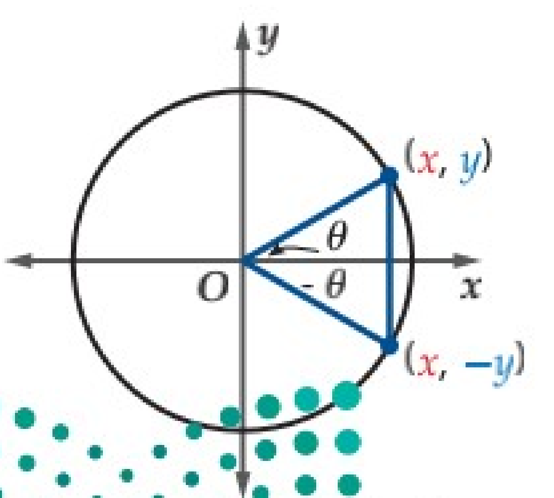
المفردات:
المتطابقة
identity
المتطابقة المثلثية
trigonometric identity
المتطابقات النسبية
quotient identities
متطابقات المقلوب
resiprocal identities
متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities
متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية
odd-even identities

لماذا؟
تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة ، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$
متطابقات المقلوب:	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$ $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$ $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$
متطابقات فيثاغورس:	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	 حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين:	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$	 $\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$	 $\sin \theta = y$ $\sin(-\theta) = -y$ $\cos \theta = x$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة
متطابقات الزاويتين المتتامتين:
يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:
$\sin(90° - \theta) = \cos \theta$

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقات فيثاغورس

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ عوّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$ أوجد مربع العدد $\frac{1}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ استعمل الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ متطابقات فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$ عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$ أوجد مربع العدد $-\frac{3}{5}$

$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$ $\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$

$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$ خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تحقق من فهمك

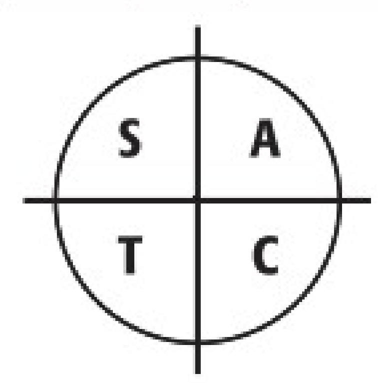
1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكّر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\csc\theta$	1, 2	3, 4
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\sec\theta$	1, 4	2, 3
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\cot\theta$	1, 3	2, 4



A all functions
S sine
T tangent
C cosine

تبسيط العبارات المثلثية : تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية
عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب $(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة : $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\,\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

(2A $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

(2B $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوَّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًّا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة : ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$E\sec\theta = \frac{I}{R^2} \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E\,\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \cos\theta \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسِّر إجابتك.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad R^2 \text{ اقسم كلا الطرفين على}$$

$$E = \frac{I\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط}$$

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع **(a)** تكتب على الصورة: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة . $\tau = Fr\sin\theta$ أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$

4) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ ، $270° < \theta < 360°$

5) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -3$ ، $180° < \theta < 270°$

6) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$

7) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$

8) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

9) $\tan\theta\cos^2\theta$

10) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

12) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$

13) $\sin\theta(1+\cot^2\theta)$

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta$

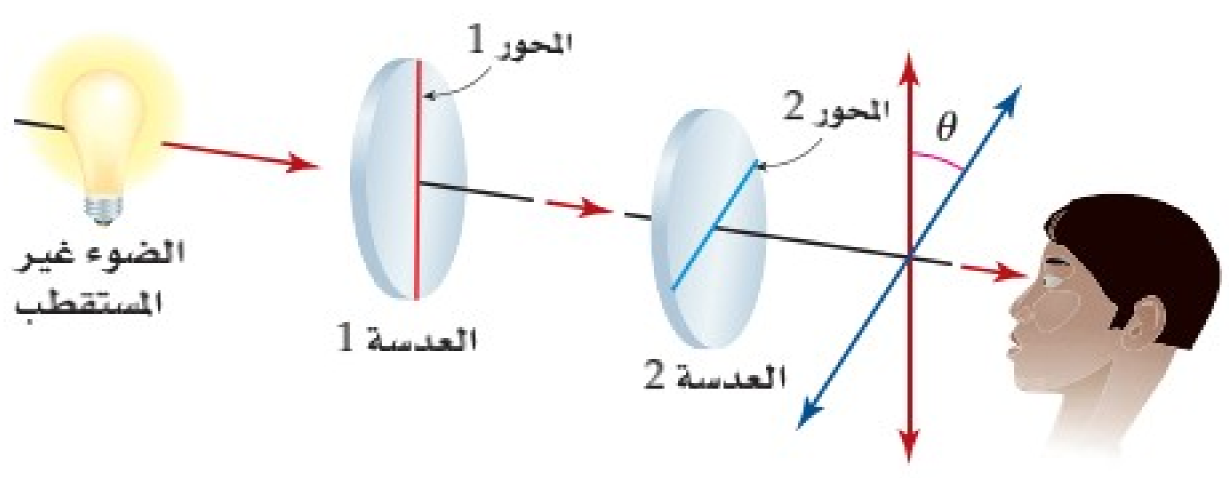
15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

16) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

17) $2 - 2\sin^2\theta$

18) $\csc\theta - \cos\theta\ \cot\theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W.

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80, \theta = 40°, A = 0.75$ ، $S = 1000\ W/m^2$. (قرِّب إلى أقرب جزء من مئة).

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحدد ما إذا كانت معادلة ما تمثّل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$				
$\tan^2\theta\sin^2\theta$				

b) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة، بيانيًّا.

c) **تحليليًّا:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين؛ فإن المعادلة تمثّل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟

d) **تحليليًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثّل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:

$F_n - mg\cos\theta = 0,\ mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

26) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًّا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة.

27) **تبرير:** وضِّح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\dfrac{ER^2}{I}$.

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثِّل متطابقة.

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan\theta\sin\theta$

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة: $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

32) **اكتشف الخطأ:** بسِّط كل من علاء وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

علاء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\tan^2\theta+1$$
$$=\sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$=\sin^2\theta$$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. (مهارة سابقة)

33) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

34) $\tan\left(\cos^{-1}\frac{6}{7}\right)$

35) $\sin\left(\text{Arctan}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

36) $\cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{3}{5}\right)$

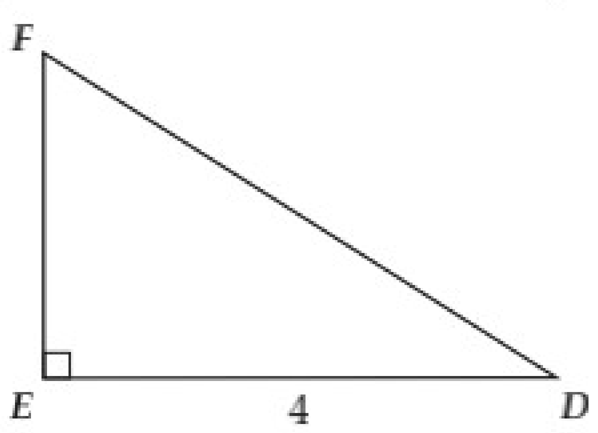
37) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة:

$f(x)=\begin{cases}K+x^2, & x<5\\ 3x+2, & x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$. (مهارة سابقة)

38) حل المعادلة: $2^x=32^{x-2}$. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5 **C** 3.2

B 4 **D** 10

40) إذا كان $\sin x=m$ وَ $0°<x<90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها. (الدرس 1-3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي — **إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

بسّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$	الطرف الأيسر
$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$	اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$
$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$	$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$
$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$	$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$
$= 1+\cos\theta$ ✓	اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$
= الطرف الأيمن	

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

وزارة التعليم

Ministry of Education

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **C** $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوال دوالَّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اقلب المقام واضربه بالبسط}$$

$$= \cot\theta\cdot\cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{اضرب}$$

الجواب هو C.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلك اختر قيمة لـ θ. وعوّض بها في البديل المختار، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

نبسّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

12) $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

13) $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

14) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

16) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

18) $\csc\theta - 1 = \frac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

19) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

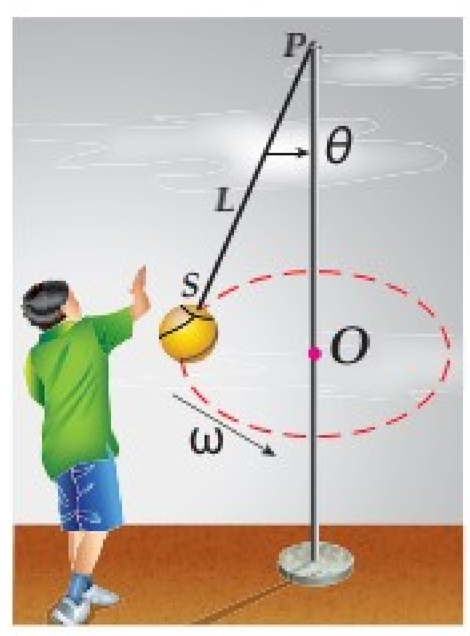
20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

22) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23) $\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاويّة مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكوّن مع الحبل L الذي طرفاه p, s، والزاوية المحصورة شكلًا مخروطيًا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \frac{g\sec\theta}{\omega^2}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\,m/s^2$، فهل الصيغة $L = \frac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ ؟ وضح إجابتك.



25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره 16.7 m. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$، فأوجد سرعة العدّاء.
إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو −1 :

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$

28) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

29) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

30) $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

31) $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

32) $\cos(-\theta)\sec\theta$

33) $\sin(-\theta)\csc\theta$

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

35) $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

36) $\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

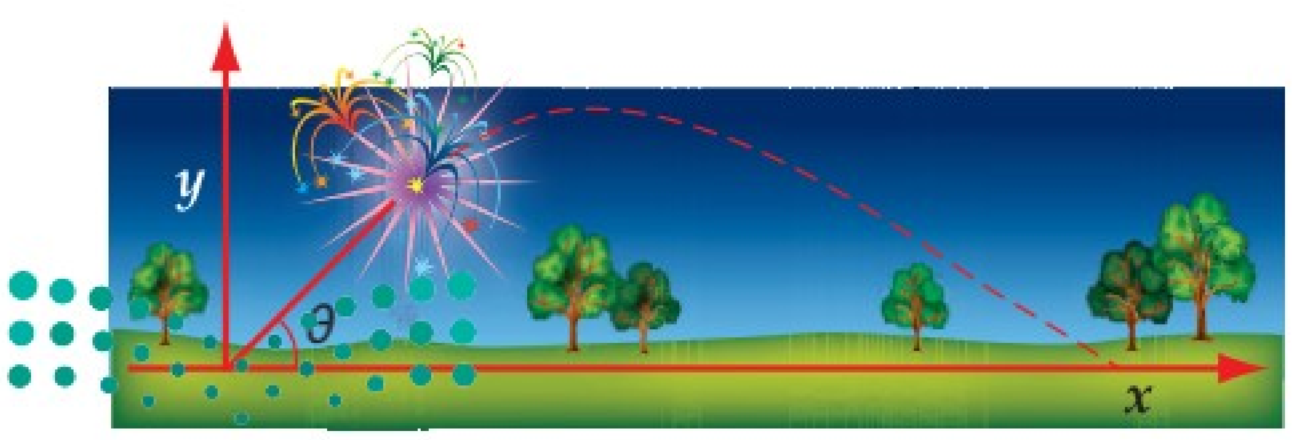
37) $\tan\theta\cos\theta$

38) $\cot\theta\tan\theta$

39) $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

40) $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة:
$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية . أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



42) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi f t$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$.

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $2\sin x = 1$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

b) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثِّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثِّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًا، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًا:** خمِّن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

45) **تبرير:** بيّن لماذا تُعدّ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin\theta = \sqrt{1-\cos\theta}$ ليست متطابقة.

46) **اكتب سؤالًا:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

47) **تبرير:** اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin\theta)$ وجيب التمام $(\cos\theta)$ في معظم الأحيان.

48) **تحدٍّ:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.

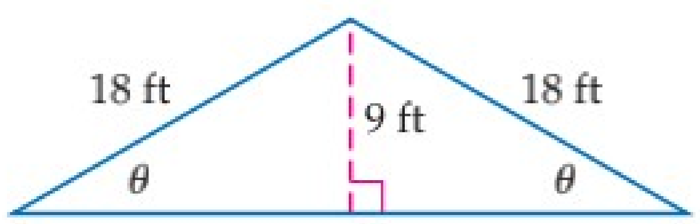
مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

50) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$

51) $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$

52) **هندسة معمارية:** يمثِّل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ. (مهارة سابقة)



بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 3-1)

53) $\sin\theta\cos\theta\,(1+\cot^2\theta)$

54) $\dfrac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$

تدريب على اختبار

55) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟

A $\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta\sin\theta$

D $\tan\theta\csc\theta$

56) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثِّل متطابقة:
$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
Sum and Difference of Angles Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا.

(مهارة سابقة)

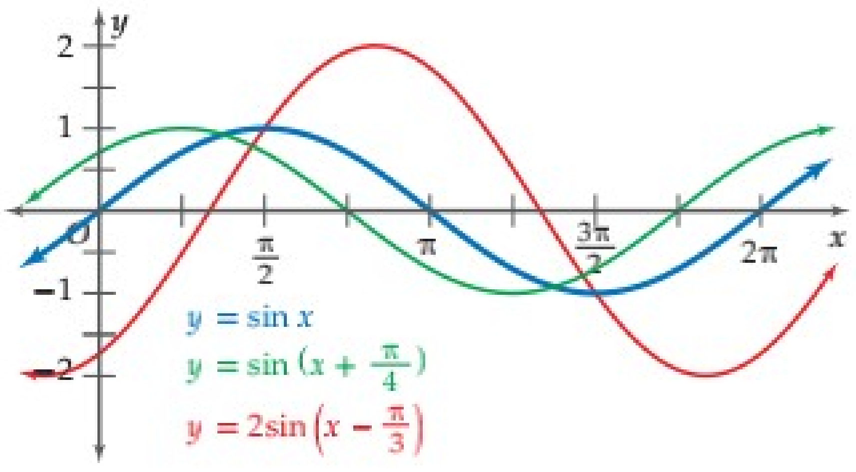
والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

لماذا؟

هل اســتعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟

تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا. ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.



متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين $\frac{\pi}{4}$, x. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin(60° - 45°)$.

مفهوم أساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) \quad 105° = 60° + 45°$$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° \quad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{عوّض}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{بسّط}$$

b) $\cos(-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(-120°) = \cos(60° - 180°) \quad -120° = 60° - 180°$$

$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \quad \text{متطابقة الفرق}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \quad \text{عوّض}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$ 1B) $\cos(-15°)$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة: كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $360°$, $0°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزوايا الخاصة.

$c = 3 \sin 165°t$ — الصيغة الأصلية

$= 3 \sin (120°t + 45°t)$ — $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$ — المعادلة بحسب الفرع a

$= 3 \sin (120° + 45°)$ — $t = 1$

$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$ — متطابقة المجموع

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ — عوِّض مستعملًا الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — اضرب

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ — بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 — إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$ — الطرف الأيسر

$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$ — متطابقة الفرق

$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ — عوّض

$= \sin \theta$ ✓ — بسّط

= الطرف الأيمن

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ (b

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$	الطرف الأيسر
$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$	متطابقة المجموع
$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$	عوّض
$= \cos\theta$ ✓	بسّط
= الطرف الأيمن	

تحقق من فهمك

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ (3A

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ (3B

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$

2) $\cos 105°$

3) $\cos 75°$

4) $\cos\frac{\pi}{12}$

5) $\sin 135°$

6) $\sin(-210°)$

7) $\cos 135°$

8) $\tan 195°$

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120° t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين من الزوايا الخاصة؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

10) $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

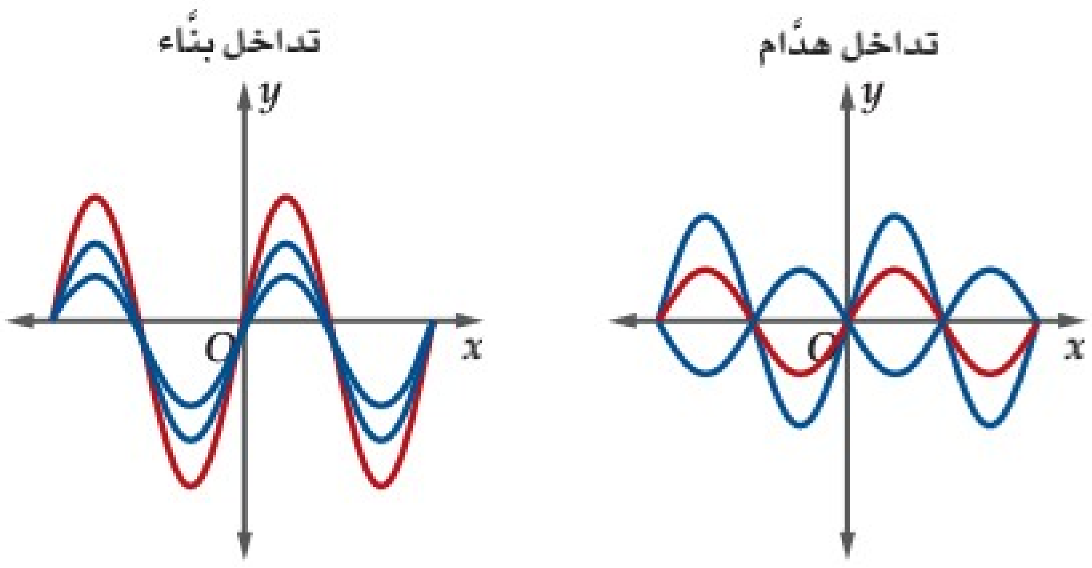
12) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

13) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

15) $\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

16) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدّامًا.



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:
$y_1 = 10\sin(2t + 210°), y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.
تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسّر معناه بالنسبة للموجتين.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165°$

18) $\sec 1275°$

19) $\sin 735°$

20) $\tan\frac{23\pi}{12}$

21) $\csc\frac{5\pi}{12}$

22) $\cot\frac{113\pi}{12}$

23) بيّن أنه يمكن كتابة المقدار $\frac{\sin A + \tan\theta\cos A}{\cos A - \tan\theta\sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$، حيث A, θ زاويتان حادتان.

24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°				
45°	60°				
90°	30°				

b) **بيانيًا:** افترض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلًّا من: $y = \sin(x + x - 15°)$ ، $y = \sin x + \sin(x - 15°)$ على الشاشة نفسها .

c) **تحليليًا:** حدّد ما إذا كانت $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسِّر إجابتك.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

25) $\sin(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

26) $\cos(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

27) $\sec(A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

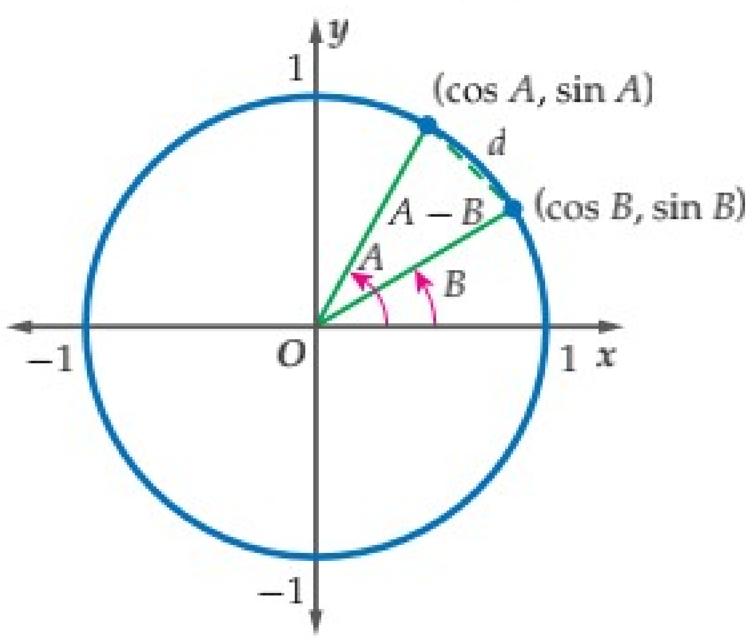
28) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot(A+B)$ بدلالة $\cot A$, $\cot B$.

31) **برهان:** الشكل أدناه، يُبيِّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة ؛ لإيجاد قيمة d ، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$, $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$



32) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام.

33) **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C . وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها.

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3-1)

34) $\sin\theta \csc\theta - \cos^2\theta$

35) $\cos^2\theta \sec\theta \csc\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

36) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$

37) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{3}$ ، $180° < \theta < 270°$

38) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = -\frac{7}{12}$ ، $90° < \theta < 180°$

39) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $270° < \theta < 360°$

40) $\tan\theta$ ، إذا كان $8\cos\theta - 5 = 0$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين: (الدرس 3-2)

41) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

42) $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

تدريب على اختبار

43)
ما القيمة الدقيقة للعبارة:
$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D $\sqrt{3}$

44) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$.

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–3 إلى 3–3

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1–3)

1) $\cot\theta \sec\theta$

2) $1 - \cos^2\theta$ _ $\sin^2\theta$

3) $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\csc\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1–3)

5) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$، $0° < \theta < 90°$

6) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{1}{2}$، $270° < \theta < 360°$

7) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $0° < \theta < 90°$

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\frac{\cos\theta}{1 - \sin^2\theta}$؟ (الدرس 3-1)

A $\cos\theta$ **C** $\tan\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\sec\theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16m، وظل زاوية ميل سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 2–3)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله.

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

10) $\cot^2\theta + 1 = \frac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = 1$

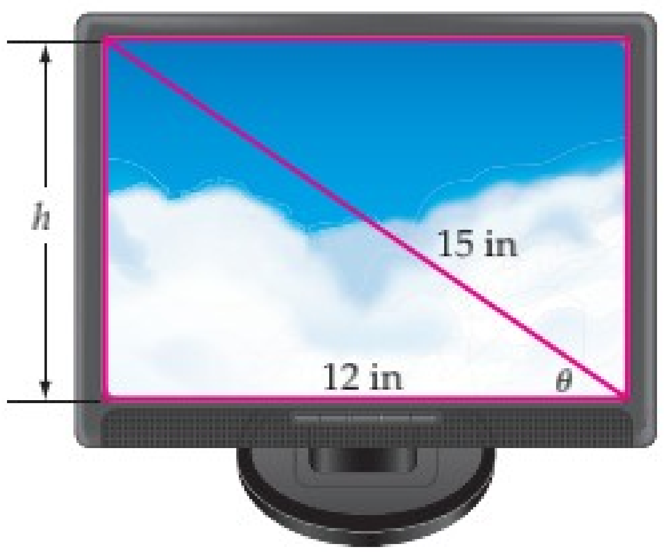
12) $\frac{\sin\theta\tan\theta}{1 - \cos\theta} = (1 + \cos\theta)\sec\theta$

13) $\tan\theta(1 - \sin\theta) = \frac{\cos\theta\sin\theta}{1 + \sin\theta}$

14) **حاسوب:** تُصنَّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 1–3)

a) أوجد قيمة h.

b) بيّن أن $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$



أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

15) $\frac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} = (\sec\theta + 1)\cot\theta$

16) $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

17) $\cot\theta(1 - \cos\theta) = \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3–3)

18) $\cos 105°$

19) $\sin(-135°)$

20) $\tan 15°$

21) $\cot 75°$

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 3–3)

A $\sqrt{2}$ **C** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

B $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

23) أثبت صحة المتطابقة الآتية: (الدرس 2–3)

$\cos 30°\cos\theta + \sin 30°\sin\theta = \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta$

3-4

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
Double-Angle and Half-Angle Identities

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:
- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

لماذا؟
تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

إرشادات للدراسة
اشتقاق الصيغ
يمكنك استعمال متطابقة $\sin (A + B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ، أو $\sin 2\theta$، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos (A + B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ، أو $\cos 2\theta$.

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية
المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$
$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

مثال 1: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية
أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$، فإننا نجد $\cos \theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$؛ لإيجاد $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ — $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — عوّض $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ — ربّع ثم اطرح

$\cos \theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos \theta$ موجب أي $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $0° < \theta < 90°$; $\sin\theta = \frac{2}{3}$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos\theta, \sin\theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan\theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{تعريف دالة الظل}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{بالقسمة وإنطاق المقام}$$

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \quad \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} \quad \text{ربّع المقام}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \quad \text{بسّط}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $90° < \theta < 180°$; $\cos\theta = -\frac{1}{3}$:

2A) $\cos 2\theta$ **2B)** $\tan 2\theta$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة ؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\sin\frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\cos\frac{\theta}{2}$.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ — استعمل متطابقة فيثاغورس

$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ — $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$ — $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ — اطرح

$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$ — خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث ، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ — متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$ — $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ — بسّط

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ — بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ وَ $270°$ ، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ وَ $135°$. إذن، $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$ — $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}}$ — $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ، $67.5°$ في الربع الأول ، فالقيمة موجبة

$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ — $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}}$ — اطرح

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ — $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$ — اضرب

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ — $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ — بسّط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة
أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 4 من واقع الحياة — التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بسّط كلًا من البسط والمقام

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بسّط

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بسّط

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسيًا إلى ارتفاع 312m .

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة:
$g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45°$.

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 — إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$.

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$ الطرف الأيمن

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sin\theta$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب في $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$ اضرب

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} \checkmark$$ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

= الطرف الأيسر

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 3-1)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin \theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin \theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan \theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$

9) $\cos 15°$

10) $\sin 75°$

11) $\tan 165°$

12) $\tan \frac{5\pi}{12}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها $52\,ft/s$. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$ ، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 5)

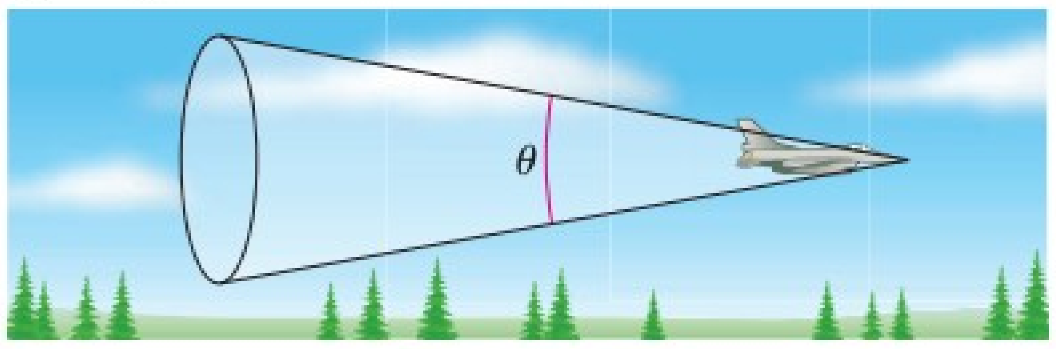
14) $\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

17) $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكِّله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

b) إذا كان $\cos \theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل العبارة التي أوجدتها في **a** لحساب قيمة عدد ماخ.

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = {I_0}^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها $95\,ft/s$. برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° - A$, $\theta = 45° + A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

22) $\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

23) $\tan \theta = -3; 90° < \theta < 180°$

24) $\sec \theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

25) $\cot \theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(\theta) = 4\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}\right)$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (**a**) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (**c**) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ : $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(45-30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

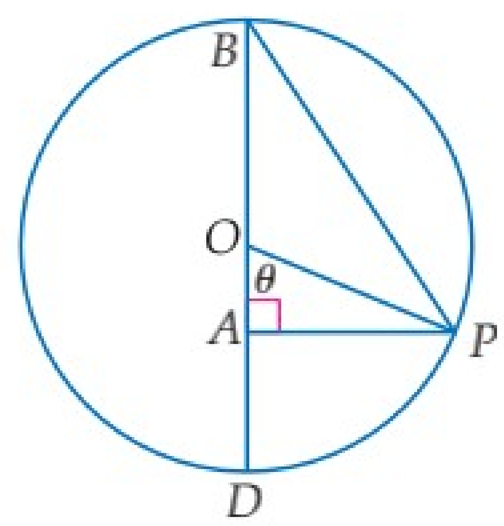
$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

28) تحدٍّ: استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها. لتبرهن أن:

$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$.



29) اكتب: اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلًّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$.

30) برهان: استعمل الصيغة $\sin(A+B)$ لاشتقاق صيغة لِـ $\sin 2\theta$ ، واستعمل الصيغة $\cos(A+B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$.

31) تبرير: اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

32) مسألة مفتوحة: ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$. فسِّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32 \text{ ft/s}^2)$

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 3-2)

33) $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

34) $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1-\cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

35) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3-3)

36) $\sin 135°$

37) $\cos 105°$

38) $\sin 285°$

39) $\cos 210°$

40) $\sin(-240°)$

41) $\cos(-120°)$

42) $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$.

تدريب على اختبار

43) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan\frac{\theta}{2}$ إذا كان $0 < \theta < 90°$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

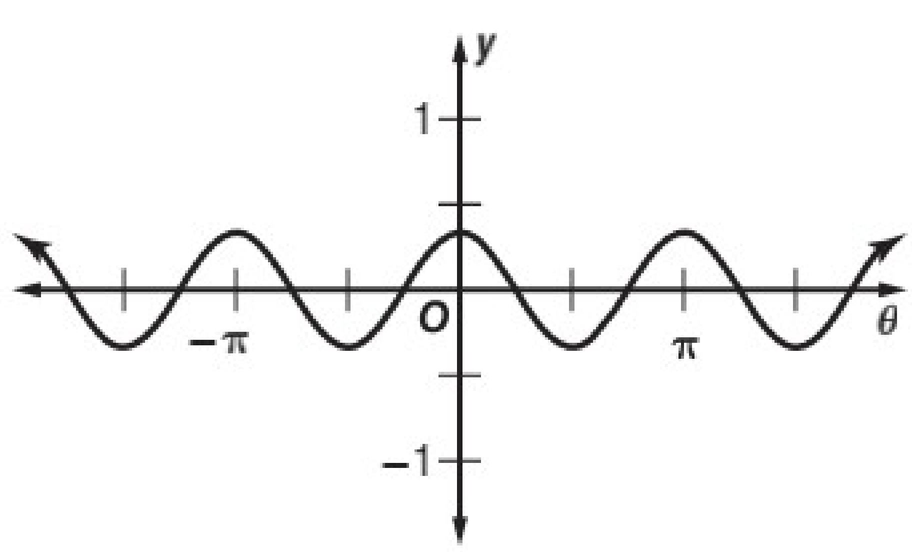
A $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

B $\sqrt{3}-2$

C $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :



A $y = 3\cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3}\cos 2\theta$

C $y = 3\cos\frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{2}\theta$

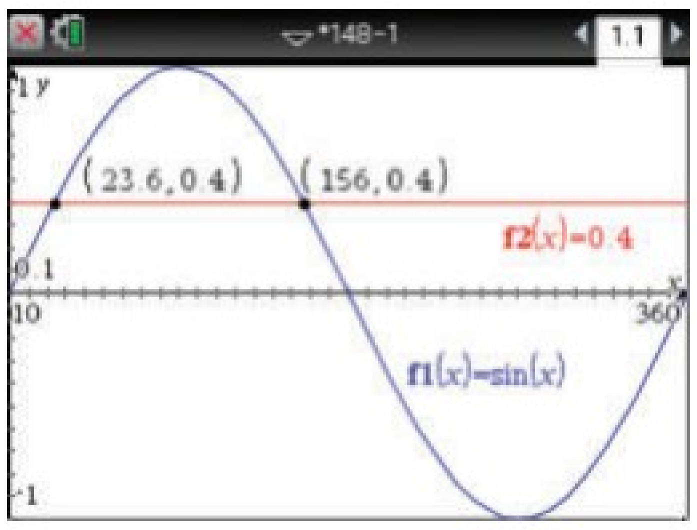
استكشاف
3-5
معمل الحاسبة البيانية:
حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire ؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلٍّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية



استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم 5 الإعدادات ومنها 2:إعدادات المستند ثم الزاوية: درجة
- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1(x) = \sin x, f2(x) = 0.4$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on trig sin x enter tab 0.4 enter

- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4:تكبير/تصغير النافذة ثم 1:إعدادات النافذة

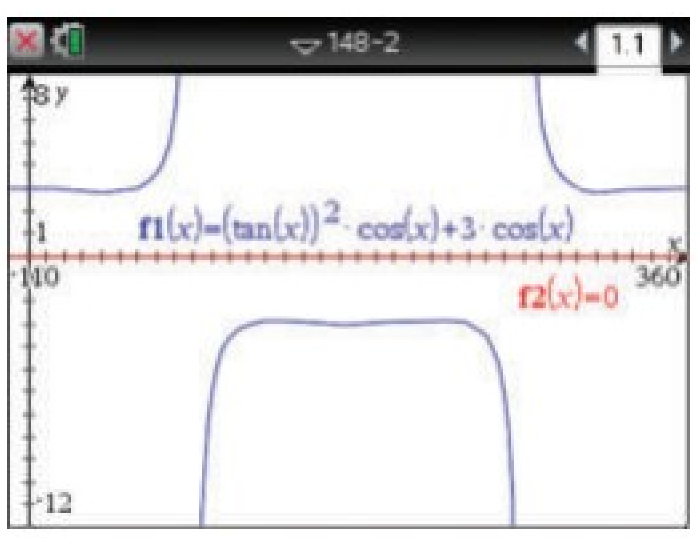
وحدد القيمة الصغرى لـ x بـ $0°$ ، والقيمة العظمى لـ x بـ $360°$،

كذلك حدد القيمة الصغرى لـ y بـ -1 ، والقيمة العظمى لـ y بـ 1

الخطوة 2: تحديد الحلول

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6:تحليل الرسم البياني ثم اختر 4:نقاط التقاطع ، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0° \le x < 360°$ ، ستكون الحلول هي: $x \approx 23.6°$, $x \approx 156.0°$

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية



استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$، إذا كانت $0° \le x < 360°$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- أعد كتابة المعادلة $f1(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x, f2(x) = 0$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on (trig tan x ^ 2 ► ► trig cos x + 3 trig cos x

enter tab 0 enter

الخطوة 2: تحديد الحلول

هاتان الدّالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x الموضحة بجانب كلٍّ منها:

1) $\sin x = 0.7 ; 0° \le x < 360°$

2) $\tan x = \cos x ; 0° \le x < 360°$

3) $3 \cos x + 4 = 0.5; 0° \le x < 360°$

4) $0.25 \cos x = 3.4 ; -720° \le x < 720°$

5) $\sin 2x = \sin x ; 0° \le x < 360°$

6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0; -360° \le x < 360°$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

3-5 حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.
(الدروس من 2–3 إلى 4–3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية
حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$.

$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

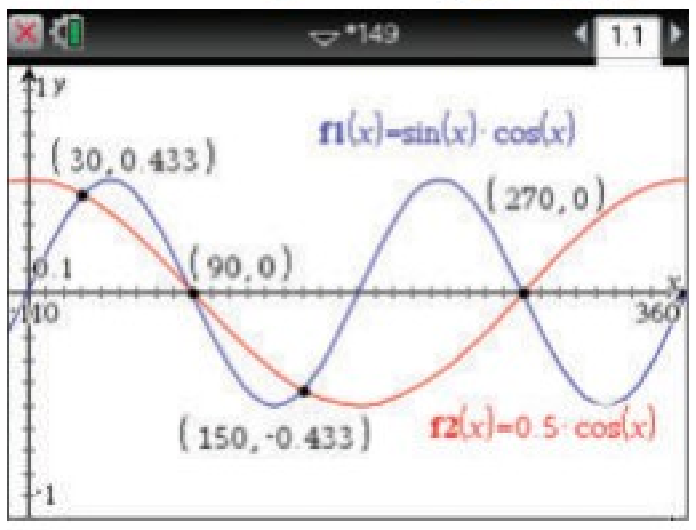
$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلّل بأخذ عامل مشترك

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$ الزاوية المرجعية للزاوية $150°$ هي $30°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$



التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin\theta\cos\theta,\ y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين $0°$ وَ $180°$ فقط.

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ حلّل

$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1$ ، $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le x \le 2\pi$.

1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

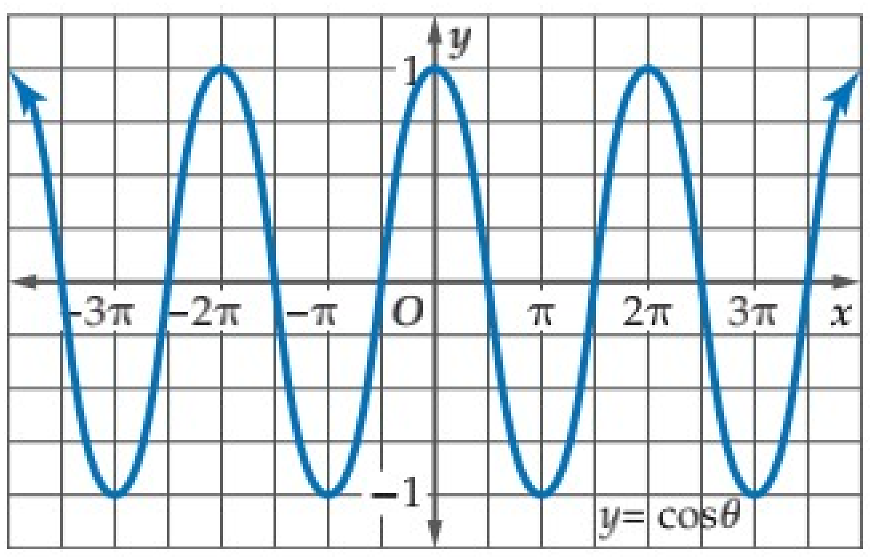
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0 , 2\pi]$ بالراديان، أو $[0° , 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي ... $,5\pi, 3\pi, \pi$ ، وكذلك ... $,-5\pi ,-3\pi ,-\pi$، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حل مسائل من واقع الحياة.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π ، ولذلك ، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على 20-
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ $\quad$ $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ $\quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$ حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 180° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \\ 0 &\stackrel{?}{=} 1 + (-1) \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 90° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 90° \\ 1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ 1 &= 1 \ \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 270° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 270° \\ -1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ -1 &\neq 1 \ \times \end{aligned}$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$$ المعادلة الأصلية

$$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$$ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$$ خاصية التوزيع

$$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$$ حلّل

$$\tan^2\theta - 3 = 0 \quad \text{أو} \quad \tan^2\theta + 1 = 0$$ خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$$\tan^2\theta = -1$$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$$\tan^2\theta = 3$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي: $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$ ؛حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \checkmark$$

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \checkmark$$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0 ; 0° \le \theta \le 360°$

2) $2\cos^2\theta + \cos\theta = 1 ; 0° \le \theta \le 360°$

3) $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta ; 0° \le \theta \le 360°$

4) $\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; 0° \le \theta \le 240°$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

6) $2\cos^2\theta = 1$

7) $\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$

8) $2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

10) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$

12) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

15) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

16) $\tan\theta = 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

17) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}; 0° \le \theta \le 360°$

18) $2\sin^2\theta = 1; 90° < \theta < 270°$

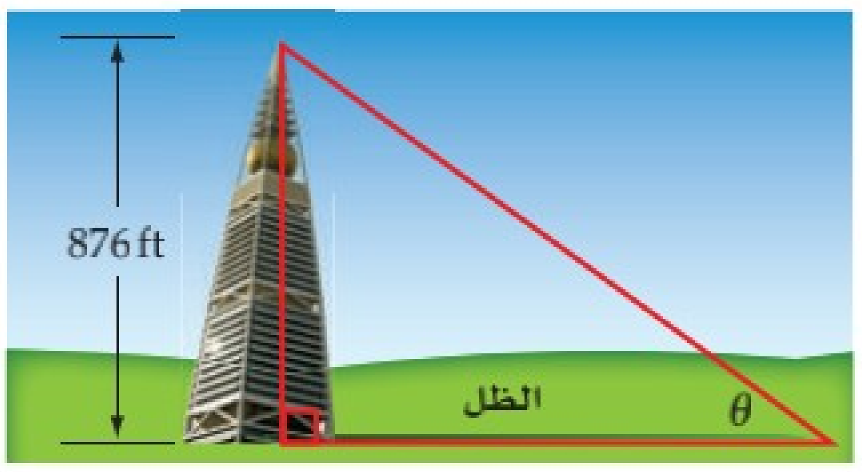
19) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

20) $4\sin^2\theta - 1 = 0; 180° < \theta < 360°$

21) $\tan\theta - \sin\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

22) $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft. أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟



24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، عمق نهر خلال أحد الأيام؛ حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$، 24 تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$

26) $2\sin^2\theta + (\sqrt{2} - 1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

27) $2\sin\theta = \sin 2\theta$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

29) $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

30) **الماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin i = n_2 \sin r$، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو 35°، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًّا ونقيًّا أم لا.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \leq \theta \leq 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

ليلى	هلا
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$-\sin\theta = -\sin\theta$	$\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$
$2\cos\theta = 0$	$2\cos\theta = 1$
$\cos\theta = 0$	$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$
$\theta = 90°, 270°$	$\theta = 60°, 300°$

32) تحدٍّ: حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة.

33) اكتب: حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

34) تبرير: اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.

35) مسألة مفتوحة: اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، بحيث تكون $0° \leq \theta \leq 360°$.

36) تحدٍّ: هل للمعادلتين $\cot^2 x + 1 = 2$, $\csc x = \sqrt{2}$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك.

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 4-3)

37) $\cos 165°$ **38)** $\sin 22\frac{1}{2}°$ **39)** $\sin\frac{7\pi}{8}$ **40)** $\cos\frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (الدرس 3-3)

41) $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$ **42)** $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

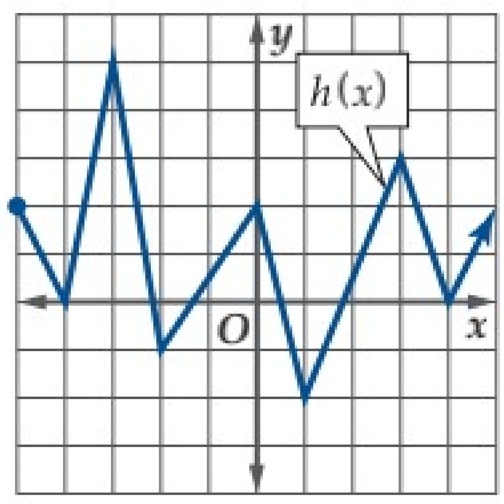
43) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ **44)** $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

45) ألعاب نارية: إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي $9.8 m/sec$.

a) أثبت أن $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ تمثِّل متطابقة .

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية $80°$ ، وسرعة ابتدائية مقدارها $110 m/s$ ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه. (الدرس 2-3)

46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحدد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة)



تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$ ؟

A $30°$ أو $150°$ **C** $210°$ أو $330°$

B $60°$ أو $120°$ **D** $240°$ أو $300°$

الفصل 3

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 5–3 ,2–3 ,1–3)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–3)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4–3)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المفردات

- **المتطابقة** (ص. 142)
- **المتطابقة المثلثية** (ص. 142)
- **المتطابقات النسبية** (ص. 142)
- **متطابقات المقلوب** (ص. 142)
- **متطابقات فيثاغورس** (ص. 142)
- **متطابقات الزاويتين المتتامتين** (ص. 142)
- **متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية** (ص. 142)
- **المعادلات المثلثية** (ص. 164)

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال ________ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية $75°$ إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$ و $15°$.

2) المتطابقة $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هي مثال على ________.

3) ________ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية $30°$.

5) تكون ________ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

6) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.

7) المتطابقتان $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ مثالان على ________.

8) يمكن استعمال ________ في إيجاد كل من $\sin 120°$, $\cos 120°$ إذا عُلم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$, $30°$.

9) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على ________.

مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 142 - 146)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $270° < \theta < 360°$

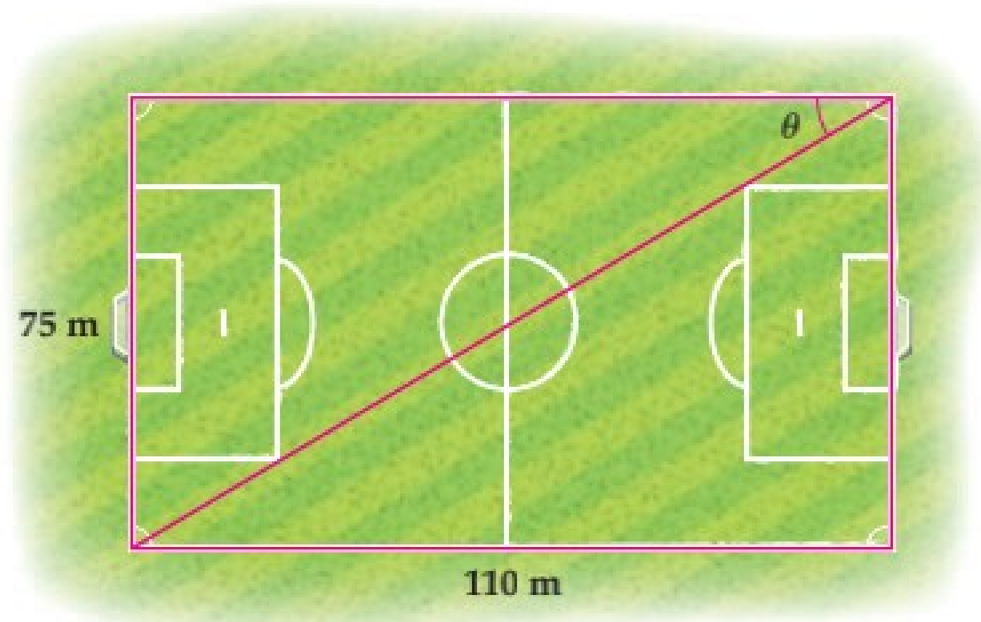
11) $\sec\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$، $90° < \theta < 180°$

12) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$، $180° < \theta < 270°$

14) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$ ، $270° < \theta < 360°$

15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ.



بسّط كل عبارة مما يأتي :

16) $1 - \tan\theta \sin\theta \cos\theta$

17) $\tan\theta \csc\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$

19) $\cos\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ — متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ — اطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ — عوّض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ — ربع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ — اطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ — خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta \sec\theta \cot\theta$.

$$\cos\theta \sec\theta \cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

دليل الدراسة والمراجعة

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 147 - 151)

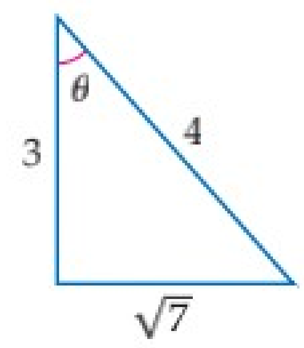
أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22) $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

23) **هندسة :** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتتحقّق من أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\cot\theta + \csc\theta = \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}$.

$\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$ الطرف الأيسر

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$ بسّط

$= \cot\theta + \csc\theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيمن

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 152 - 155)

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

24) $\cos(-135°)$

25) $\cos 15°$

26) $\sin 210°$

27) $\sin 105°$

28) $\tan 75°$

29) $\cos 105°$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

30) $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32) $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

دون استعمال الآلة الحاسبة، استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$

$$= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا علمت أن:

33) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34) $\sin \theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35) $\cos \theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع **(b)** .

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ اطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ اقسم ، بسّط ، وأنطق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

حل كل معادلة مما يأتي ، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \le \theta < 360°$

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \le \theta < 360°$

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ حلّل

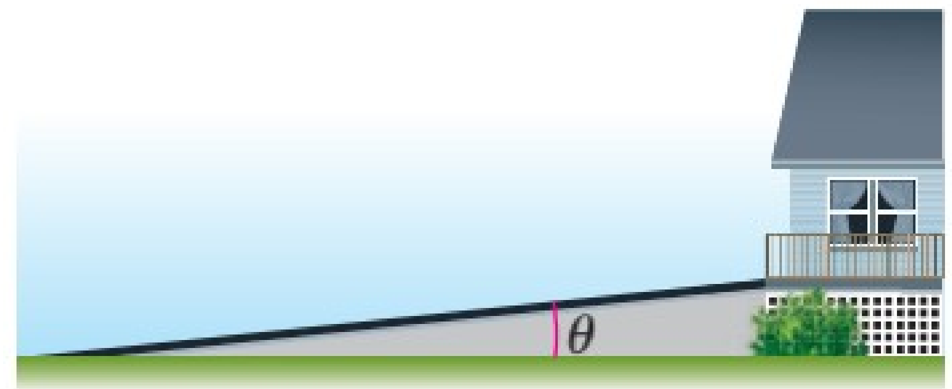
$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

تطبيقات ومسائل

42) **إنشاءات:** يبين الشكل أدناه ممرًا مائلًا لمنزل . (الدرس 1-3)

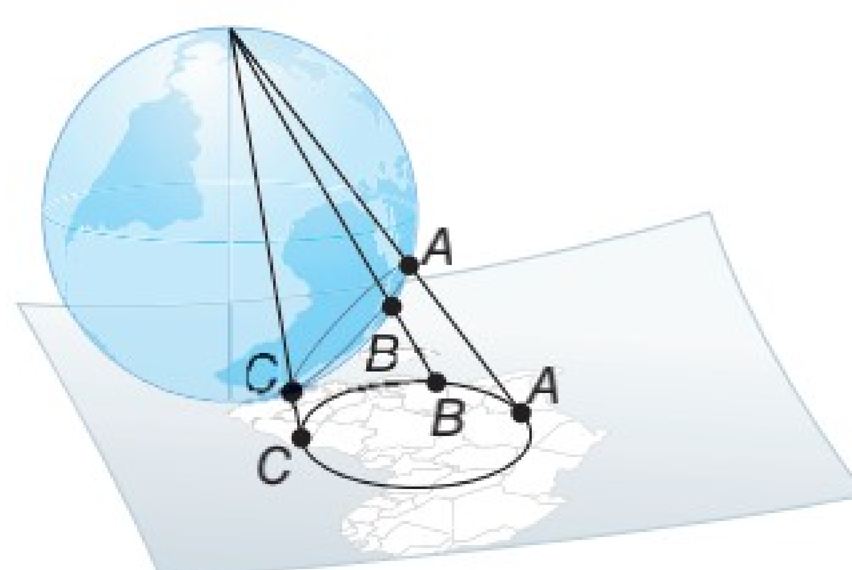


أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

43) **ضوء:** تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى ، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 1-3)

44) **خرائط:** يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 2-3)



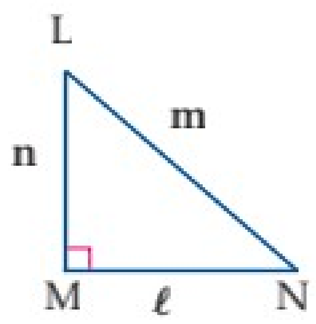
45) **موجات:** يُسمى تداخل موجتين بنَّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتاهما بنَّاء؟

$y_1 = 20\sin(3t + 225°)$ ، $y_2 = 20\sin(3t + 45°)$

(الدرس 3-3)

46) **هندسة:** استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.

(الدرس 4-3)



أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 4-3)

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1 + \cos 2\theta = \frac{2}{1 + \tan^2\theta}$

49) **مقذوفات:** إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$ ، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة ، إذا علمت أن $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft ، وزمن التحليق 4 ثوانٍ.

(الدرس 5-3)

اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$؟

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$؟

A $\frac{5}{3}$ C $-\frac{4}{5}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$ D $\frac{4}{5}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$

6) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ، $90° < \theta < 180°$

7) $\sec\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -2$ ، $180° < \theta < 270°$

8) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta \sec^2\theta$

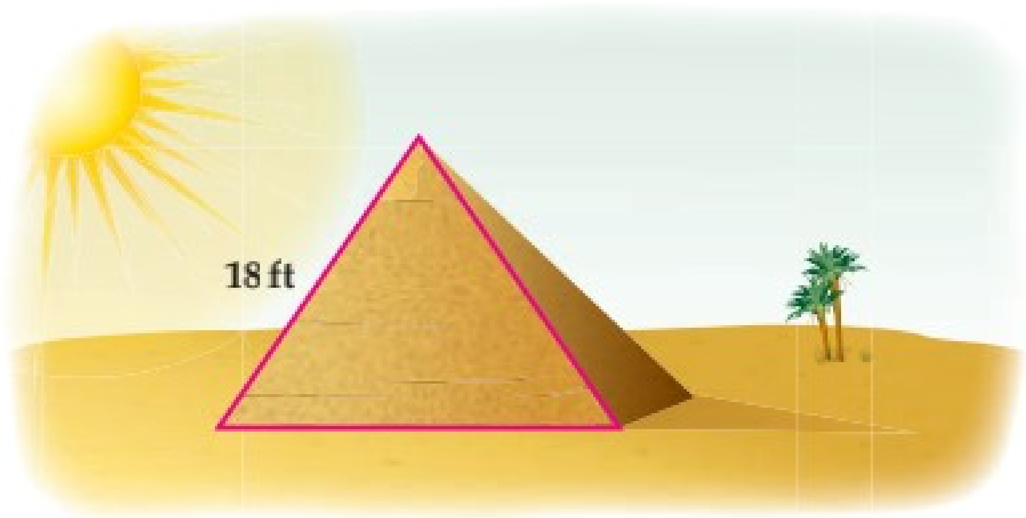
12) $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$؟

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ C $1 - \sqrt{2}$

B $\sqrt{2} - 1$ D $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجِّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft.



a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$ ، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$

16) $\sin 480°$

17) $\cos 75°$

18) $\sin 165°$

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذاكان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$

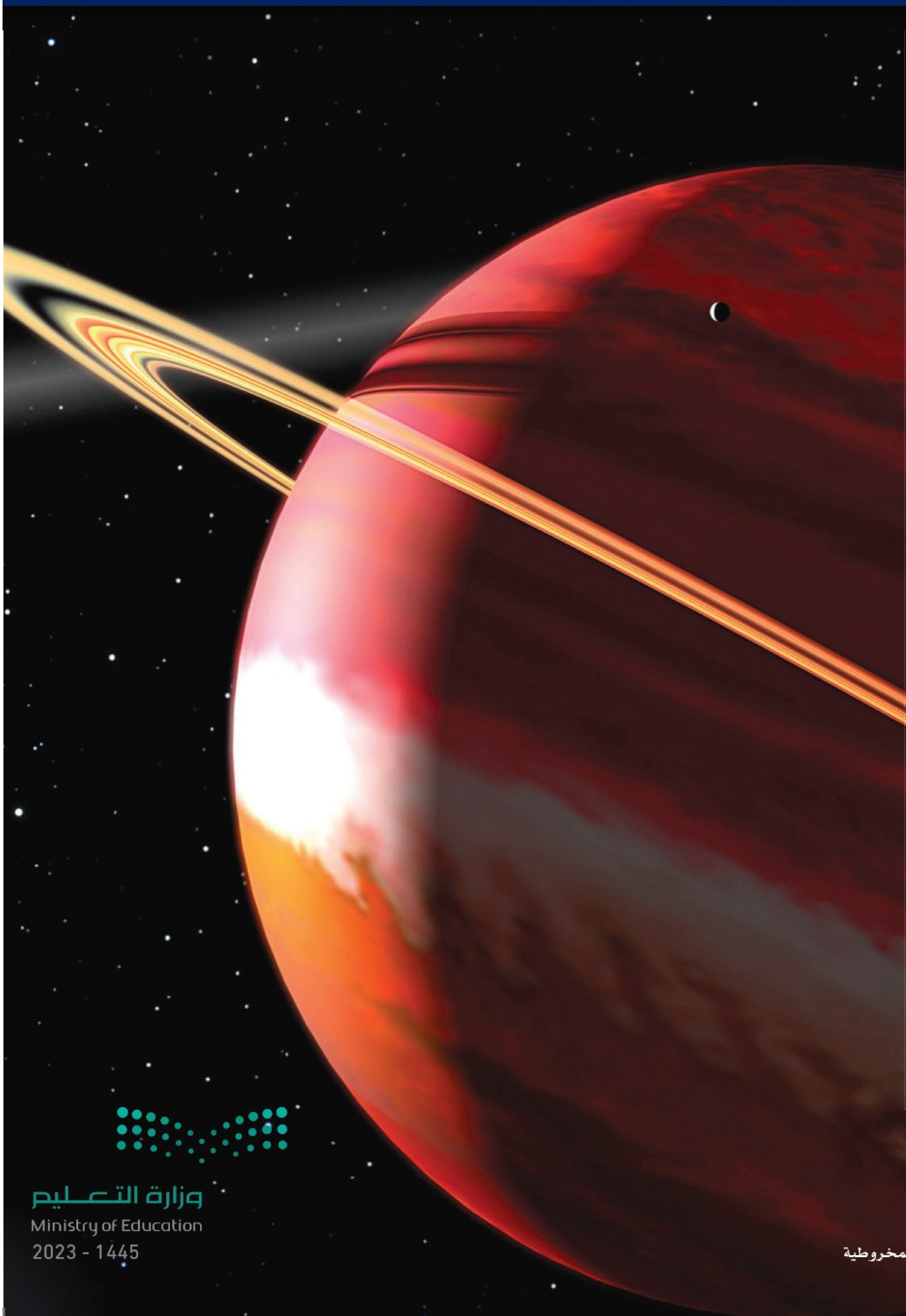
حُل المعادلتين الآتيتين، حيث $0° \le \theta \le 360°$:

21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

الفصل 4

القطوع المخروطية
Conic Sections



فيما سبق:

درستُ تمثيل الدالة التربيعية (والتي تمثل قطعًا مكافئًا) ، ودالة المقلوب (والتي تمثل قطعًا زائدًا). الدرس (5-3)

والآن:

- أُحَلِلُ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأُمثِّلُها بيانيًا.
- أكتبُ معالادت القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلُ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضاوية الشكل تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلهما البياني.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$
2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$
3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$
5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$
6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$
7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًّا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$
10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$
12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$
13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

14) $x^2 + 8x$
15) $x^2 - 18x$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

16) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$
17) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًّا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثِّل هذا الموقف، ومثِّلها بيانيًّا.

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًّا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

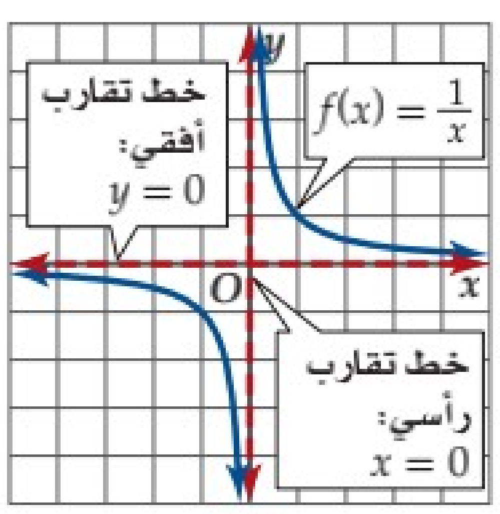
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

1) أوجد نصف معامل x؛ أي نصف b.
2) ربِّع الناتج في الخطوة (1).
3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

4-1 القطوع المكافئة
Parabolas

فيما سبق:

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًّا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحَلِّ معادلات قطوع مكافئة، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات:

القطع المخروطي
conic section

المحل الهندسي
locus

القطع المكافئ
parabola

البؤرة
focus

الدليل
directrix

محور التماثل
axis of symmetry

الرأس
vertex

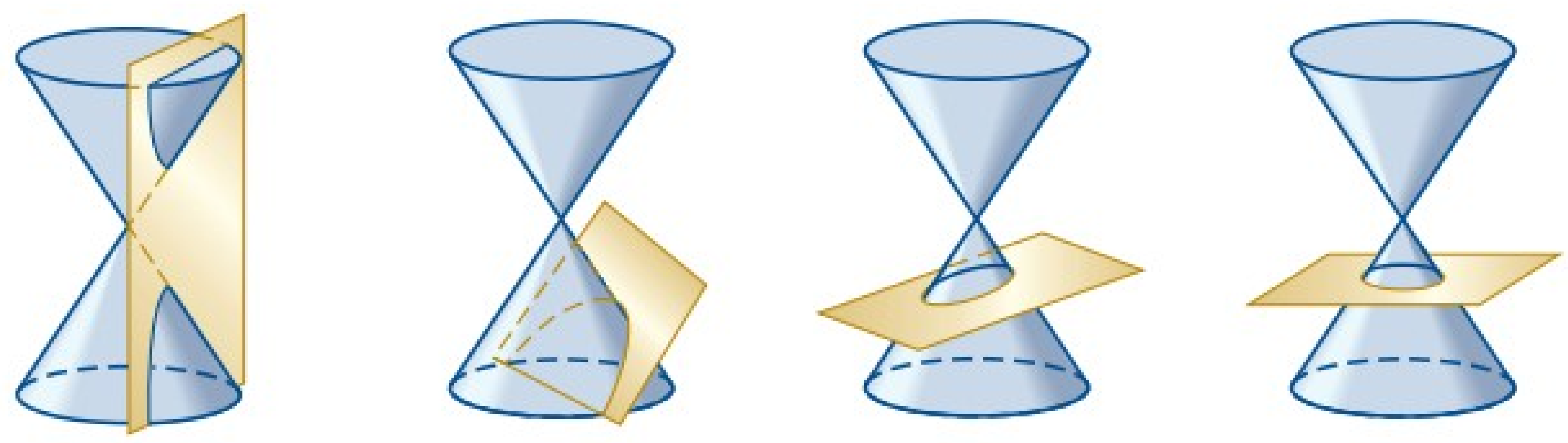
الوتر البؤري
latus rectum

لماذا؟

استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

والقطوع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.

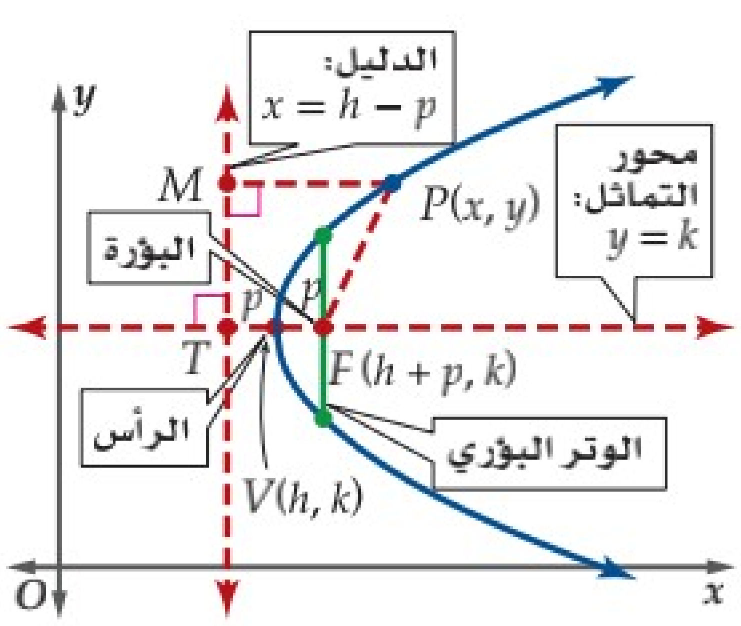


الدائرة القطع الناقص القطع المكافئ القطع الزائد

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًّا:

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة **(تسمى البؤرة)** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم **(يسمّى الدليل)**.



والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

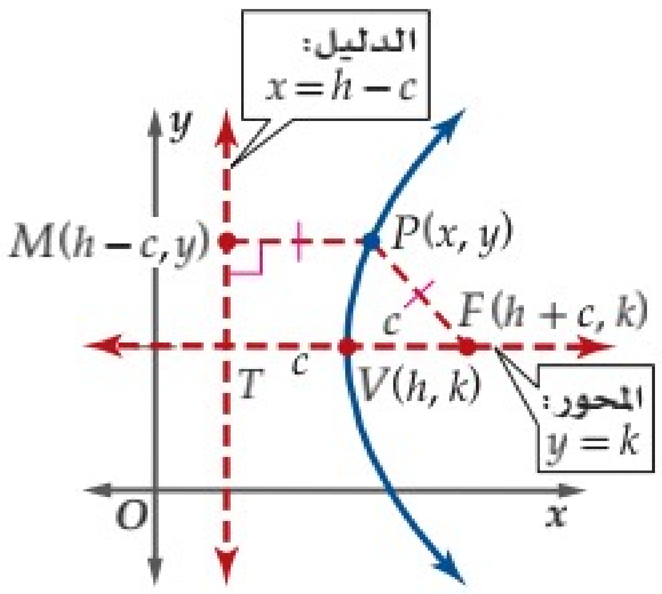
إرشادات للدراسة

القطع

كلمة قطع هي مفرد كلمة قطوع، وتعني في اللغة الجزء قال تعالى: ﴿ فَأَسْرِ بِأَهْلِكَ بِقِطْعٍ مِّنَ ٱلَّيْلِ ... ﴾[الحجر:65]

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل).



افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.

نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-y)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-c)]^2+0^2$$ ربّع الطرفين

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$ فك الأقواس

$$x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2$$ فك الأقواس

$$(y-k)^2 = 4xc-4hc$$ بسّط

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$ حلّل

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y - k)^2 = 4c(x - h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$.

وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

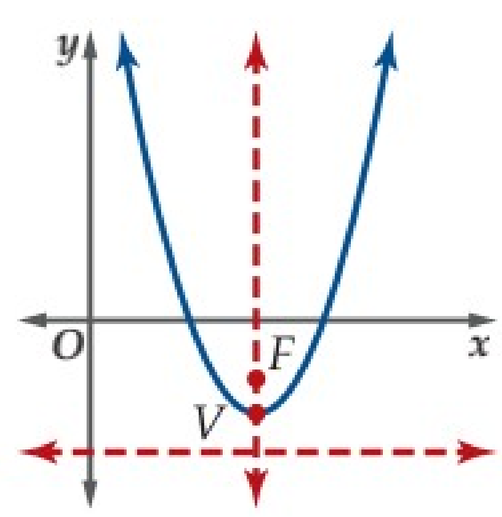
قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع

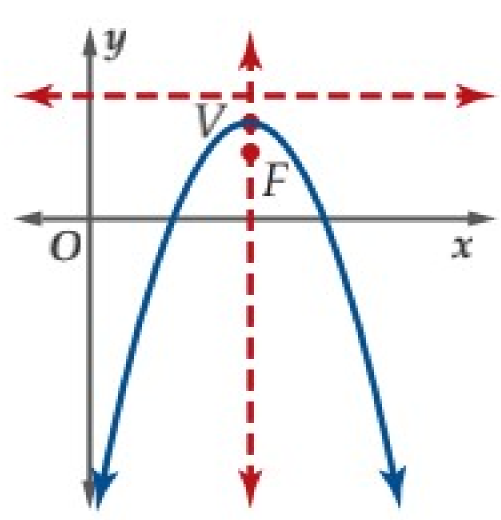
ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) ، أو أفقيًّا (إلى اليمين أو اليسار).

مفهوم أساسي **خصائص القطع المكافئ**

المعادلة في الصورة القياسية: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$



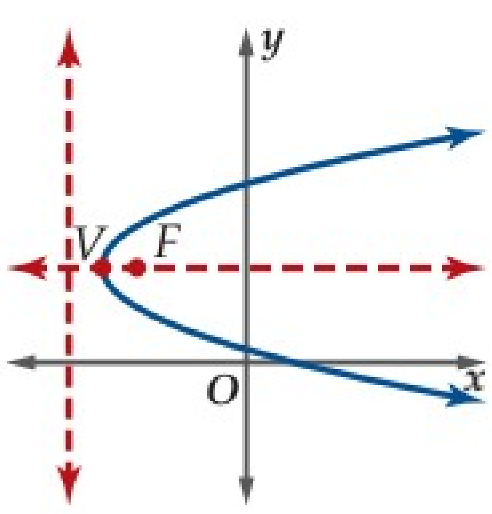
$c > 0$



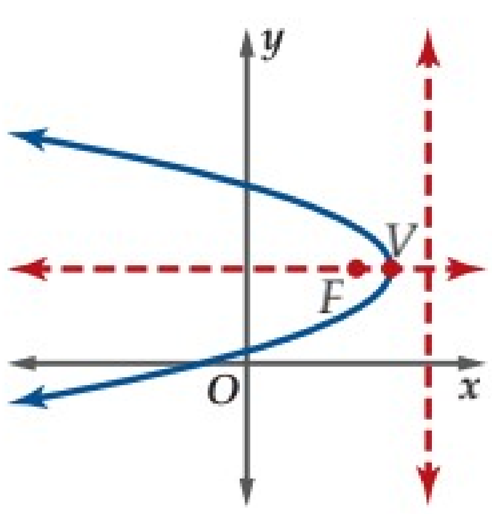
$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًّا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k + c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y - k)^2 = 4c(x - h)$



$c > 0$



$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًّا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h + c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل.

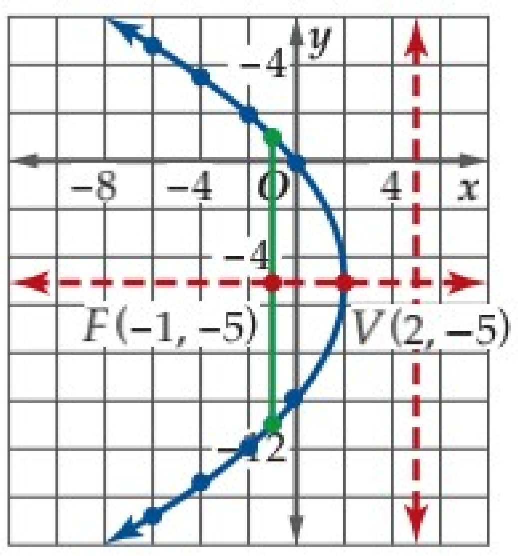
مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ؛ لذا فإن $h = 2 , k = -5$. استعمل قيم h , k , c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري:	12	$\lvert 4c \rvert$			

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



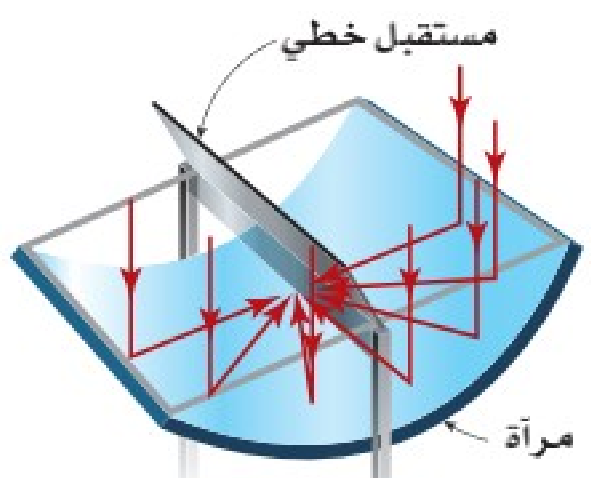
تحقق من فهمك

1A) $8(y+3) = (x-4)^2$

1B) $2(x+6) = (y+1)^2$

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية: يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x , y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطِّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k + c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h , k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

تحقق من فهمك

2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8\,(y-6)$ ، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x , y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله موازٍ لأحد محوري الإحداثيات:

– مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.

– مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.

– مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.

– مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري

لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبورة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المكافئ، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ المعادلة الأصلية

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$ أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$ أكمل المربع

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$ $\quad -\frac{1}{4}(-36) = 9$

$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$ حلّل

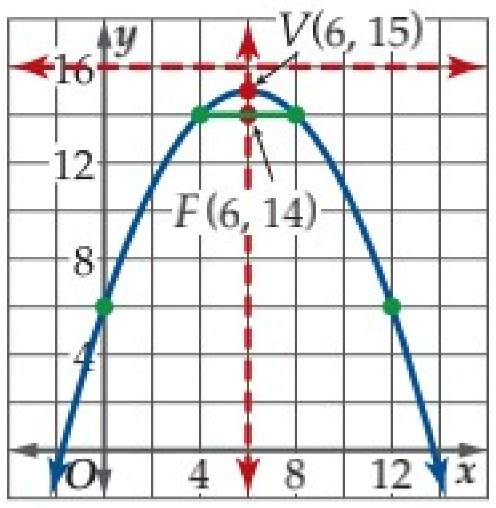
$-4(y - 15) = (x - 6)^2$ اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x ، و $c = -1$ ، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس: $(6, 15)$ $\quad (h, k)$ $\qquad$ الدليل: $y = 16$ $\quad y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $\quad (h, k + c)$ $\qquad$ محور التماثل: $x = 6$ $\quad x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $\quad |4c|$



عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

✓ تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$ $\qquad$ **3B)** $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y ، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$ ، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

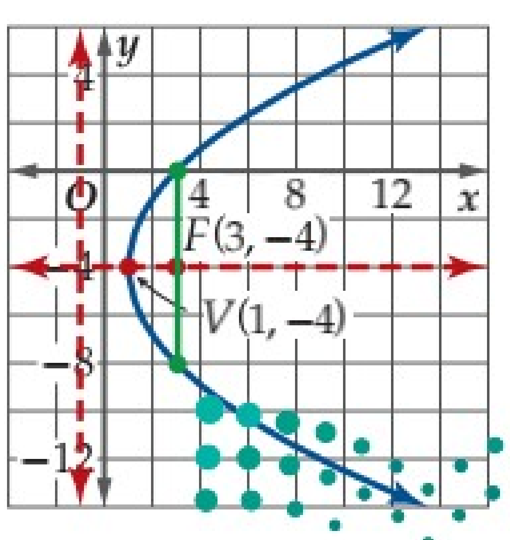
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$ الصورة القياسية

$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$ $\quad c = 2, h = 1, k = -4$

$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$ بسِّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.



مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

إرشادات للدراسة

الدليل
يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

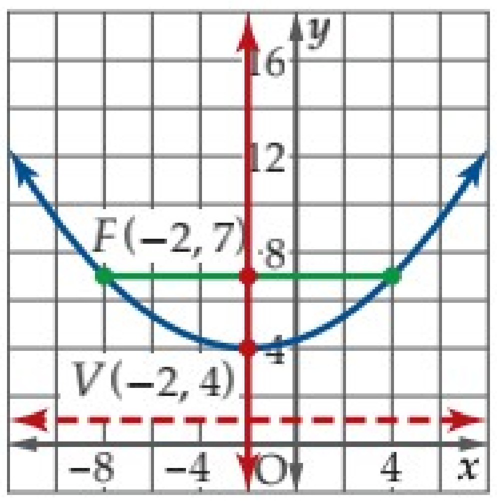
بما أن الدليل مستقيم أفقيًّا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًّا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بسّط

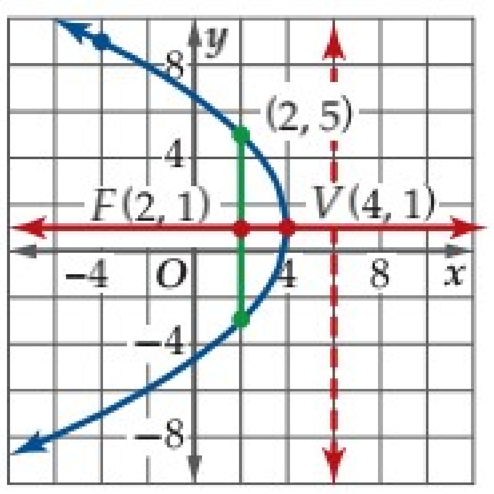


طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times 3| = 12$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$	$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسّط
$4 = c^2$	بسّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين



بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.

$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times (-2)| = 8$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

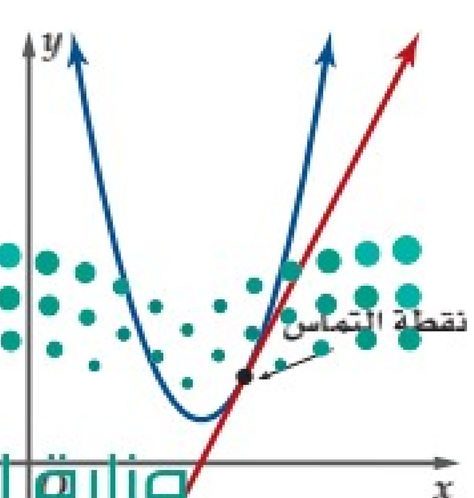
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(-2, 9)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

يمكن رسم مماسٍ لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

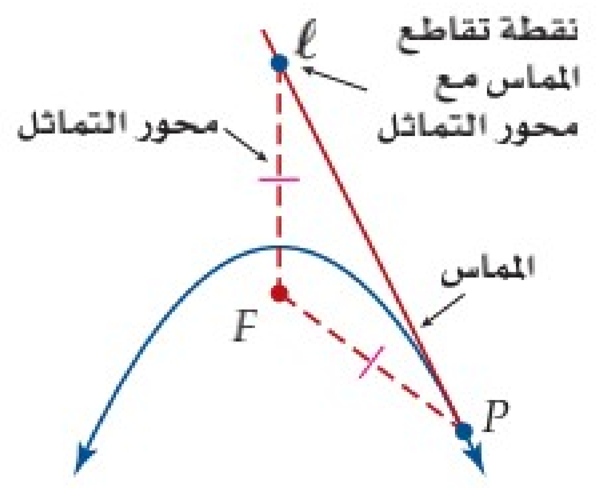
– إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$

– إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مفهوم أساسي — مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



مثال 5 — كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

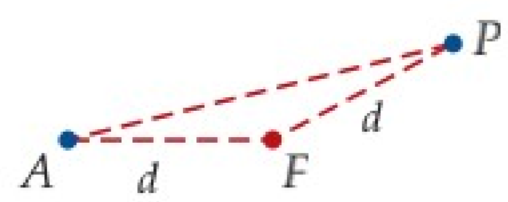
المنحنى مفتوح أفقيًا.

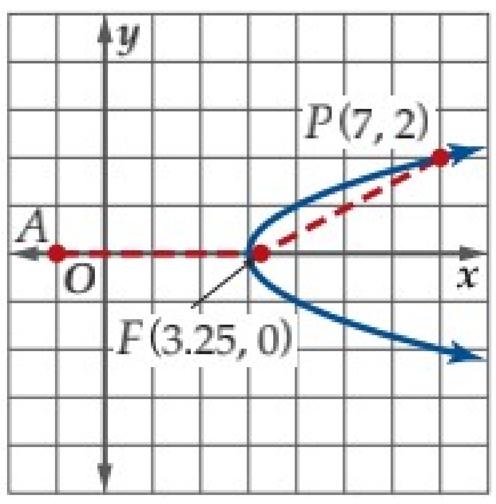
$x = y^2 + 3$ — المعادلة الأصلية

$1(x - 3) = (y - 0)^2$ — الصورة القياسية

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$ ، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F ، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — صيغة المسافة

$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$ — $(x_2, y_2) = (7, 2)$ و $(x_1, y_1) = (3.25, 0)$

$= 4.25$ — بسّط

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل) بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4}$ — صيغة الميل

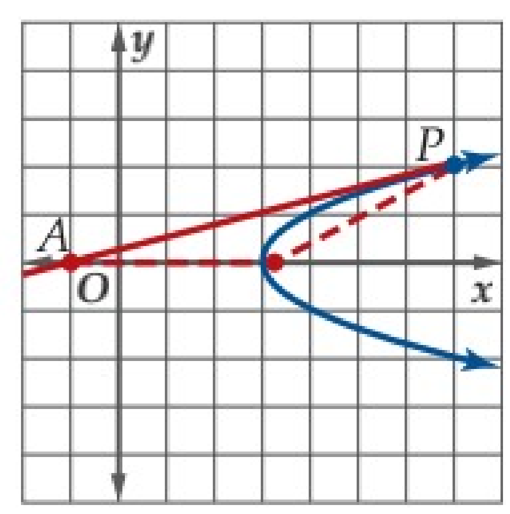
$y - y_1 = m(x - x_1)$ — معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة

$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$ — $m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$

$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$ — خاصية التوزيع

$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ — اجمع 2 إلى الطرفين

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ انظر الشكل 4.1.1



الشكل 4.1.1

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$
2) $(x+1)^2 = -12(y-6)$
3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$
4) $-40(x+4) = (y-9)^2$
5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$
6) $-4(y+2) = (x+8)^2$

7) **لوح تزلُّج:** صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

8) **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

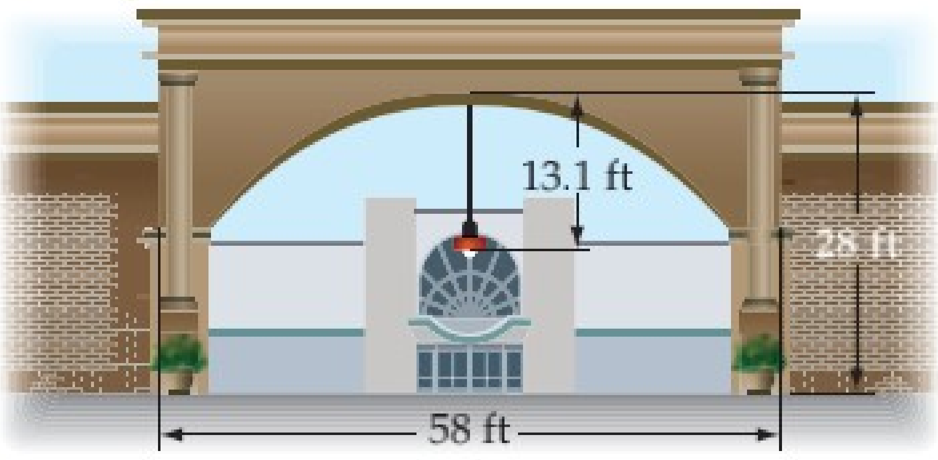
اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$
10) $y^2 + 33 = -8x - 23$
11) $3x^2 + 72 = -72y$
12) $60x - 80 = 3y^2 + 100$
13) $-33 = x^2 - 12y - 6x$
14) $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

15) البؤرة $(-7, -9)$ والرأس $(-4, -9)$.
16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.
17) البؤرة $(-1, 2)$ والرأس $(-1, -4)$.
18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20,16)$.
19) البؤرة $(-2, -3)$، والرأس $(-2, 1)$.
20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.
21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$.
22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبِّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

b) مثِّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.

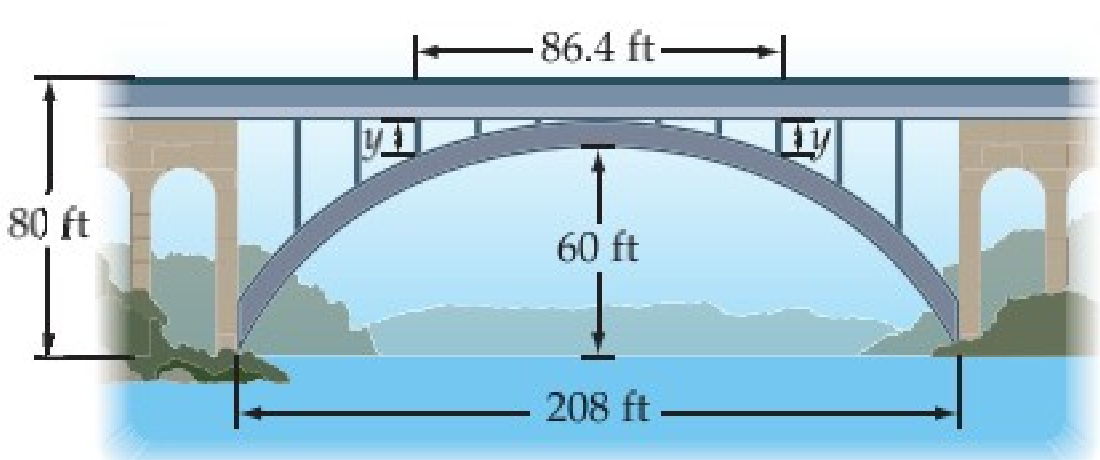
اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\ ; (-5, -5)$
25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\ ; (24, 2)$
26) $(x+6)^2 = 3(y-2)\ ; (0, 14)$
27) $-4x = (y+5)^2 ; (0, -5)$

حدِّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

28) الدليل $y = 4$ وَ $c = -2$
29) المعادلة هي $y^2 = -8(x-6)$
30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$
31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

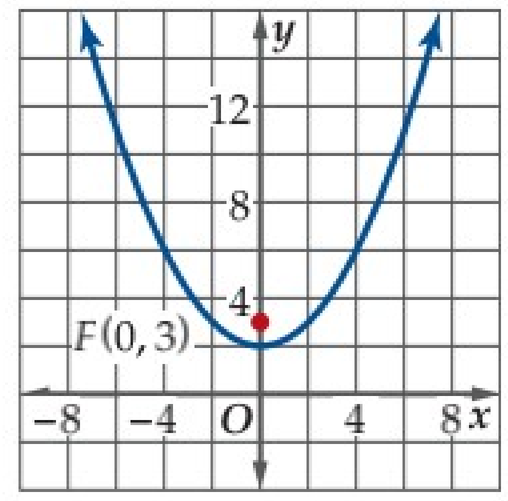


a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثِّل المحور x، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y.

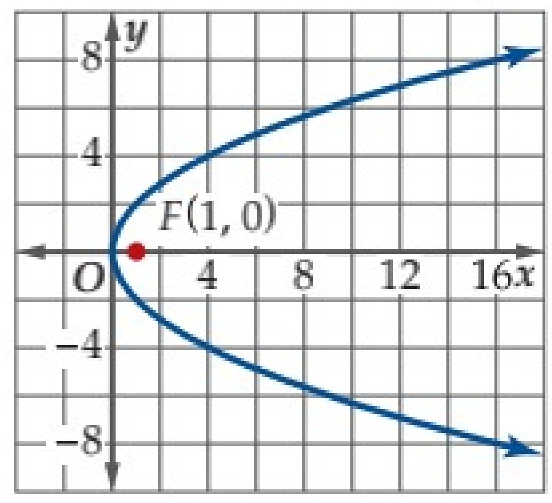
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، في كلٍّ مما يأتي:

33)



34)



35) **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًّا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

$y^2 = 4(x-2)$ (i $y^2 = 8(x-2)$ (ii $y^2 = 16(x-2)$ (iii

b) **بيانيًّا:** مثِّل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانيًّا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيِّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًّا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

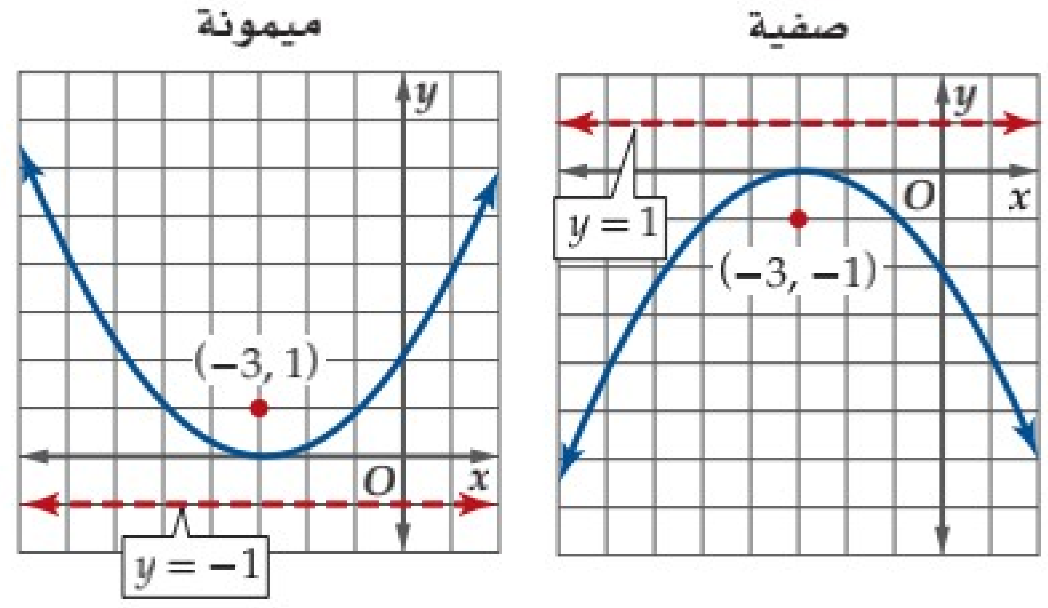
d) **تحليليًّا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا.

e) **تحليليًّا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:
$x^2 = -2(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -5(y+1)$
ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًّا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

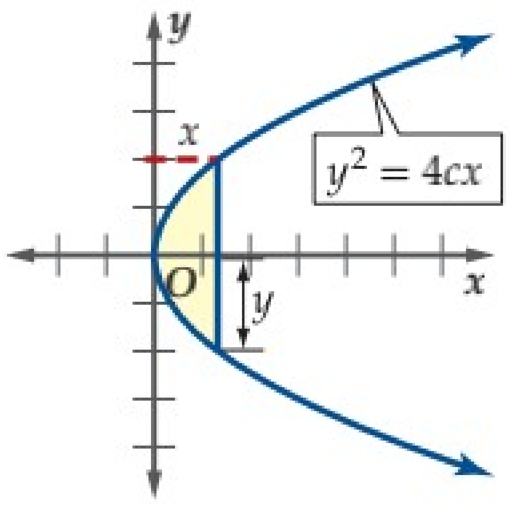
صفية ميمونة



37) **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

38) **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسِّر تبريرك.

39) **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه $(2y)$ يساوي 3 وحدات.



40) **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

41) $\log_{16} 4$ **42)** $\log_4 16^x$ **43)** $\log_3 27^x$

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. (مهارة سابقة)

44) $8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

45) $\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$

46) $\log_3 x \le -3$

47) **أوجد كلًّا مما يأتي إذا كان:** (مهارة سابقة)
$h(x) = 16 - \frac{12}{2x+3}$

a) $h(-3)$

b) $h(6x)$

c) $h(10-2c)$

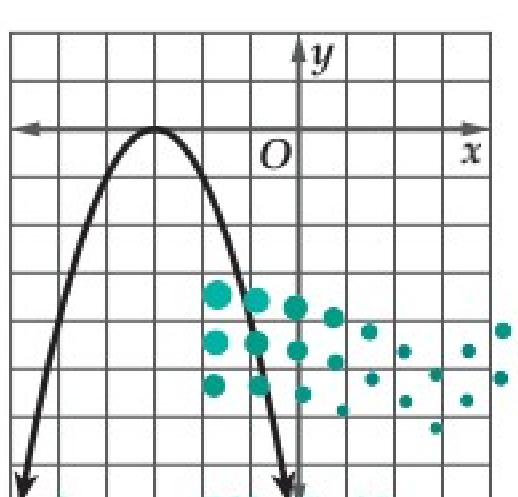
48) إذا كان $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، فأوجد $\sin\theta + \cos\theta$ ، حيث θ زاوية في الربع الأول. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

49) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

A $x^{-\frac{1}{4}}$ **B** $\sqrt{x^3}$ **C** $x^{\frac{3}{4}}$ **D** $\sqrt{x^5}$

50) ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟



A $y = x$

B $y = |x|$

C $y = \sqrt{x}$

D $y = x^2$

4-2

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًّا. (الدرس 1 — 4)

والآن:

- أحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلهما بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

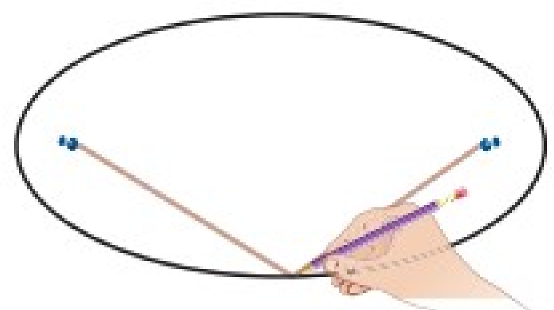
المفردات:

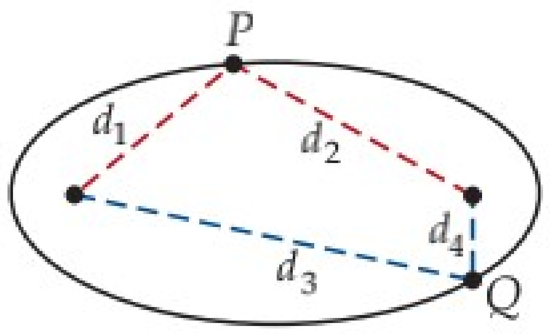
القطع الناقص ellipse
البؤرتان foci
المحور الأكبر major axis
المركز center
المحور الأصغر minor axis
الرأسان vertices
الرأسان المرافقان co-vertices
الاختلاف المركزي eccentricity

لماذا؟

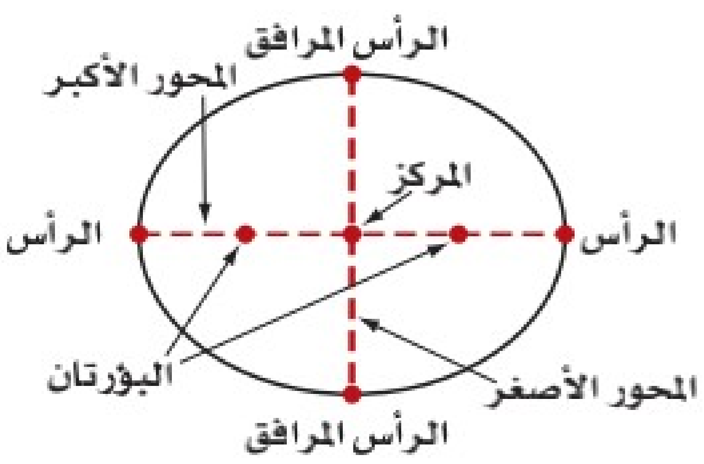
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلها بيانيًّا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًّا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .

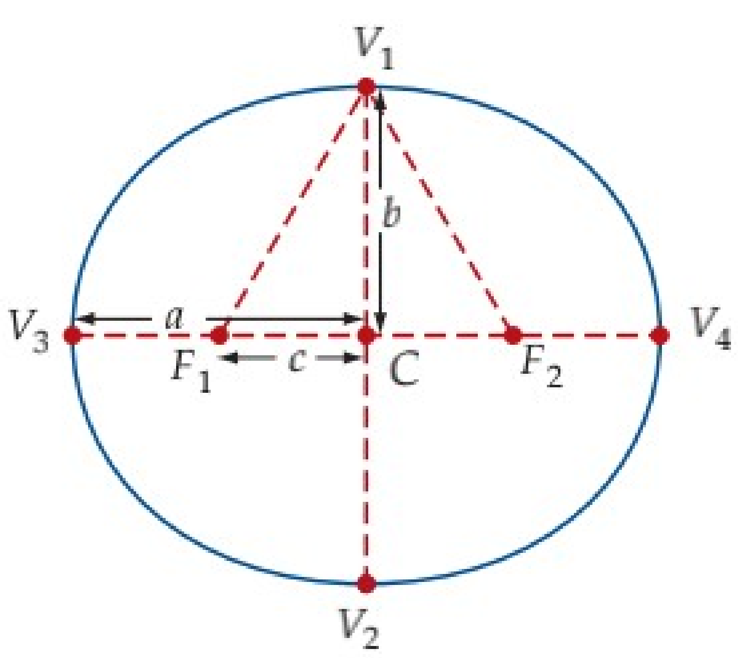




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمّىَ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



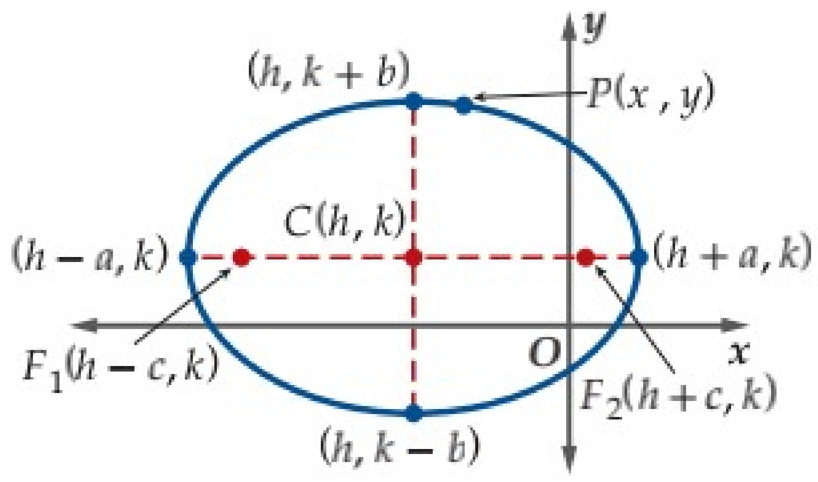
مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة. وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c



بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS $(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_1C})$ فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c.

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF1 + PF2 = 2a$.

تعريف القطع الناقص
$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a$$

اطرح
$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$

بسّط
$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$$

اقسم كلا الطرفين على 4
$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$$

ربّع الطرفين
$$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

خاصية التوزيع
$$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

بسّط
$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$a^2 - c^2 = b^2$
$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

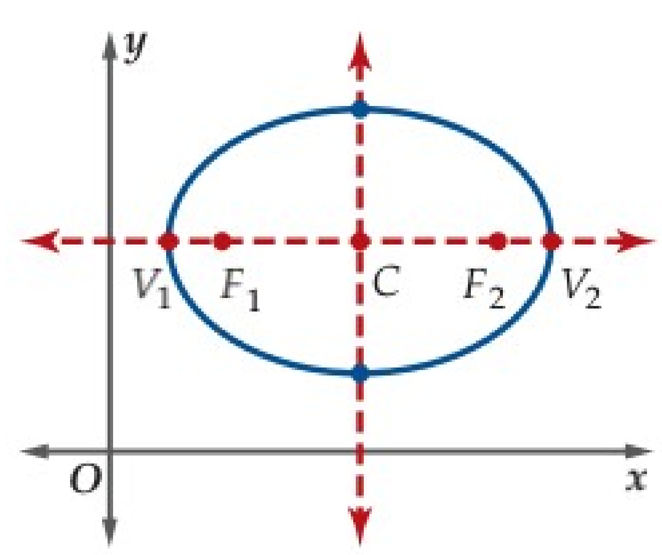
اقسم الطرفين على a^2b^2
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ، حيث $a > b$ ، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًّا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًّا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية:

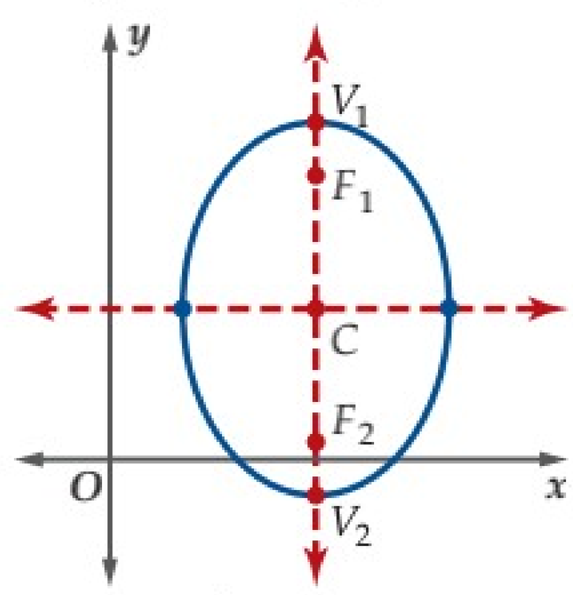
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
الرأسان: $(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$
المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a$
المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b$
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

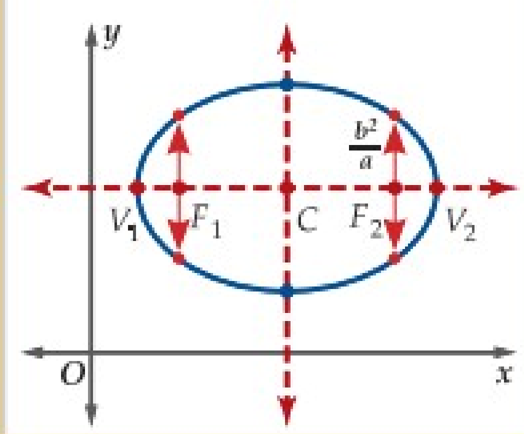


الاتجاه: المحور الأكبر رأسي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
الرأسان: $(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$
المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a$
المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b$
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
طول البعد البؤري: $2C$

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.
لرسم القطع الناقص نعين نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.



مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

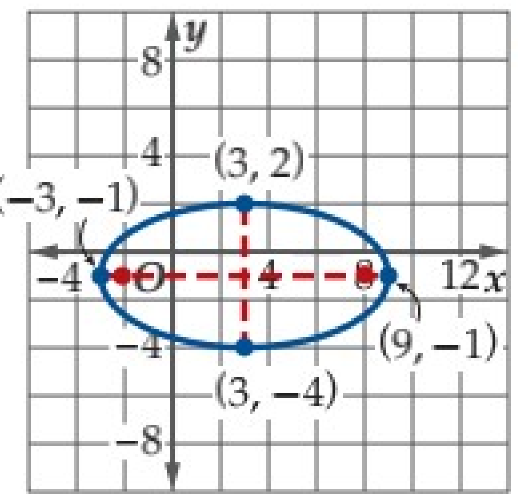
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

a) $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث
$h = 3, k = -1, a = \sqrt{36} = 6, b = \sqrt{9} = 3, c = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(-3, -1)$ و $(9, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, -4)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y = -1$، وطوله 12	$y = k$ ، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x = 3$، وطوله 6	$x = h$ ، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

b) $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

$$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$$ المعادلة الأصلية

$$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$$ جمّع الحدود المتشابهة

$$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$$ حلّل

$$4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$$ كمّل المربعين

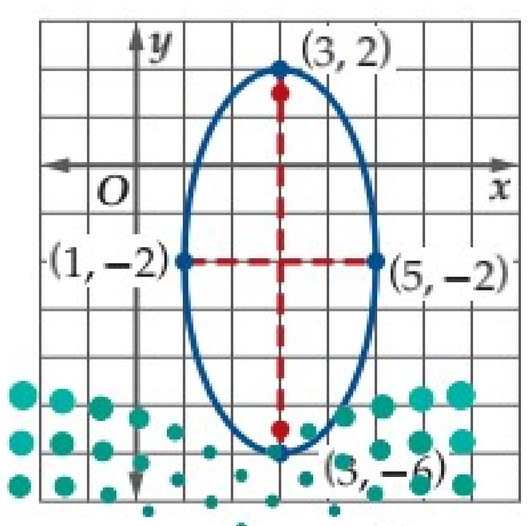
$$4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$$ حلّل وبسّط

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$ اقسم الطرفين على 16

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:
$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, -6)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(5, -2)$ و $(1, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x = 3$، وطوله 8	$x = h$ ، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y = -2$، وطوله 4	$y = k$ ، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

✓ تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

1B) $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, 2)$, $(-6, -8)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر: $\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$

نصف طول المحور الأصغر: $\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$$(h, k) = \left(\frac{-6 + (-6)}{2}, \frac{2 + (-8)}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$= (-6, -3) \quad \text{بسّط}$$

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

b) الرأسان $(-4, 4)$, $(6, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$a = 5 \quad \text{بسّط}$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$c = 3 \quad \text{بسّط}$$

أوجد قيمة b .

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{العلاقة بين } a, b, c$$

$$3^2 = 5^2 - b^2 \quad a = 5, c = 3$$

$$b = 4 \quad \text{بسّط}$$

وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$= (1, 4) \quad \text{بسّط}$$

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .

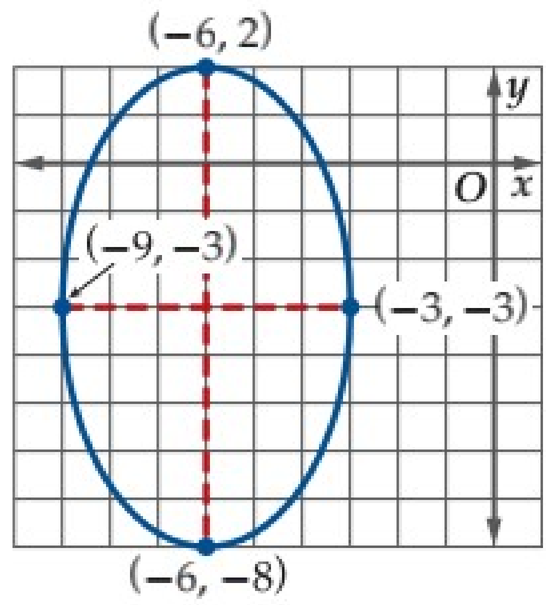
تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

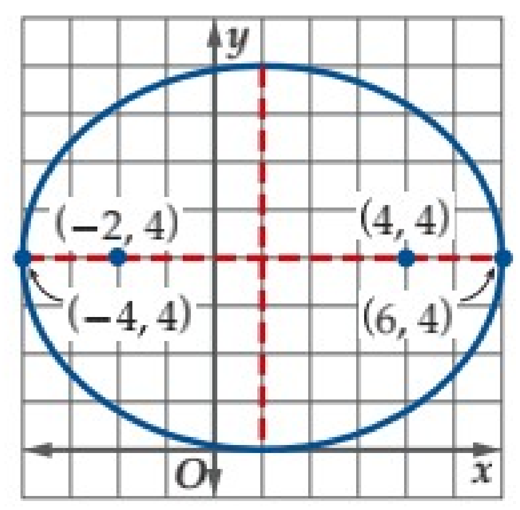
2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

إرشادات للدراسة

الاتجاه
إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.



الشكل 4.2.1



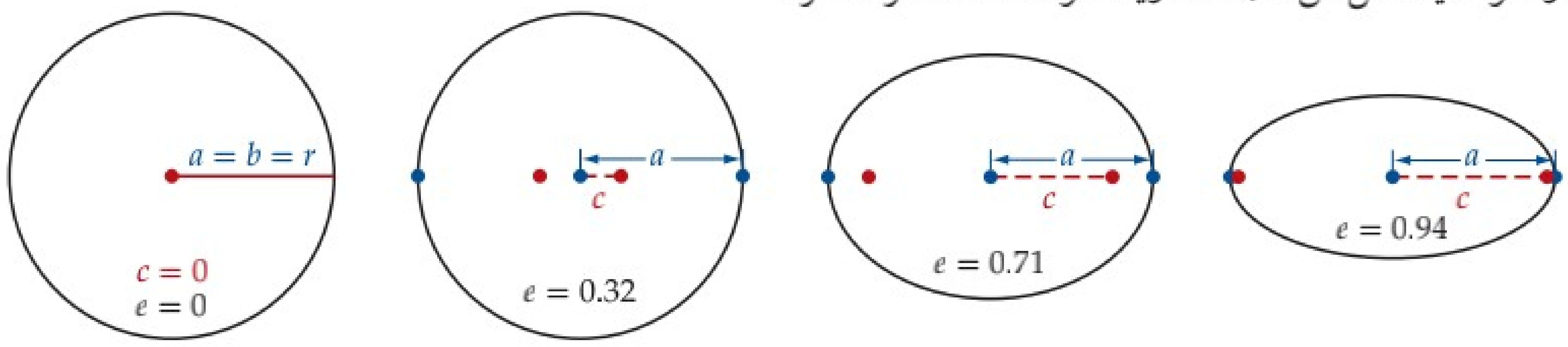
الشكل 4.2.2

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي — الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي c , e تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{(x-6)^2}{100} = 1$.

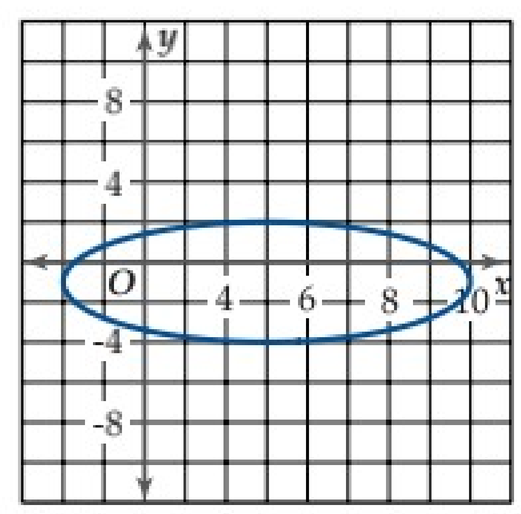
أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$	العلاقة بين a, b, c
$c^2 = 100 - 9$	$a^2 = 100, b^2 = 9$
$c = \sqrt{91}$	بسّط

نستعمل قيمتي a , c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$	$a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

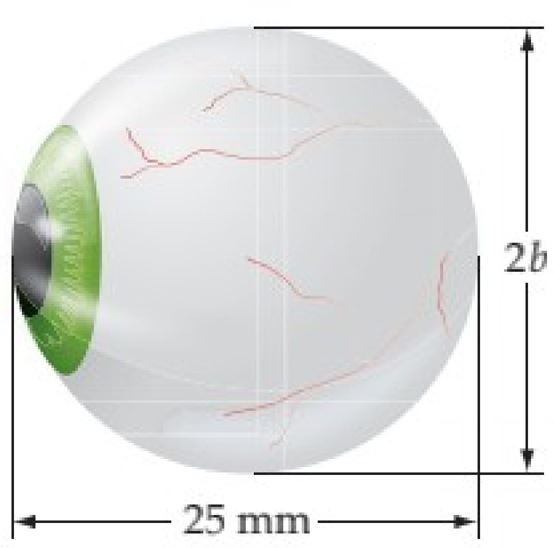
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$	تعريف الاختلاف المركزي
$0.28 = \frac{c}{12.5}$	$e = 0.28, a = 12.5$
$c = 3.5$	اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$	العلاقة بين a, b, c
$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$	$c = 3.5, a = 12.5$
$b = 12$	بسّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$ ، ويساوي 24 mm تقريبًا .

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad e=0 \text{ عندما } a=b$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في } a^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad a \text{ نصف قطر الدائرة}$$

مفهوم أساسي **الصورة القياسية لمعادلة الدائرة**

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2 \quad (h,k)=(-1,2),\ r=\frac{8}{2}=4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16 \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$ ، $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{6+(-8)}{2}\right) \quad (x_1,y_1)=(7,6),\ (x_2,y_2)=(-1,-8)$$

$$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right) \quad \text{اجمع}$$

$$=(3,-1) \quad \text{بسّط}$$

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة بين نقطتين}$$

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2} \quad (x_1,y_1)=(7,6),\ (x_2,y_2)=(3,-1)$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2} \quad \text{اطرح}$$

$$=\sqrt{65} \quad \text{بسّط}$$

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2=65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$.

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$ ، $(3, -3)$.

تدرب وحل المسائل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5) الرأسان $(-7, -3)$, $(13, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3)$, $(-5, -3)$

6) الرأسان $(4, -9)$, $(4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(2, 1)$, $(-13, 2)$ ، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0)$, $(-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3)$, $(-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7)$, $(-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

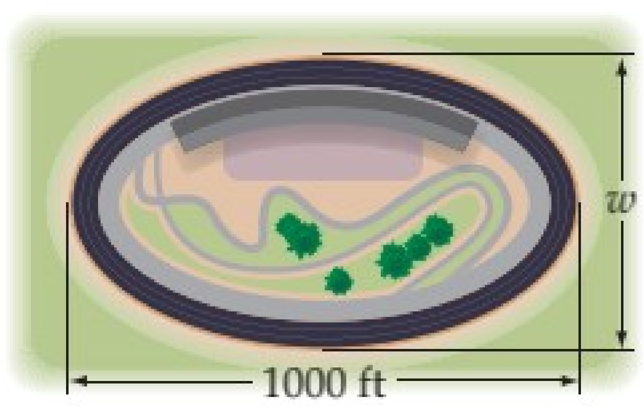
10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$

13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1)$, $(2, -4)$

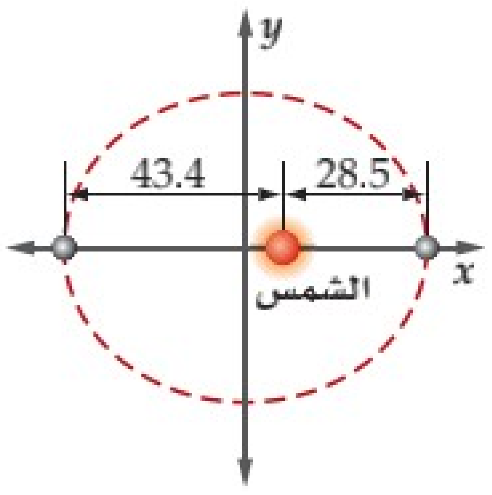
19) $(-4, -10)$, $(4, -10)$

20) $(5, -7)$, $(-2, -9)$

21) $(-6, 4)$, $(4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

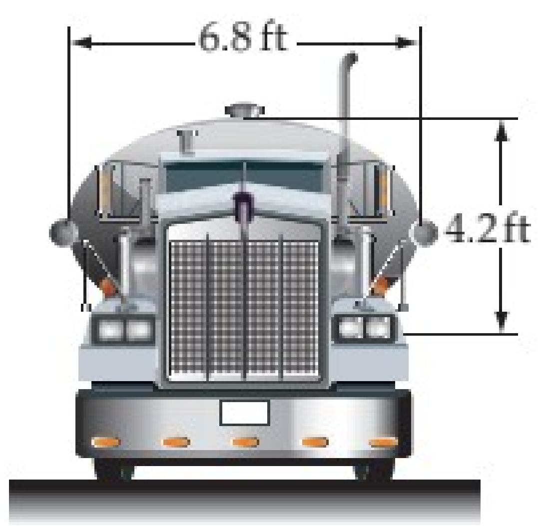
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي للخزان.

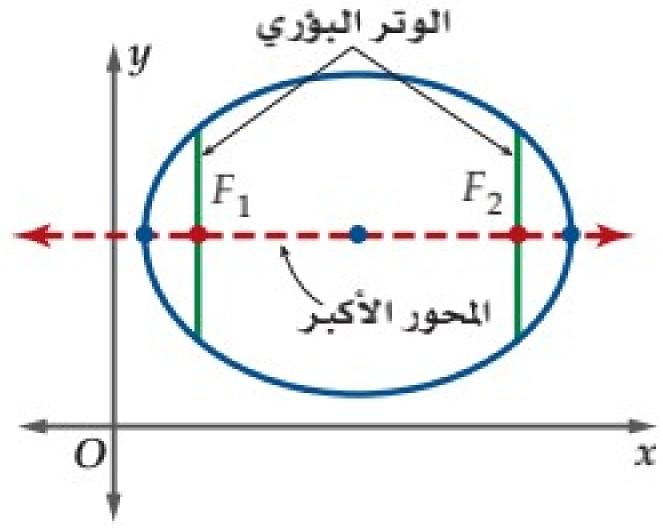
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0)$, $(-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

29) الرأسان المرافقان $(6, 1)$, $(0, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$

30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

32) **هندسة:** تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكّل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

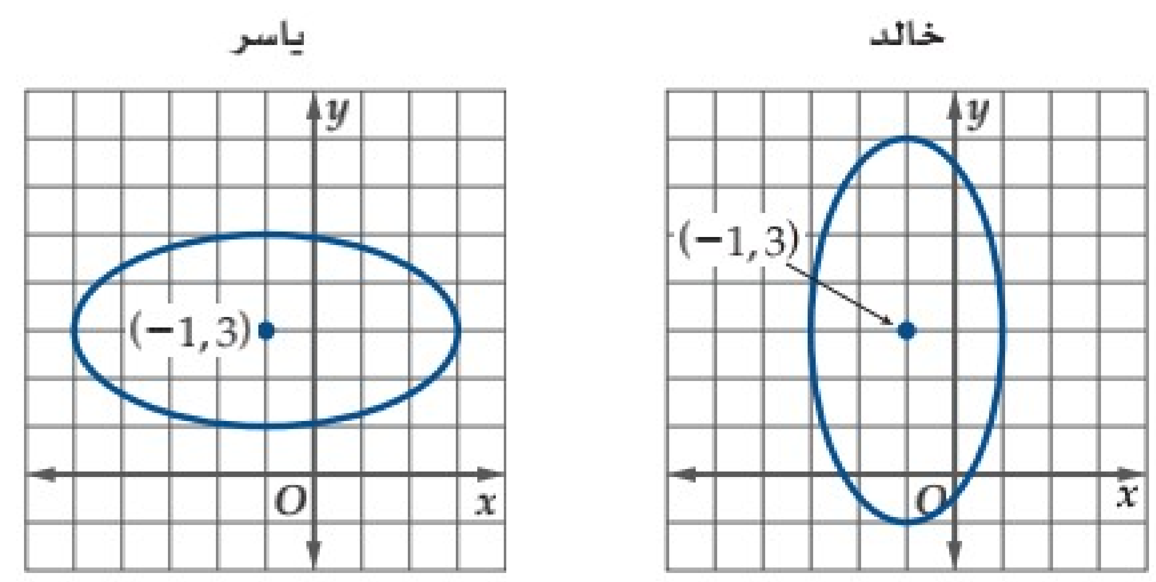
اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$ **34)** $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$ **36)** $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

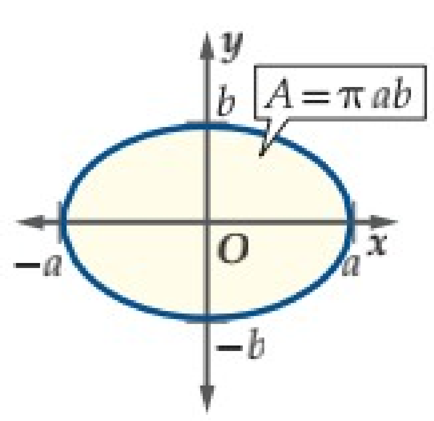
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** مثّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟



38) **تبرير:** حدّد ما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1, \frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$، حيث $r > 0$، البؤرة نفسها. وضِّح إجابتك.

تحدٍّ: **تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي:**



39) $b + a = 12, A = 35\pi$

40) $a - b = 5, A = 24\pi$

41) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت معادلة دائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني.

42) **اكتب:** اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b.

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 1-4)

43) $y = 3x^2 - 24x + 50$ **44)** $y = -2x^2 + 5x - 10$

45) $x = 5y^2 - 10y + 9$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$. (الدرس 5-3)

46) $\sin\theta = \cos\theta$

47) $\sin\theta = 1 + \cos\theta$

48) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدِّد مجالها. (مهارة سابقة)

49) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

50) $f(x) = \sqrt{5 - x}$

51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

52) مثّل الدالة $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ بيانيًّا، وحدِّد مداها.
(مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$ **C** $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$

B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$ **D** $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

اختبار منتصف الفصل

الدرسان 4-2 , 4-1

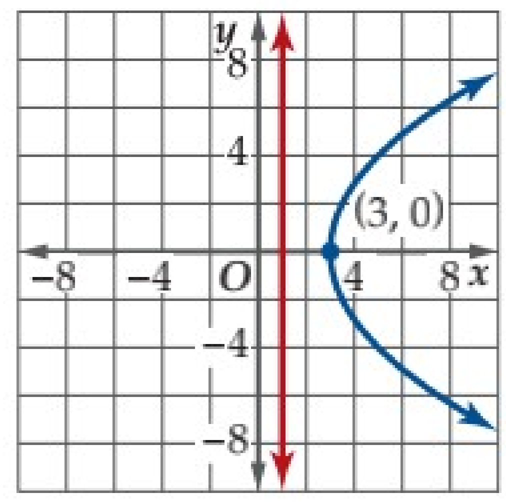
اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 4-1)

1) البؤرة $(1, 5)$، الرأس $(1, 3)$

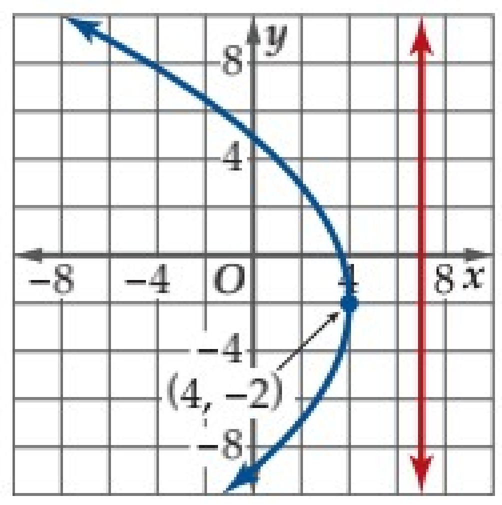
2) البؤرة $(-7, -5)$، الرأس $(-7, 1)$

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثّلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 4-1)

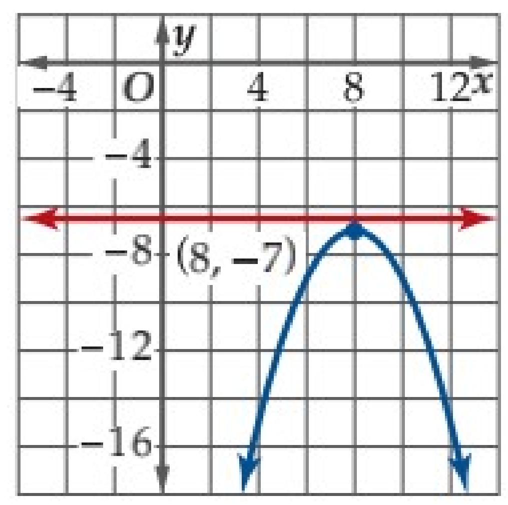
A



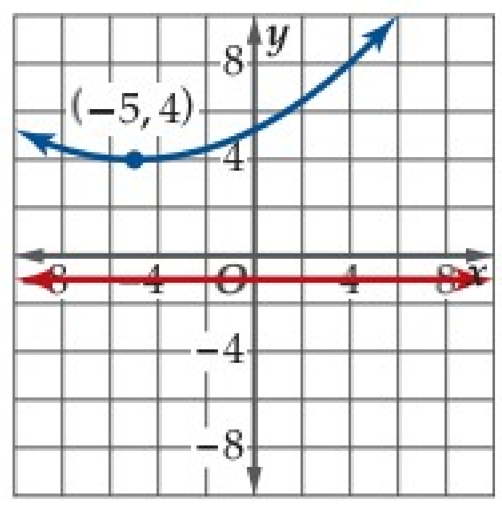
C



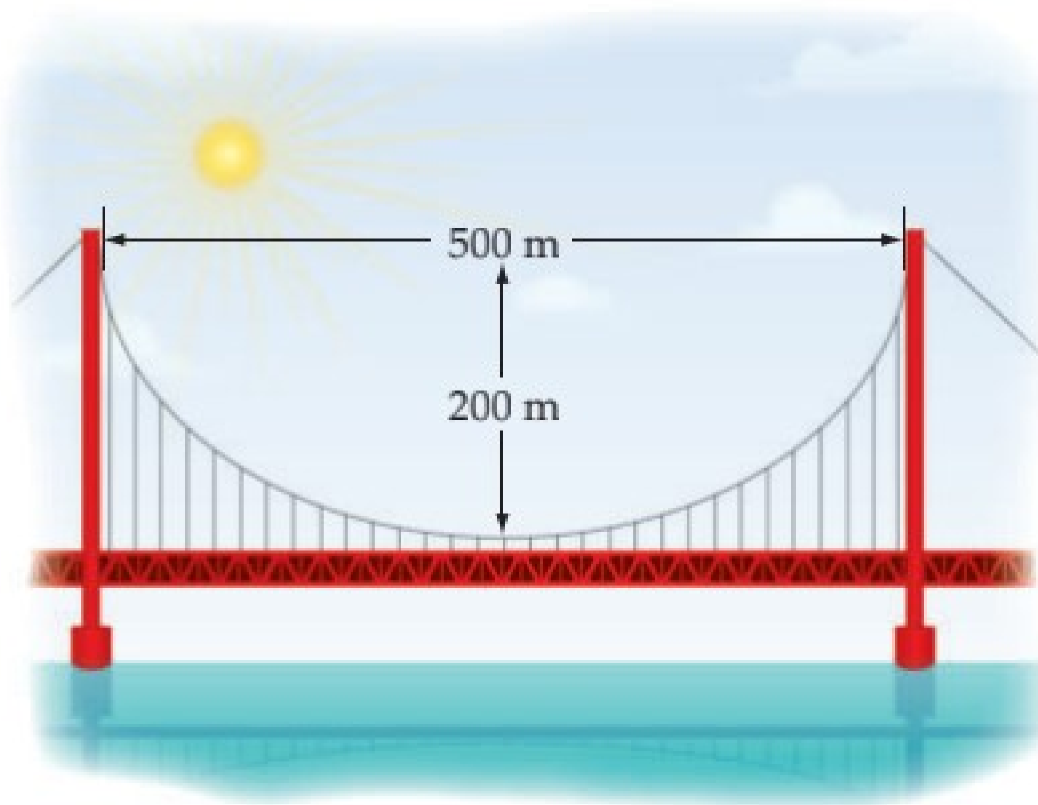
B



D



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 4-1)



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-2)

5) $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

6) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

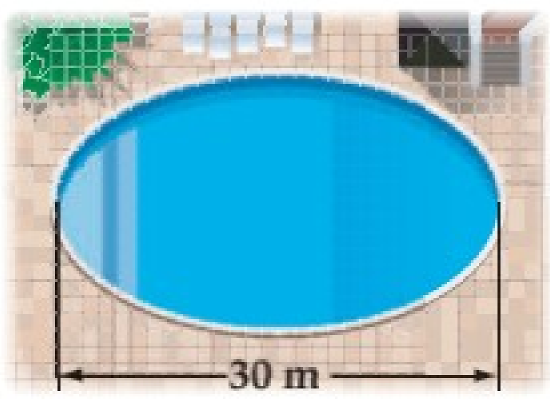
7) الرأسان $(-3, -3)$, $(9, -3)$، والبؤرتان $(-1, -3)$, $(7, -3)$.

8) البؤرتان $(3, 7)$, $(3, 1)$، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان $(1, -13)$, $(1, -1)$، والرأسان المرافقان $(-2, -7)$, $(4, -7)$.

10) الرأسان $(8, -9)$, $(8, 5)$، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

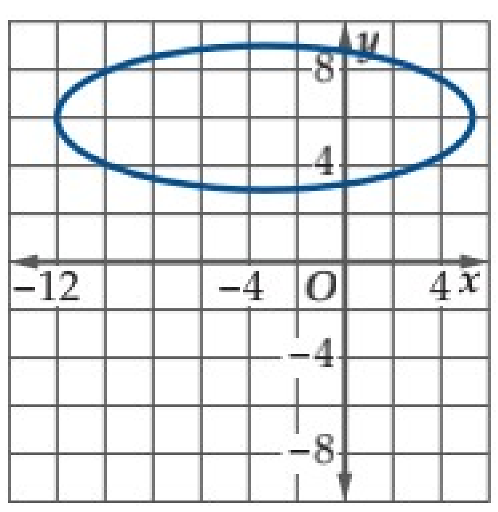
11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30m واختلافه المركزي 0.68 . (الدرس 4-2)



a) ما أكبر عرض للبركة؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة.

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل القيمة الأقرب لطول المحور الأكبر في القطع الناقص الممثّل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 4-2)



A 17 وحدة

B 9 وحدات

C 6 وحدات

D 3 وحدات

4-3 القطوع الزائدة
Hyperbolas

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًا.
(الدرس 2-4)

والآن:

- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثِّلها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

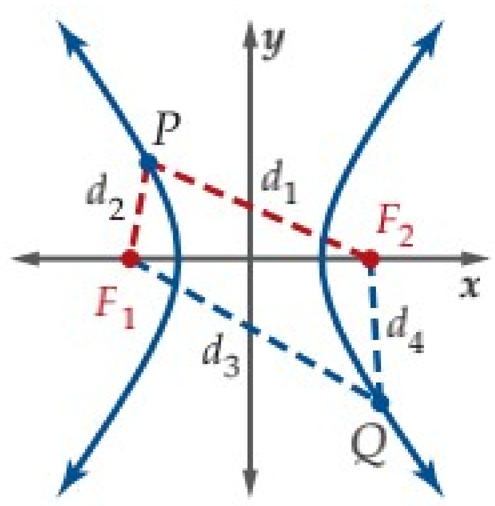
القطع الزائد hyperbola
البؤرتان foci
المركز center
الرأسان vertices
المحور القاطع transverse axis
المحور المرافق conjugate axis

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًا مفتوحًا من إحدى جهتَيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

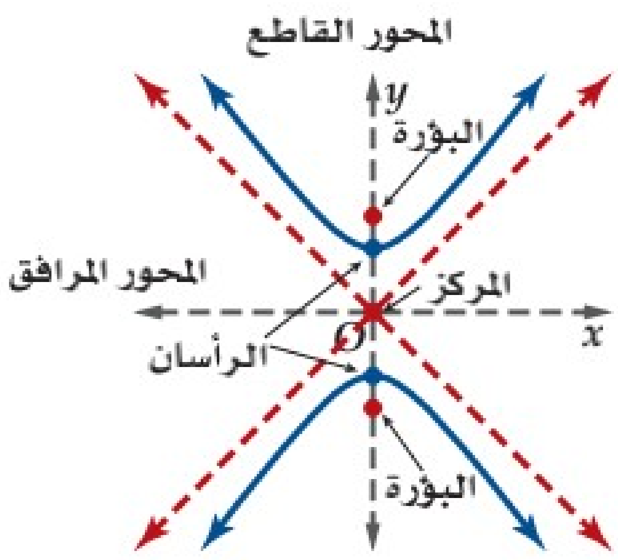
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

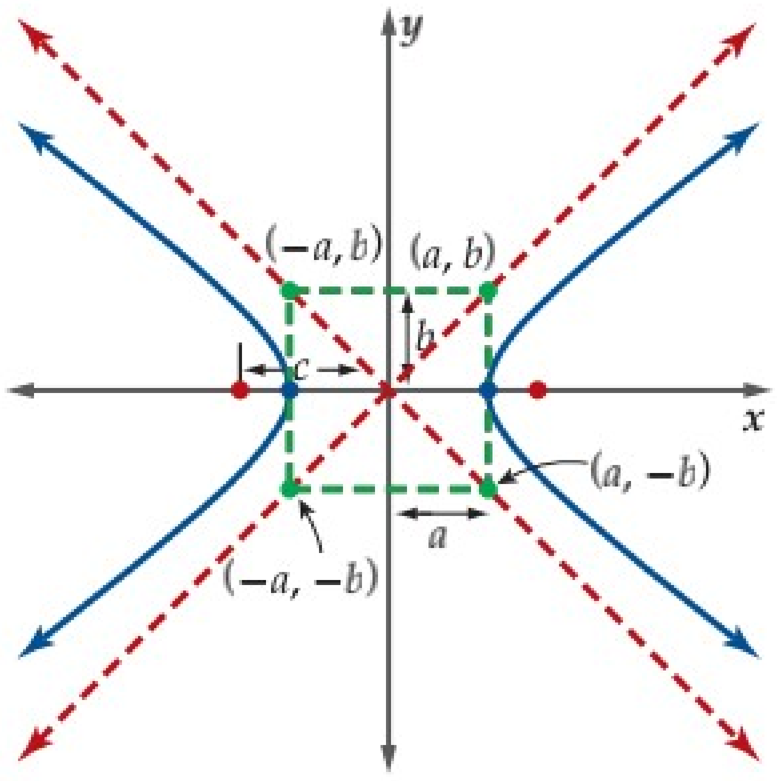


يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، **ورأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.



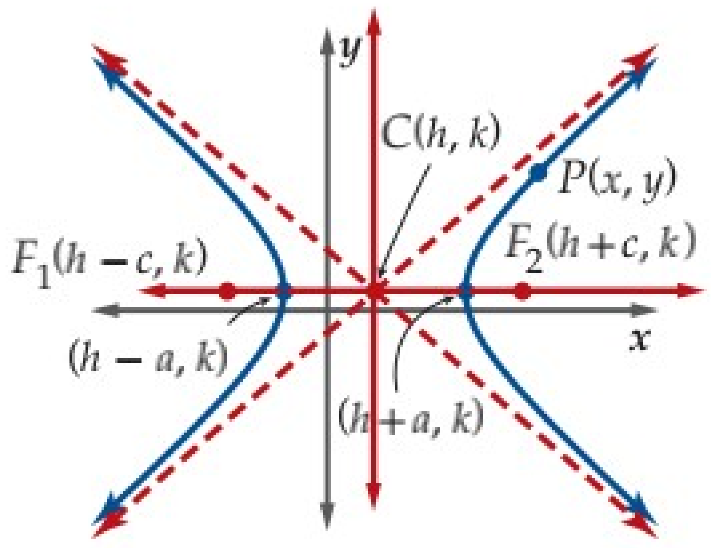
إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.

وزارة التعليم
Ministry of Education

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:



يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$.
وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$$

اجمع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$$

بسّط
$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$$

اقسم الطرفين على -4 .
$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$$

ربّع الطرفين
$$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

الخاصية التوزيعية
$$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

بسّط
$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

الخاصية التوزيعية
$$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$a^2 - c^2 = -b^2$
$$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$$

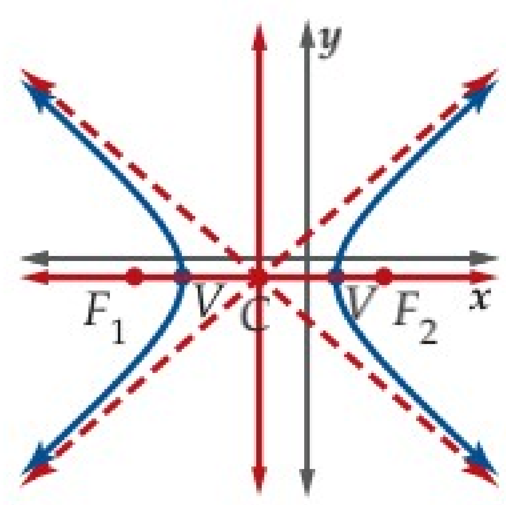
اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

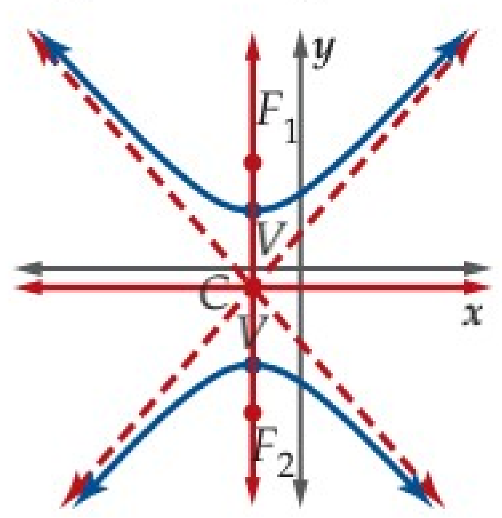
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي
المركز: (h, k)
الرأسان: $(h \pm a, k)$
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
المحور القاطع: $y = k$، وطوله $2a$
المحور المرافق: $x = h$، وطوله $2b$
خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع رأسي
المركز: (h, k)
الرأسان: $(h, k \pm a)$
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
المحور القاطع: $x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق: $y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
طول البعد البؤري: $2C$

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

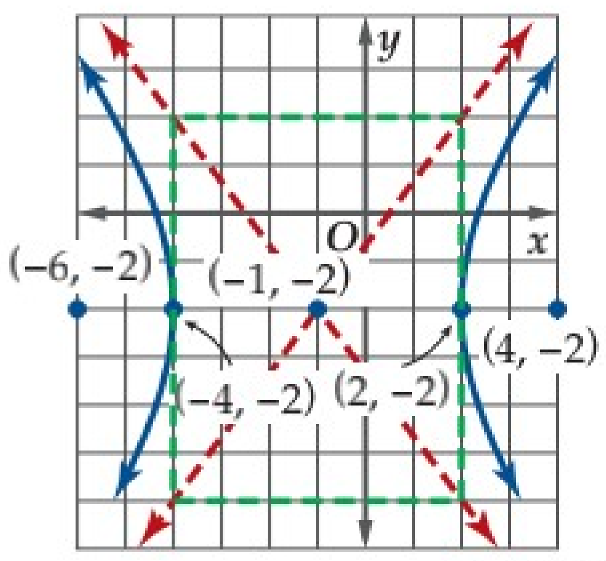
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(2, -2), (-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2), (-6, -2)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y + 2 = \frac{4}{3}(x+1)$, $y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1)$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$
	$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$	

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$ ، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B) $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$	المعادلة الأصلية
$(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$	جمِّع الحدود المتشابهة
$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$	حلِّل
$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$	أكمل المربع
$25(y+2)^2 - 16(x-3)^2 = 400$	حلِّل وبسِّط
$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$	اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

تنبيه!

عندما تمثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

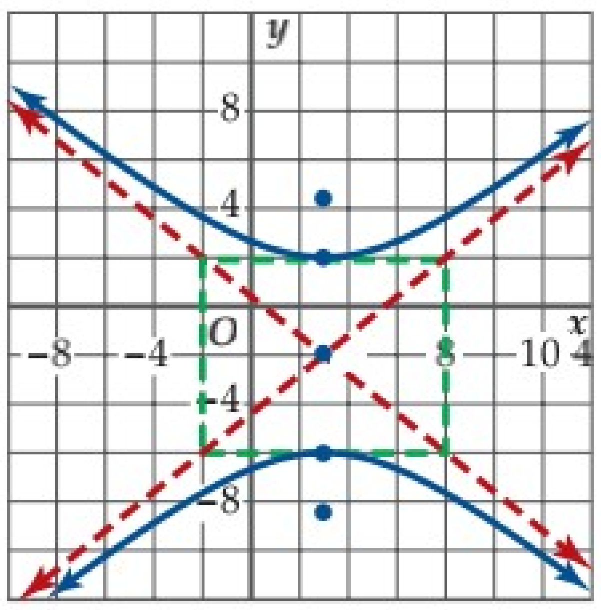
تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1 .

الاتجاه:	رأسي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(3, 2), (3, -6)$	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(3, 4.4), (3, -8.4)$	$(h, k \pm c)$

خطا التقارب: $y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-3)$, $y-(-2)=\frac{4}{5}(x-3)$ $\qquad y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

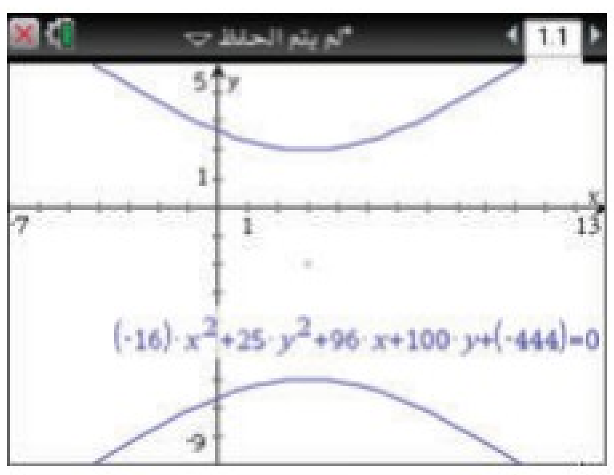
$$y=\frac{-4}{5}x+\frac{2}{5} \quad , \quad y=\frac{4}{5}x-\frac{22}{5}$$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$، والبعد الآخر $2b = 10$، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبَي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

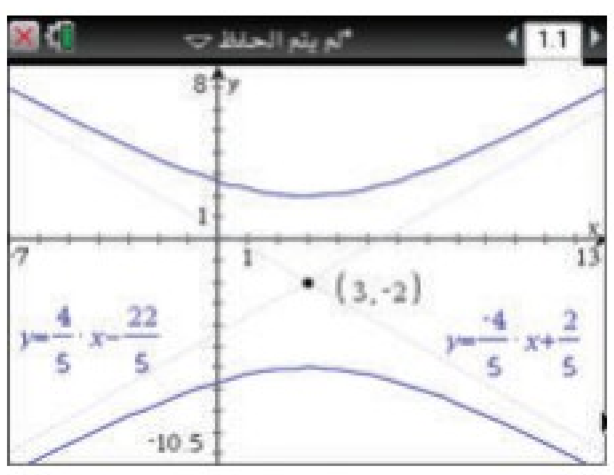


التحقق: تمثيل القطع الزائد بيانيًّا وتحديد خصائصه، باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire ،

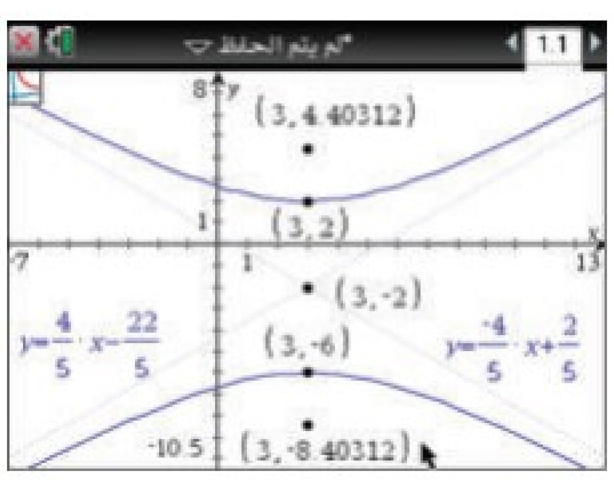
- مثِّل القطع الزائد بالضغط على المفاتيح: menu esc on ثم اختيار
  3: إدخال / تحرير الرسم البياني 2: معادلة
  6: القطوع المخروطية $1: a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$



- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة لمنحنى القطع الزائد.



- حدِّد خصائص القطع الزائد بالضغط على menu، ثم اختيار
  6: تحليل الرسم البياني ومنها 7: تحليل القطوع المخروطية
  ثم اضغط على مفتاح كل خاصية من خصائص القطع الزائد:
  1: المركز 6: الخطوط المقاربة 2: الرؤوس
  3: البؤرة



- قارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط وخطَّي التقارب.

الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)
كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولوينوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

✓ تحقق من فهمك

2A) $4y^2-9x^2-8y-36x=68$ $\qquad$ **2B)** $2x^2-3y^2-12x-36=0$

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافيةً.

مـثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-3, -2)$ — نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

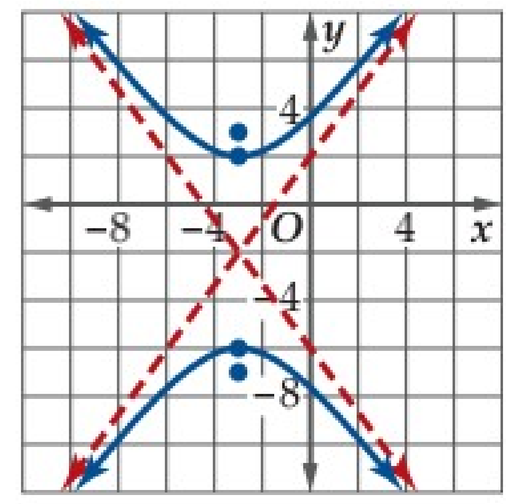
$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ — المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ — المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ — $c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-6, 0)$ — نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ — المسافة بين أي من الرأسين والمركز

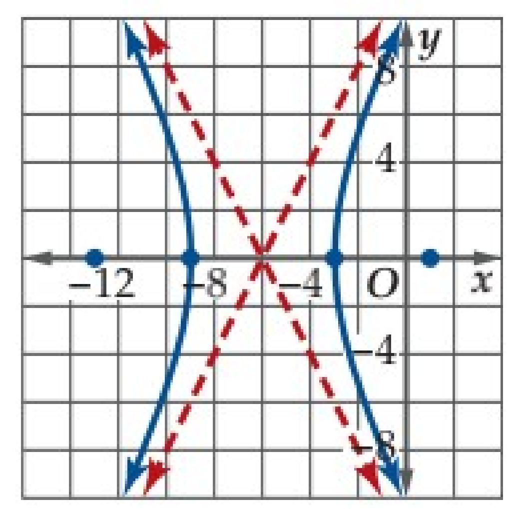
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ — الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ — $a = 3$

$b = 6$ — بسّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 2)$, $(3, 6)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B) البؤرتان $(2, -2)$, $(12, -2)$ ، وخطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$, $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1 ، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 48 + 36$ $\quad a^2 = 48, b^2 = 36$

$c = \sqrt{84}$ بسّط

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$ $\quad a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$

≈ 1.32 بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B) $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

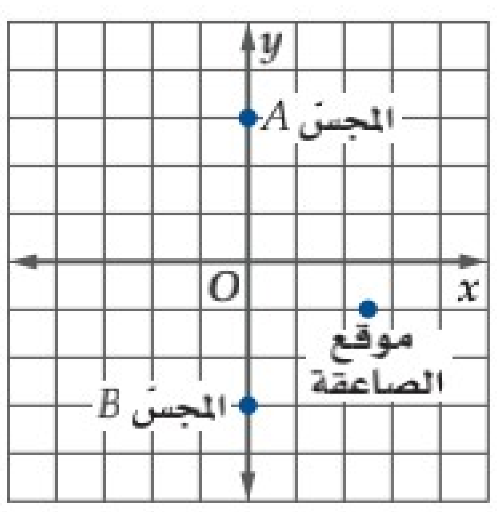
مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

أرصاد: **يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .**

a) **اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.**



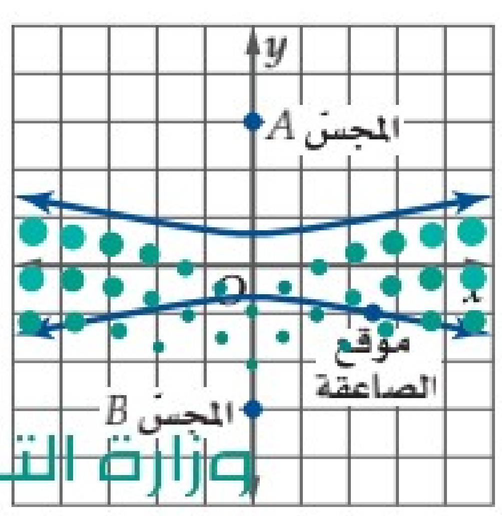
حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B ، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$ ، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B ، فإن $2a = 1.5$ ، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3^2 = 0.75^2 + b^2$ $\quad c = 3, a = 0.75$

$8.4375 = b^2$ بسّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y.

المعادلة الأصلية $$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$$

$x = 2.5$ $$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1$$

حل بالنسبة لـ y $$y \approx \pm 0.99$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي -0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

تحقق من فهمك

5) ملاحة بحرية: تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًا.

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$, $(-100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

تدرب وحل المسائل

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا: (مثال 1)

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

2) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

4) $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$

5) $3x^2 - 2y^2 = 12$

6) $3y^2 - 5x^2 = 15$

7) **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًا. (مثال 1)

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًا: (مثال 2)

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

10) $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

11) $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

12) $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3)

13) البؤرتان $(-1, -7)$, $(-1, 9)$، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(-5, 5)$, $(7, 5)$، والبؤرتان $(-9, 5)$, $(11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 3)$, $(-1, 9)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

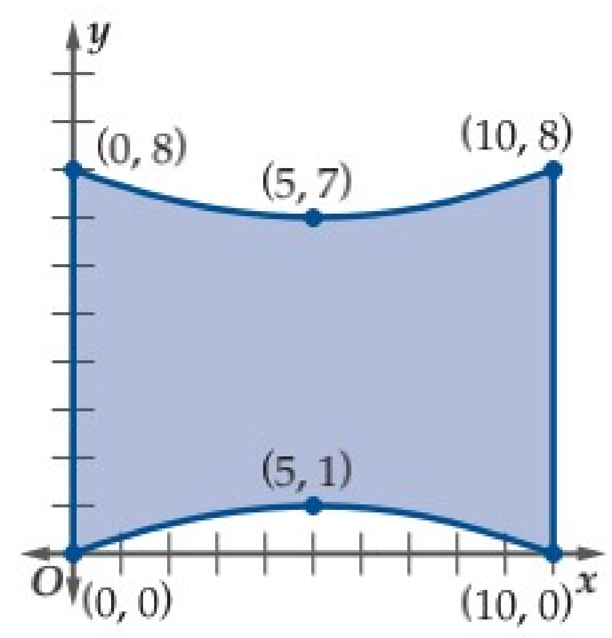
16) البؤرتان $(-17, 7)$, $(9, 7)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$، والمحور القاطع أفقيًا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(-2, 2)$, $(2, 10)$، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-2, 13)$, $(-2, -1)$.

20) **هندسة معمارية :** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft ، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$ **22)** $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

23) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ **24)** $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

27) **طيران :** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بُعدها عن المطار A . (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

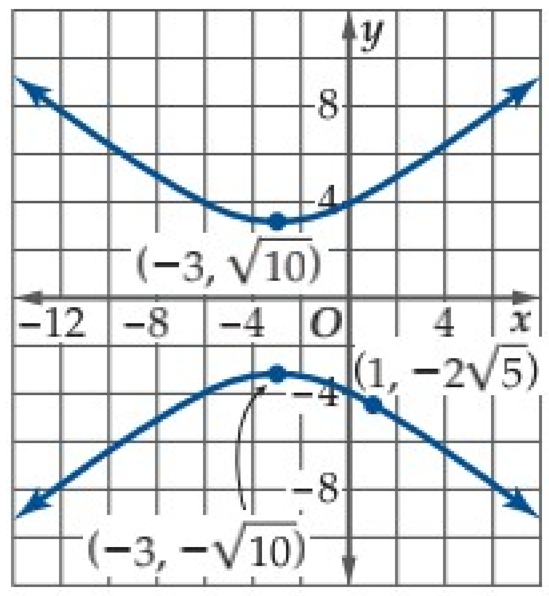
28) **هندسة معمارية :** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m ، فما معادلة القطع الزائد؟

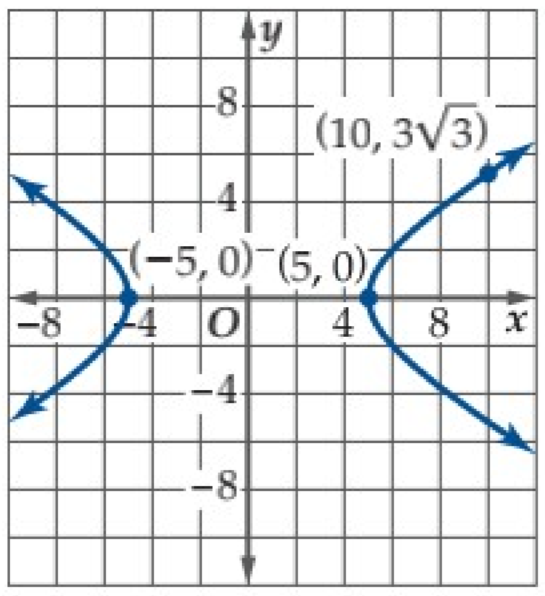
b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m ، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m ، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

اكتب معادلة القطع الزائد الممثَّل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)

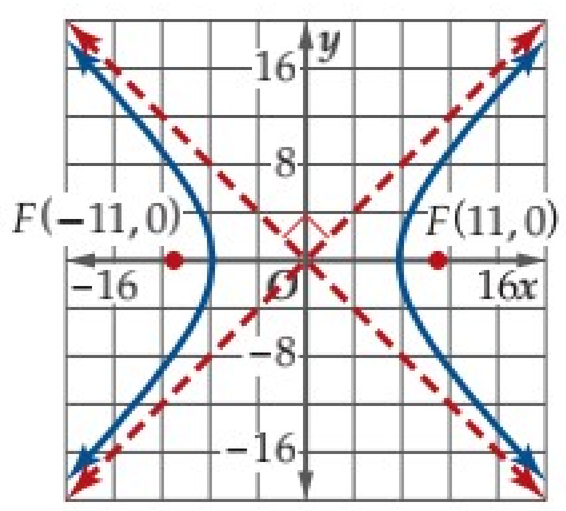


30)



31) **طقس :** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec ، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec ، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

32) يتشكّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.



33) **تمثيلات متعددة :** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًّا :** مثّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه .

b) **تحليليًّا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

c) **تحليليًّا :** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

d) **بيانيًّا :** مثل منحنيي القطعين في الفرع c.

e) **لفظيًّا :** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المرافقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين.

35) **تبرير:** افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a) $rs = 0$

b) $rs > 0$

c) $r = s$

d) $rs < 0$

36) **تبرير:** افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟

37) **تحدٍّ:** قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$ ، $F_2(0, -9)$، ويمر بالنقطة P. يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2. اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية.

38) **برهان:** يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$.

39) **اكتب:** صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما تعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع.

مراجعة تراكمية

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

40) $(x-8)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{81} = 1$

41) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{(y+5)^2}{49} = 1$

42) $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+5)^2}{36} = 1$

43) **مقذوفات:** قُذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$ قدم. (الدرس 4-1)

a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟

b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ. (الدرس 3-5)

44) $\tan\theta = \sec\theta - 1$

45) $\sin\theta + \cos\theta = 0$

46) $\csc\theta - \cot\theta = 0$

تدريب على اختبار

47) **مراجعة:** يمثّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$.

4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية
Identifying Conic Sections

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.

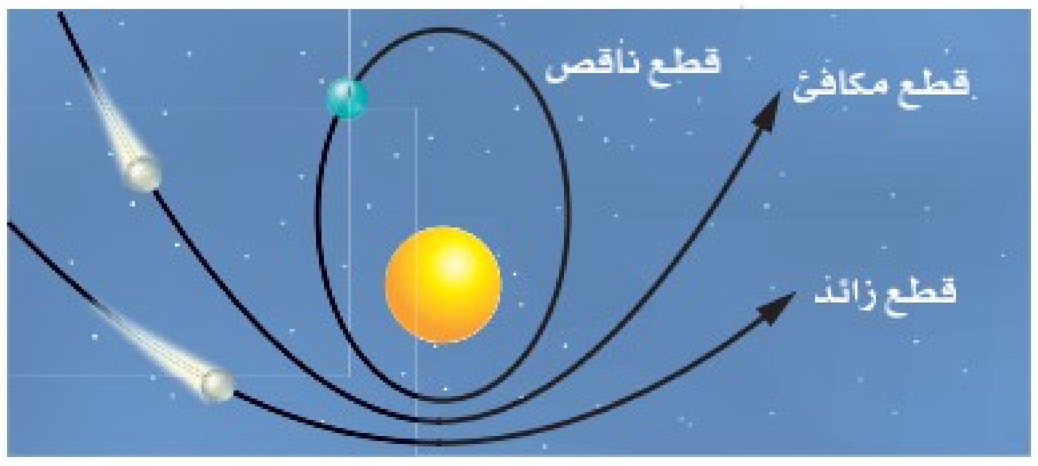
(الدروس من 1—4 إلى 3—4)

والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثّل مركز الشمس بؤرة للقطع.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله:

a) $\mathbf{16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0}$

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ المعادلة الأصلية

$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$ حلّل وبسّط

$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$ مربع كامل

$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ اقسم كل حدّ على 400

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $\mathbf{x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0}$

$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$ جمّع الحدود المتشابهة

$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$ أكمل المربع

$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$ حلّل وبسّط

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ اقسم كلا الطرفين على 16

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

مراجعة المفردات

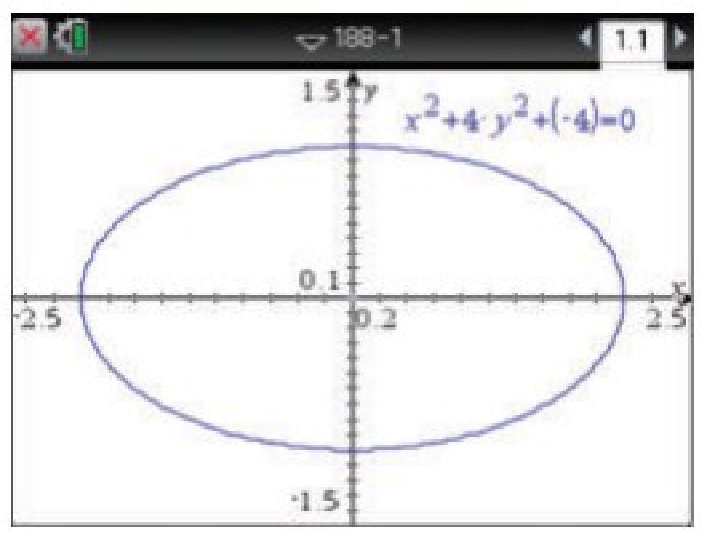
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو $b^2 - 4ac$.

مفهوم أساسي **تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز**

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

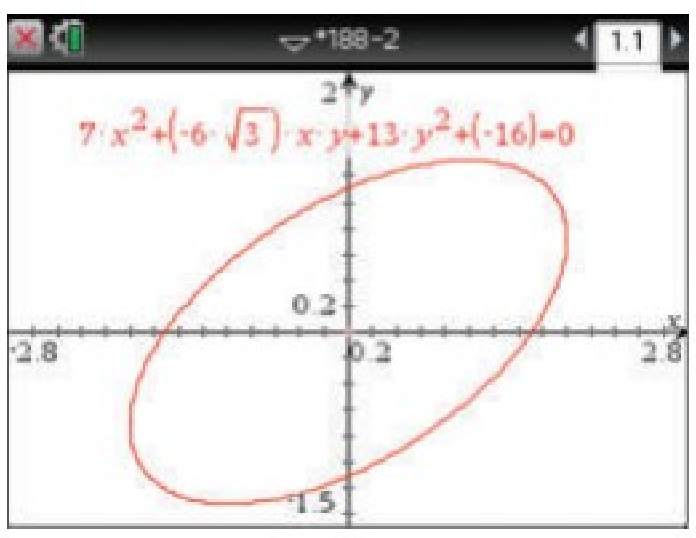
يكون القطع أفقيًا أو رأسيًا عندما $B = 0$، أما إذا كانت $B \neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًا ولا رأسيًا.

قطع ناقص أفقي: $B = 0$



$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

قطع ناقص ليس رأسيًا ولا أفقيًا : $B \neq 0$



$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

مثال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$A = 4, B = -3, C = 1$

المميز يساوي $(-3)^2 - 4(4)(1) = -7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثِّل قطعًا ناقصًا.

b) $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$A = 3, B = 2, C = -5$

المميز يساوي $2^2 - 4(3)(-5) = 64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0, B = 0, C = 4$

المميز يساوي $0^2 - 4(0)(4) = 0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثِّل قطع مكافئ.

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله. (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11) $16xy + 8x^2 + 10y^2 - 18x + 8y = 13$

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام.

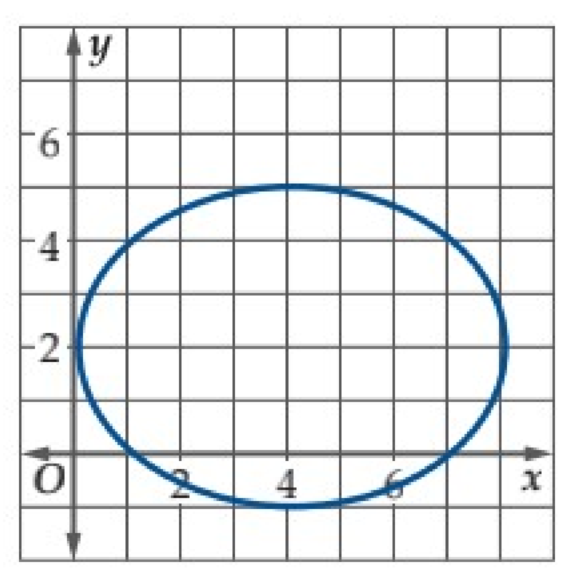
a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

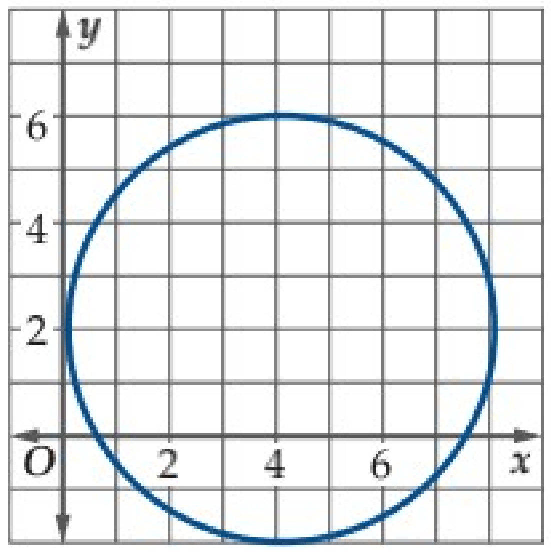
c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثِّل كلًّا منها:

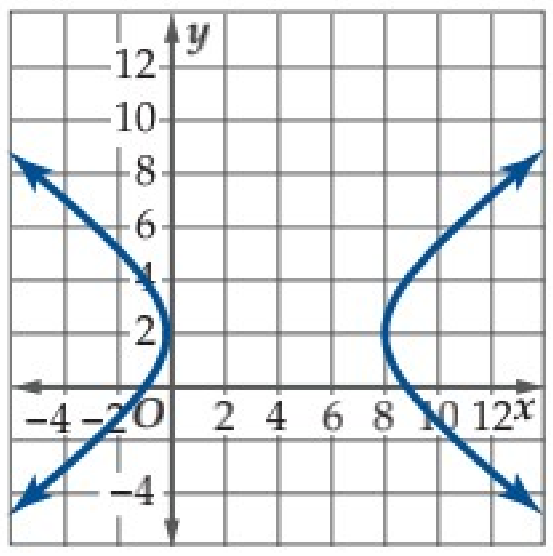
13)



14)



15)



a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

قابل بين كل حالة في التمارين 19-16 مع المعادلة التي تمثِّلها من a-d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

16) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft .

17) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

18) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

19) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

20) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليليًا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحةأحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا .
"عندما يكون القطع رأسيًّا، وتكون $A = C$، فإن القطع دائرة".

22) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، بحيث يكون $A = 9C$، وتُمثِّل المعادلة قطعًا مكافئًا.

23) اكتب: اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

مراجعة تراكمية

24) فلك: افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُذَنَّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلًّا من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثِّل المعادلة بيانيًّا. (الدرس 4-3)

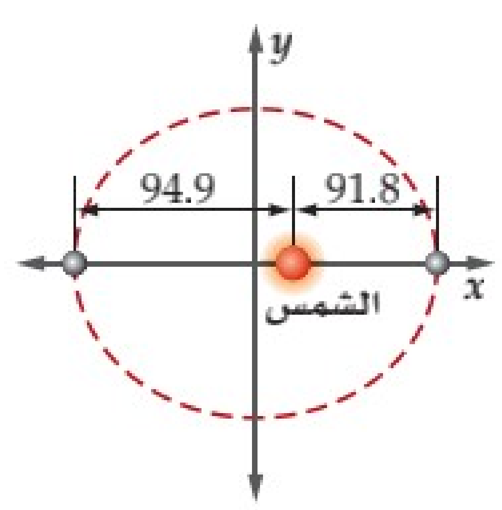
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (الدرس 4-2)

25) $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

26) $4x^2 + 8y^2 = 32$

27) $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

28) فلك: أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثِّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على المحور x. (الدرس 4-2)



تدريب على اختبار

حُلَّ كلَّ معادلة من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

29) $\log_4 8n + \log_4 (n - 1) = 2$

30) $\log_9 9p + \log_9 (p + 8) = 2$

31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدِّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثِّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

32) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثِّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$، ويمر بالنقطة $(0, 6)$؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

معمل الحاسبة البيانية:

أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

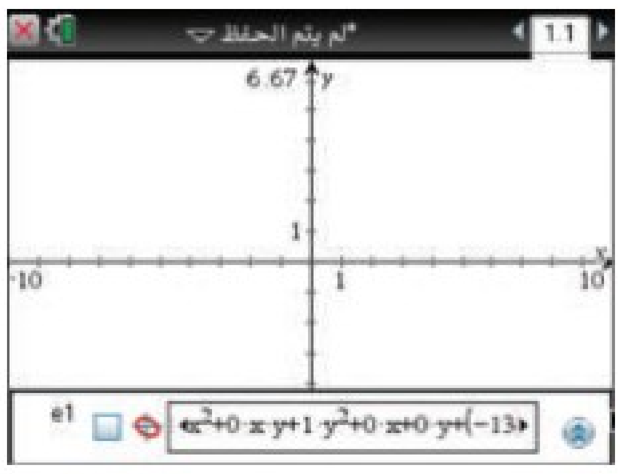
رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًا



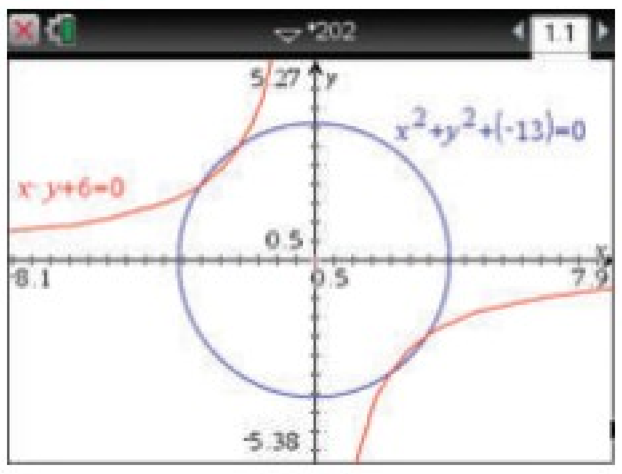
حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًا:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$xy + 6 = 0$$

لحل المعادلتين بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانيًا.



- اضغط على المفاتيح:

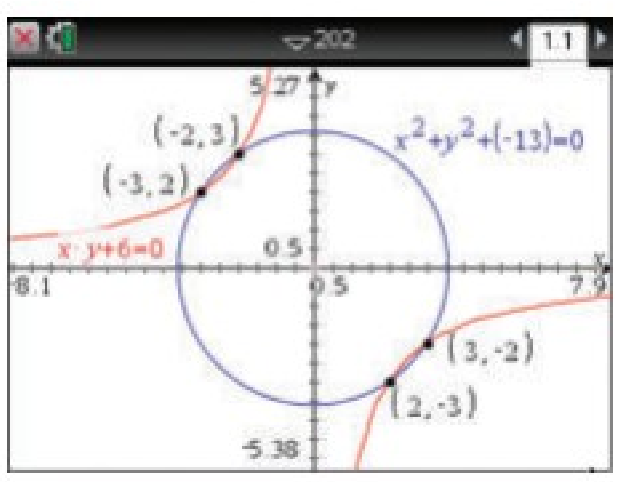
menu esc on ثم اختيار 3: إدخال / تحرير الرسم البياني

2: معادلة 6: القطوع المخروطية

1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$

- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.
- اضغط tab واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.



- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحلول بالضغط على menu ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-3, 2), (-2, 3), (2, -3), (3, -2)$

تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانيًا مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$
$x^2 - y^2 = 3$

2) $49 = y^2 + x^2$
$x = 1$

3) $x = 2 + y$
$x^2 + y^2 = 100$

4) $25 - 4x^2 = y^2$
$2x + y + 1 = 0$

5) $y^2 = 9 - 3x^2$
$x^2 = 10 - 2y^2$

6) $y = -1 - x$
$4 + x = (y - 1)^2$

7) **تحدّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.

a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًا، وقدّر طول كل غرفة.

كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابقٍ أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًّا، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y.

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

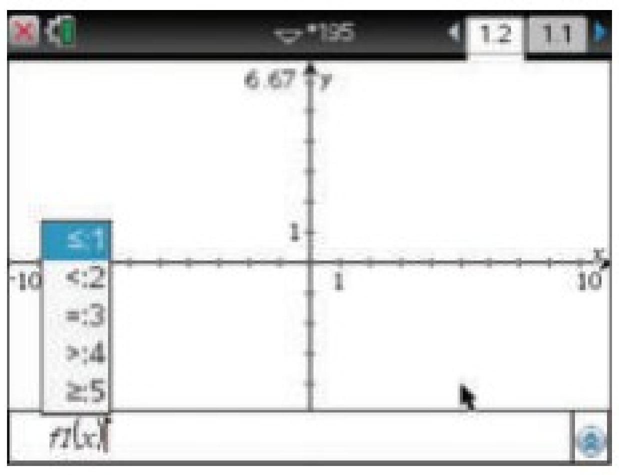
الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y .

$$y > x^2, y \le \sqrt{36 - x^2}, y \ge -\sqrt{36 - x^2}$$

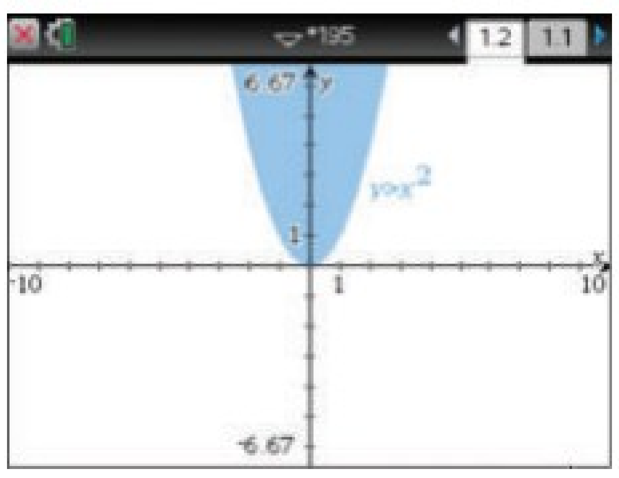
الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على on .

اختر من الشاشة الظاهرة 1 مستند جديد

ثم اختر من الشاشة الظاهرة 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية

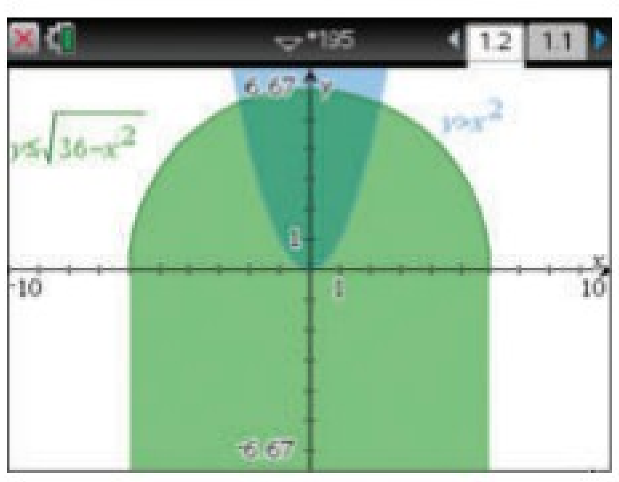


الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$ ، وذلك بالضغط على مفتاح del ، ثم اختر رمز التباين > مستعملًا الأسهم، فتظهر $y >$ ، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط enter .



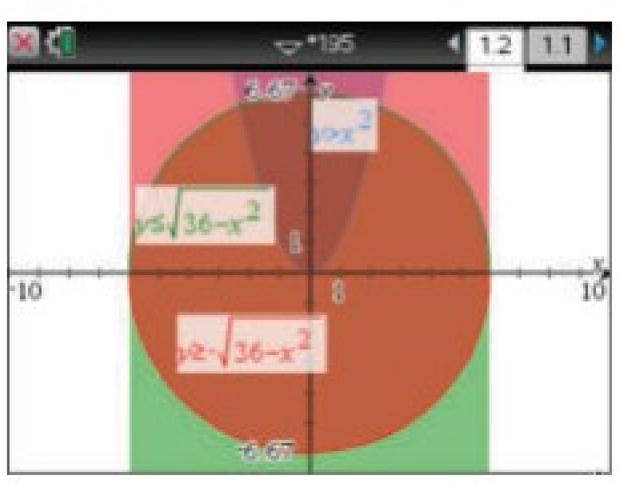
الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \le \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح tab ثم المفتاح del ، ثم اختر رمز التباين ≤ مستعملًا الأسهم، ستظهر $y \le$، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ثم اضغط على المفتاح tab وتمثيل المتباينة $y \ge -\sqrt{36 - x^2}$ ، ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

أي قم بالضغط على المفاتيح:



del > x^2 enter tab del ≤ ctrl x^2 $36 - x^2$ enter tab

del ≥ − ctrl x^2 $36 - x^2$ enter



لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$ ، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ ، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة 7 ، $f2(x) = 7$، قم بالضغط على مفتاح menu ، ومنها اختيار 4: تكبير/تصغير النافذة ثم اختيار 1: إعدادات النافذة

وليمتد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7 ، يمكن اختيار قيمة القيمة العظمى لـ Y : 10

إرشاد تقني

لون التظليل

يمكن تغيير لون التظليل الذي يمثل منطقة حل المتباينة بالضغط على ctrl menu ، ثم اختيار B: اللون ومنها 1: لون السطر أو 2: لون التعبئة أو كلاهما، وذلك حتى يكون لون منطقة الحل مميزًا عن لون تظليل كل متباينة من نظام المتباينات.

تمارين:

حُلّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا:

8) $2y^2 \le 32 - 2x^2$
$x + 4 \ge y^2$

9) $y + 5 \ge x^2$
$9y^2 \le 36 + x^2$

10) $x^2 + 4y^2 \le 32$
$4x^2 + y^2 \le 32$

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القطوع المكافئة (الدرس 1-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	أفقي	(h, k)	$(h+c, k)$
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k+c)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة .

القطوع الناقصة والدوائر (الدرس 2-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 - b^2 = c^2$.
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

القطوع الزائدة (الدرس 3-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 + b^2 = c^2$.

تحديد أنواع القطوع المخروطية (الدرس 4-4)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.

المفردات

القطع المخروطي ص 178	المركز ص 186
المحل الهندسي ص 178	المحور الأصغر ص 186
القطع المكافئ ص 178	الرأسان ص 186
البؤرة ص 178	الرأسان المرافقان ص 186
الدليل ص 178	الاختلاف المركزي ص 186
محور التماثل ص 178	القطع الزائد ص 195
الرأس ص 178	البؤرتان ص 195
الوتر البؤري ص 178	المركز ص 195
القطع الناقص ص 186	الرأسان ص 195
البؤرتان ص 186	المحور القاطع ص 195
المحور الأكبر ص 186	المحور المرافق ص 195

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ــــــــــــ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

2) الدائرة هي ــــــــــــ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة.

3) يكون ــــــــــــ القطع المكافئ عموديًّا على محور تماثله.

4) يقع الرأسان المرافقان في ــــــــــــ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر.

5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن ــــــــــــ يساوي مقدارًا ثابتًا .

6) ــــــــــــ للقطع الناقص هو نسبة تحدِّد ما إذا كان شكل منحناه متسعًا أو دائريًّا، ويمكن إيجاده باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$.

7) ــــــــــــ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعدًا ثابتًا.

8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن ــــــــــــ الشيء نفسه، لكن له خطي تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين.

مراجعة الدروس

4-1 القطوع المكافئة (الصفحات 178 - 185)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

9) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

10) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

11) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

12) $F(1, 1)$, $V(1, 5)$

13) $F(-3, 6)$, $V(7, 6)$

14) $F(-2, -3)$, $V(-2, 1)$

15) $F(3, -4)$, $V(3, -2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

16) $F(-4, -4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7, 0)$

17) $F(-1, 4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7, -2)$

18) $F(3, -6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9, 2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x، فإن المنحنى رأسي.
البؤرة هي $(h, k+p)$، لذلك فإن قيمة p هي $1 - (-3) = 4$.
وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

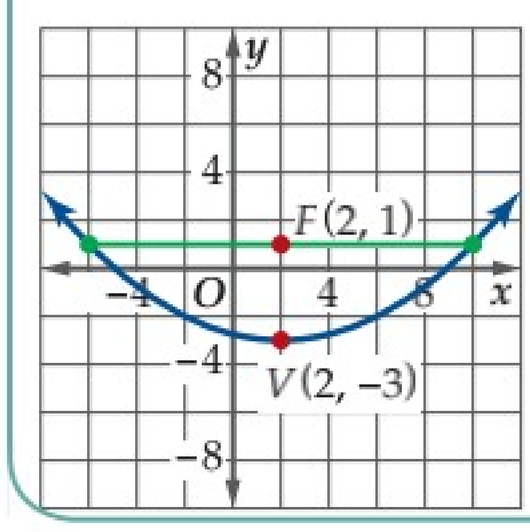
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k .

$4p(y-k) = (x-h)^2$ الصورة القياسية

$4(4)(y+3) = (x-2)^2$ $p = 4, k = 3, h = 2$

$16(y+3) = (x-2)^2$ بسِّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-2)^2 = 16(y+3)$. مثّل بيانيًّا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



4-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 186 - 193)

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

19) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

20) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

21) الرأسان $(3, -3)$, $(-7, -3)$ ، والبؤرتان $(4, -3)$, $(-6, -3)$

22) البؤرتان $(9, 2)$, $(1, 2)$ ، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.

23) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(6, 4)$, $(-4, 4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1, 7)$, $(1, 1)$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

24) المركز $(-1, 6)$، وطول نصف القطر 3 وحدات.

25) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0, 0)$, $(2, 5)$.

26) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-2, -6)$, $(4, -2)$

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11, 4)$, $(-9, 4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4)$, $(1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر: $a = \frac{11-(-9)}{2} = 10$

نصف طول المحور الأصغر: $b = \frac{12-(-4)}{2} = 8$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$= (1, 4)$ بسِّط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

الفصل 4
دليل الدراسة و المراجعة

4-3 القطوع الزائدة (الصفحات 195 - 203)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

27) $\frac{(y+3)^2}{30} - \frac{(x-6)^2}{8} = 1$

28) $\frac{(x+7)^2}{18} - \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

29) $\frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

30) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

31) الرأسان $(-7, 0)$، $(7, 0)$، طول المحور المرافق 8.

32) البؤرتان $(0, -5)$، $(0, 5)$، والرأسان $(0, -3)$، $(0, 3)$.

33) البؤرتان $(1, -5)$، $(1, 15)$، وطول المحور القاطع 16.

34) الرأسان $(-2, 0)$، $(2, 0)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ بيانيًّا.

في هذه المعادلة: $h = -1, k = -3, a = \sqrt{16} = 4,$
$b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

حدّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: راسي

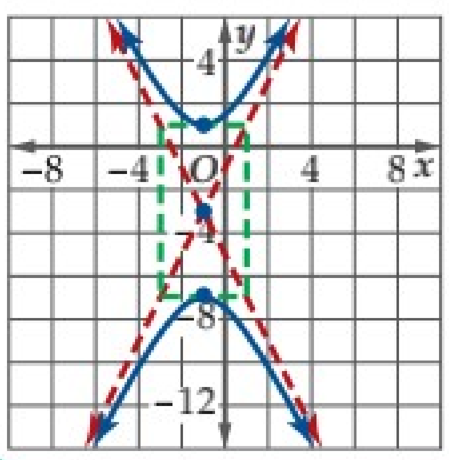
المركز: $(-1, -3)$ (h, k)

الرأسان: $(-1, 1), (-1, -7)$ $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(-1, -3+2\sqrt{5})$ $(h, k \pm c)$
$(-1, -3-2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y + 3 = 2(x+1)$ $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
وَ $y + 3 = -2(x+1)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية (الصفحات 204 - 207)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

35) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

36) $4y^2 - x - 40y + 107 = 0$

37) $9x^2 + 4y^2 + 162x + 8y + 732 = 0$

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$

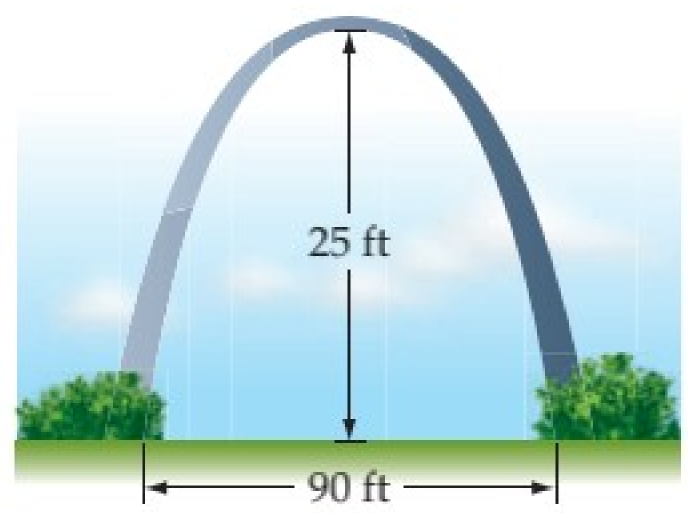
$$3(x-2)^2 + 3(y+5)^2 = 48$$

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

بما أن المعادلة على الصورة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ فإنها معادلة دائرة مركزها $(2, -5)$.

تطبيقات ومسائل

38) **أقواس:** يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافئ مقامًا عند بوابة متنزّه. (الدرس 1-4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

39) **حركة الماء:** أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 2-4)

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكّلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل.

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$.
بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

40) **طاقة:** تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. (الدرس 3-4)

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

41) **ضوء:** ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكّلًا قطعًا مخروطيًا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$.
حدّد نوع القطع. (الدرس 4-4)

اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

1) الرأسان $(-3, -4)$, $(7, -4)$ ، والبؤرتان $(-2, -4)$, $(6, -4)$.

2) البؤرتان $(-2, -9)$, $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

3) **اختيار من متعدد:** ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرةً؟

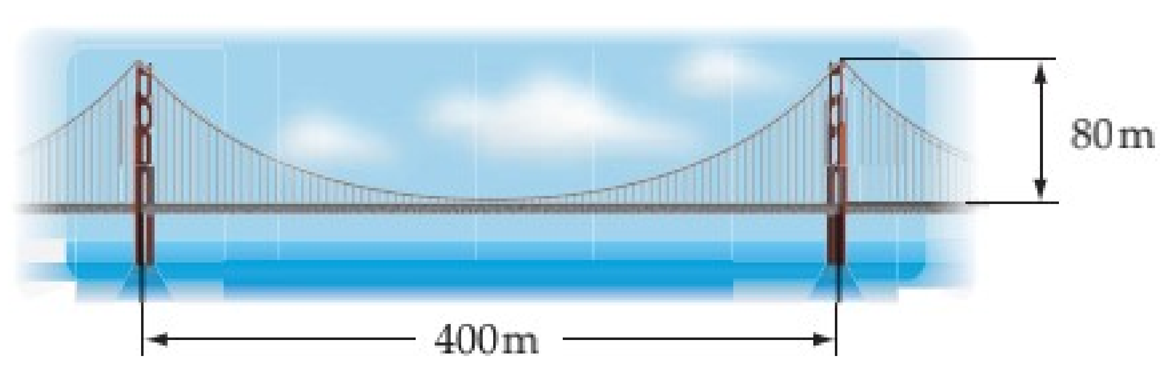
A -8

B -4

C 4

D 8

4) **جسور:** يمثِّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا ، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة .



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5 m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373 m تقريبًا . اكتب معادلة القطع المكافئ.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

5) الرأسان $(-3, 0)$, $(3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{2}{3}x$.

6) البؤرتان $(8, 8)$, $(8, 0)$ ، والرأسان $(8, 6)$, $(8, 2)$

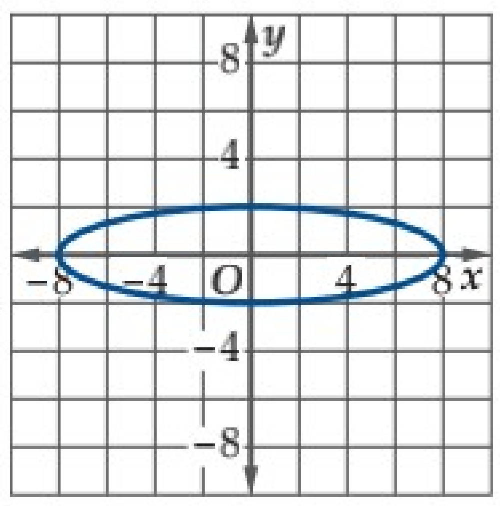
مثِّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 7 وَ 8:

7) $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

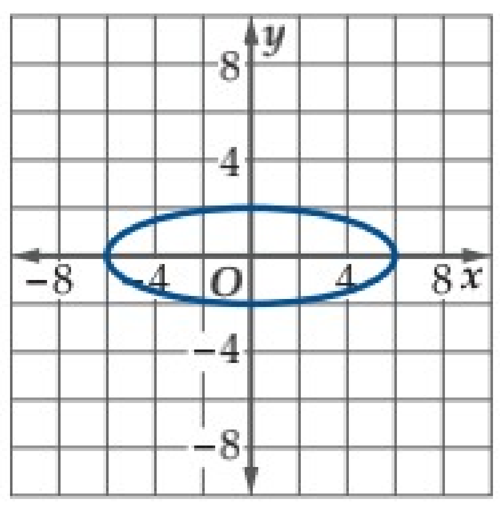
8) $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

9) **اختيار من متعدد:** أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟

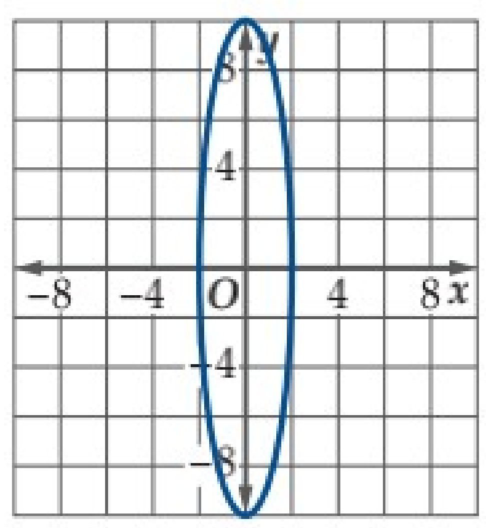
A



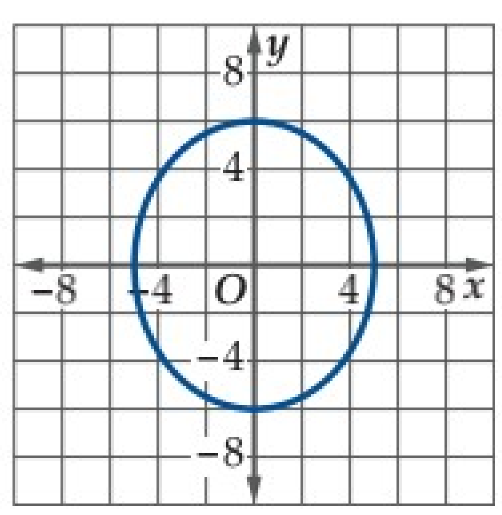
B



C



D



مستعملًا البؤرة F والرأس V، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثِّل منحنييهما بيانيًّا.

(10 $F(2, 8)\,,\ V(2, 10)$

(11 $F(2, 5)\,,\ V(-1, 5)$

مثِّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

(12 $\dfrac{(x-5)^2}{49} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$

(13 $(x+3)^2 + \dfrac{(y+6)^2}{81} = 1$

الفصل 5

المتجهات
Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات ، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهَي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين فِي الفضاء، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة : تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلًا يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها °40 مع الأفقي.

قراءة سابقة : اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلّمه في هذا الفصل .

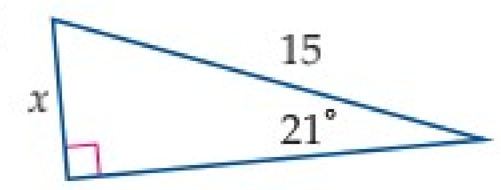
التهيئة للفصل 5

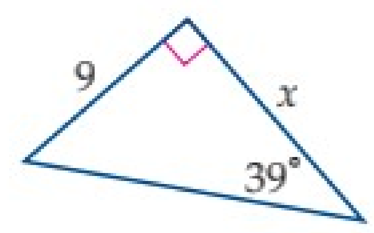
اختبار سريع

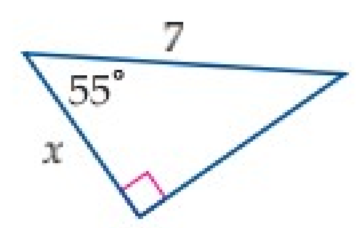
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطةِ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

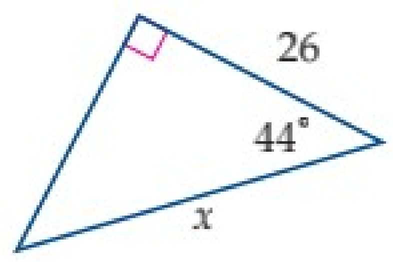
1) $(1, 4), (-2, 4)$
2) $(-5, 3), (-5, 8)$
3) $(2, -9), (-3, -7)$
4) $(-4, -1), (-6, -8)$

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

5) 

6) 

7) 

8) 

9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft ، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض 40° ، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$
11) $a = 15, b = 16, A = 127°$
12) $a = 15, b = 18, A = 52°$

مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1 , y_1)$، $B(x_2 , y_2)$ ، فإن إحداثيَّي نقطةِ منتصف $\overline{AB}$:

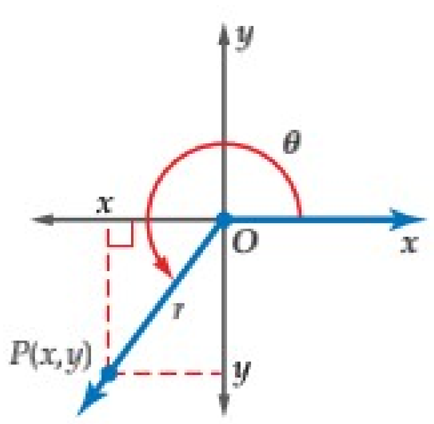
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

النسبة المثلثية (Trigonometric Ratio)

نسبة تقارن بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (Trigonometric Functions of Angels)

لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:



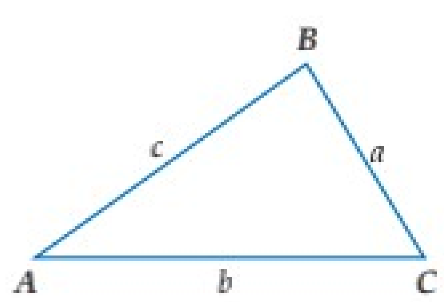
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

قانون جيوب التمام (Law of Cosines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



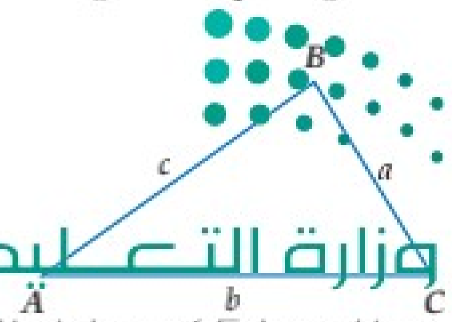
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قانون الجيوب (Law of Sines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

5-1

مقدمة في المتجهات

Introduction to Vectors

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثلها هندسيًا .
- أحلل المتجه إلى مركبتَيه المتعامدتين.
- أحلُّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية) scalar quantity
متجه vector
الكمية المتجهة vector quantity
قطعة مستقيمة متجهة directed line segment
نقطة البداية initial point
نقطة النهاية terminal point
الوضع القياسي standard position
اتجاه المتجه direction
طول المتجه (المقدار) magnitude
الاتجاه الربعي quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي true bearing
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجهات المتساوية equal vectors
المتجهان المتعاكسان opposite vectors
المحصلة resultant
قاعدة المثلث triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع parallelogram method
المتجه الصفري zero vector
المركبات components
المركبات المتعامدة rectangular components

لماذا؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كميةً متجهةً**.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min ، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km ، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.

تحقق من فهمك

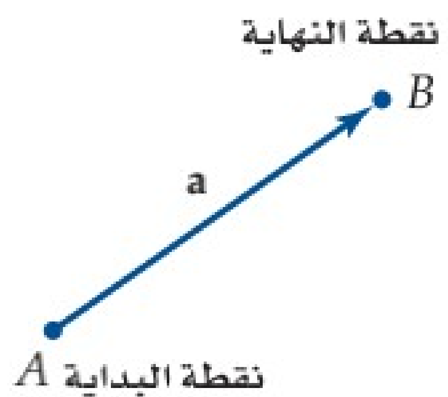
حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية °15 جهة الجنوب الشرقي.

1B) هبوط مظلّي رأسيًا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

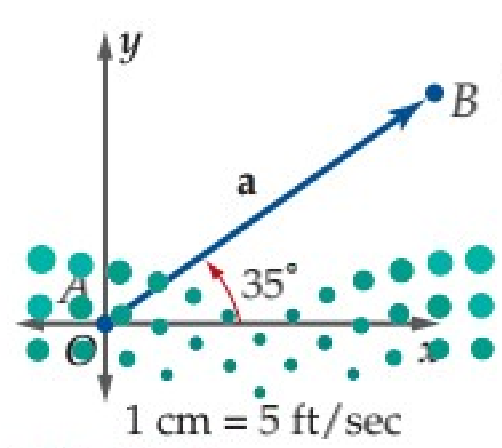
1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

المتجهات:



يمكن تمثيل المتجه هندسيًا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه **(قطعة مستقيمة متجهة)**، أو سهم يُظهر كلًا من المقدار والاتجاه. ويمثّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .

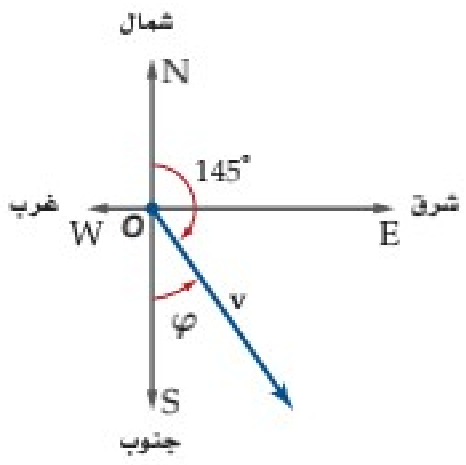
أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز |**a**| ، يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s .



يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x).
فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو °35 .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35°\ E$.



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

إرشادات للدراسة

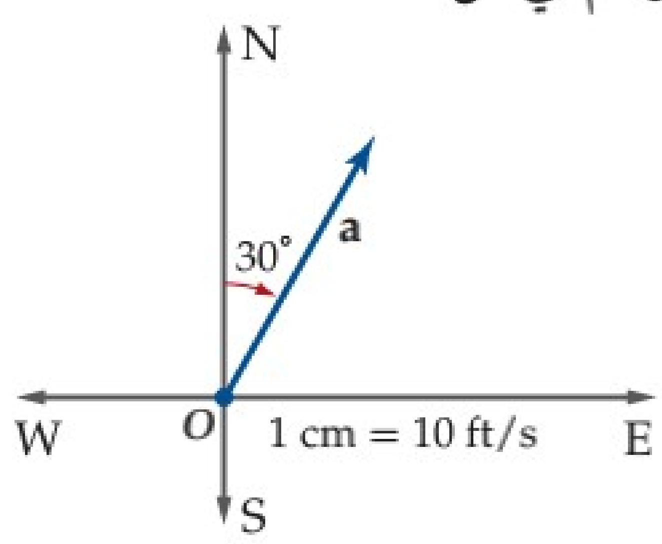
زاوية الاتجاه الحقيقي

إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $145°$.

مثال 2 تمثيل المتجه هندسيًا

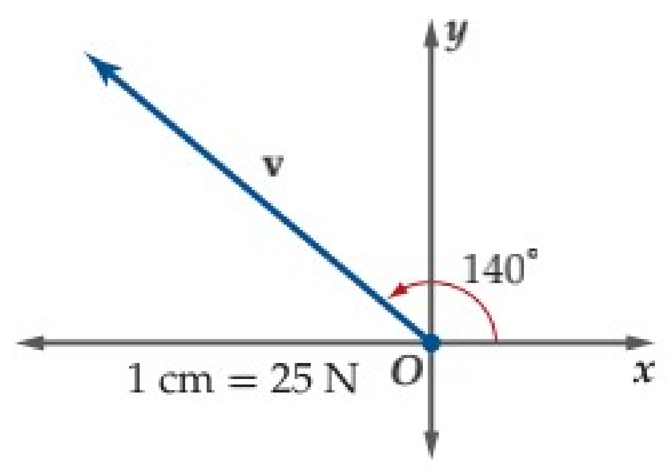
استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

a) $\mathbf{a} = 20\ ft/s$ **باتجاه** $030°$.



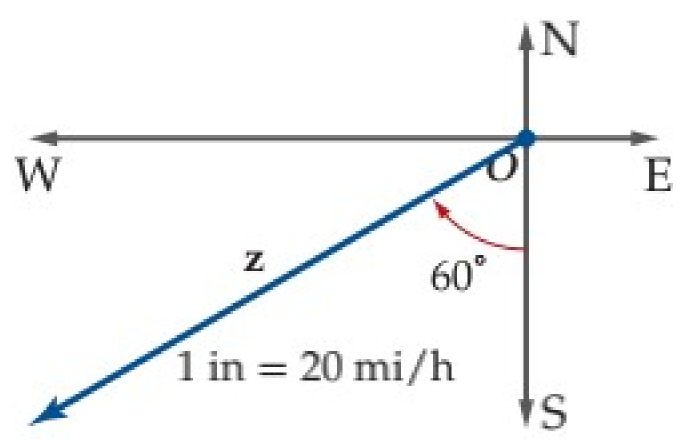
استعمل مقياس الرسم $1\,cm = 10\ ft/s$ ، وارسم سهمًا طوله $20 \div 10$ ، أو $2\,cm$ بزاوية قياسها $30°$ من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.

b) $\mathbf{v} = 75\,N$ **، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.**



استعمل مقياس الرسم $1\ cm = 25\ N$ ، وارسم سهمًا طوله $75 \div 25$ ، أو $3\,cm$ في الوضع القياسي، وبزاويةٍ قياسها $140°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x .

c) $\mathbf{z} = 30\ mi/h$ **، باتجاه** $S\ 60°\ W$.



استعمل مقياس الرسم $1\ in = 20\ mi\ /\ h$ ، وارسم سهمًا طوله $30 \div 20 = 1.5\,in$ ، بزاوية قياسها $60°$ في اتجاه جنوب غرب .

تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20\ ft/s$ ، باتجاه $065°$.

2B) $\mathbf{u} = 15\ mi/h$ ، باتجاه $S\ 25°\ E$.

2C) $\mathbf{m} = 60\,N$ ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.

إرشادات للدراسة

النيوتن

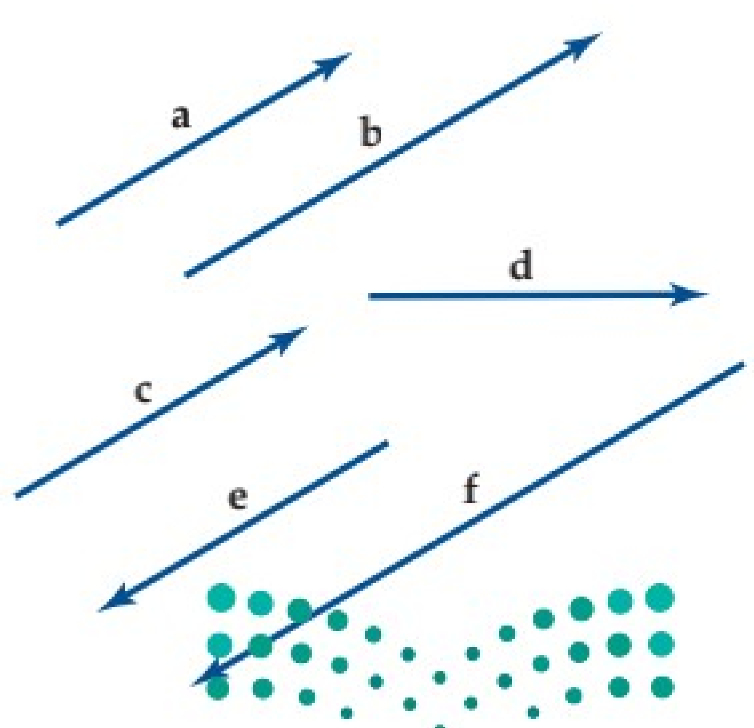
وحدةٌ لقياس القوّة، ويرمز له بالحرف **N**، وهو عبارة عن القوّة التي تؤثر في جسم كتلته **1 kg**؛ لتكسبه تسارعًا مقداره **1 m/s2** .

تنبيه!

الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة .

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور **a, c** ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ، $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه **a** على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا،و يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

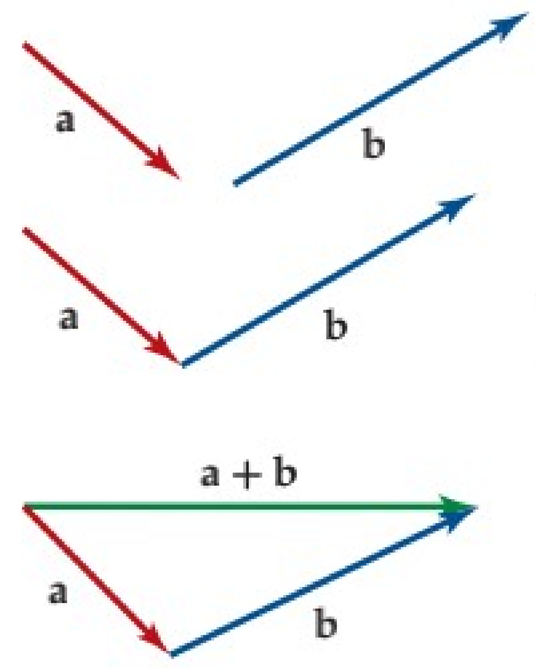
مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b**، اتّبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.

الخطوة 2 محصلة المتجهين **a , b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b**.



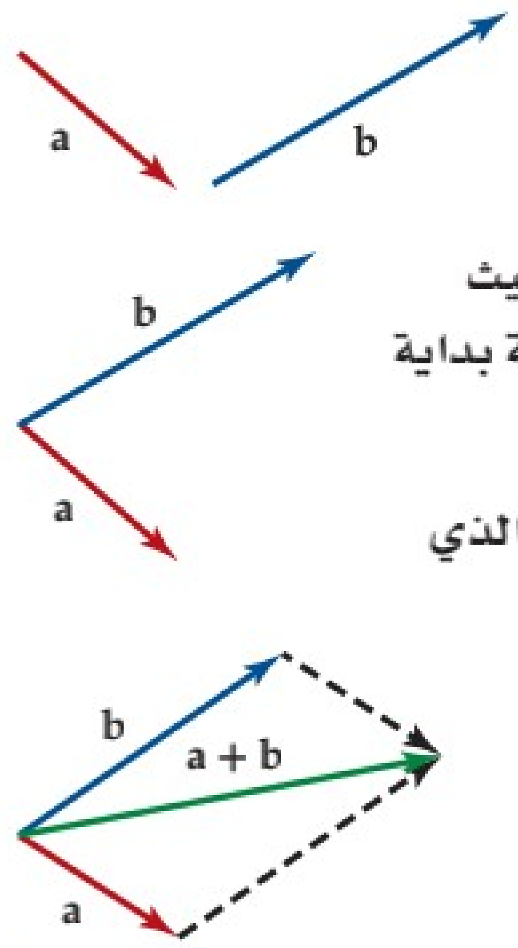
قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b**، اتّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a**.

الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a , b**.

الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع.

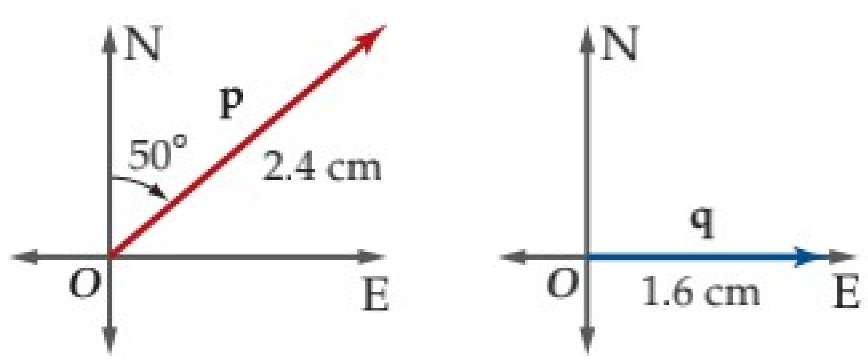


مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد محصلة متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

افترض أن المتجه **p** يمثّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E، وأن المتجه **q** يمثّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثّل **p , q** باستعمال مقياس الرسم 1cm = 50 m.

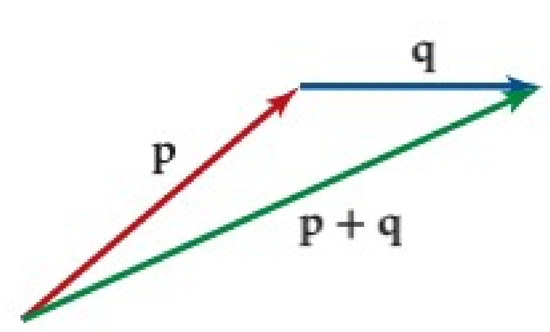
استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله $120 \div 50 = 2.4$ cm؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شمال شرق؛ ليُمثّل المتجه **p**، وارسم سهمًا آخر طوله $80 \div 50 = 1.6$ cm في اتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه **q**.



1 cm = 50 m

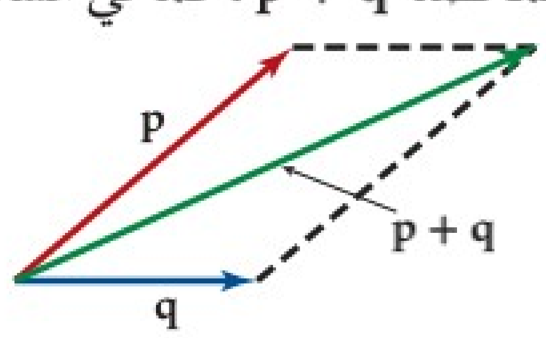
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p**، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.

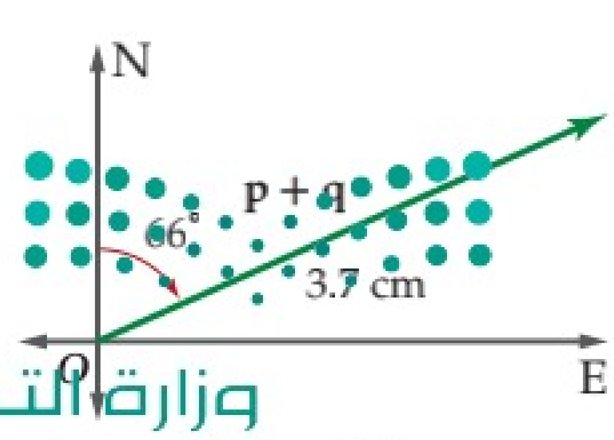


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثّل المحصلة **p + q**، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.



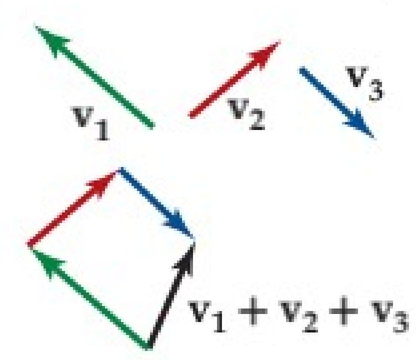
1 cm = 50 ft

تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثّل $3.7 \times 50 = 185$ m.
وعليه يكون عبد الله على بعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E.

إرشادات للدراسة

المحصلة

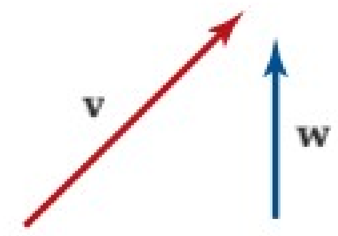
لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.



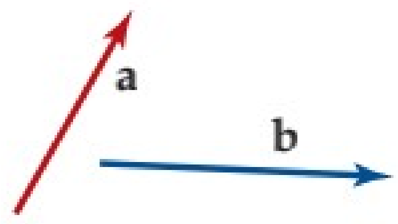
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A

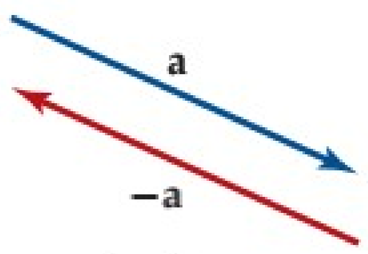


(3B



(3C **لعبة أطفال:** رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\,in/s$ ، باتجاه $310°$ ، فارتدت باتجاه $055°$ ، وبسرعة $4\,in/s$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن: $\mathbf{p}-\mathbf{q}=\mathbf{p}+(-\mathbf{q})$.



$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0$

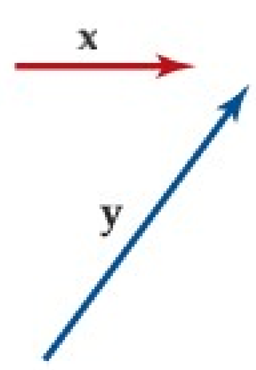
و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.

مفهوم أساسي ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- **إذا كانت $k>0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.**
- **إذا كانت $k<0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.**

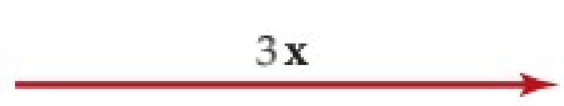
مثال 4 العمليات على المتجهات



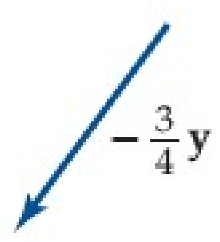
ارسم المتجه $3\mathbf{x}-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x}-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x}+\left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$ ، ثم مثِّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$ ، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل 5.1.1 .

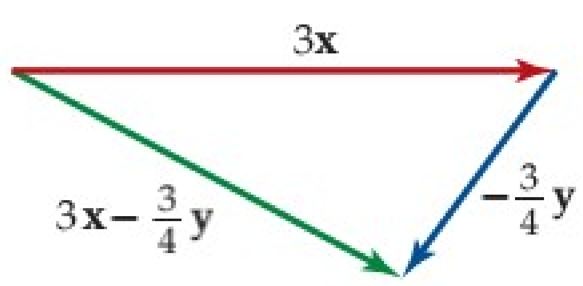
ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ ، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل 5.1.2 ، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل 5.1.3 .



الشكل 5.1.1



الشكل 5.1.2

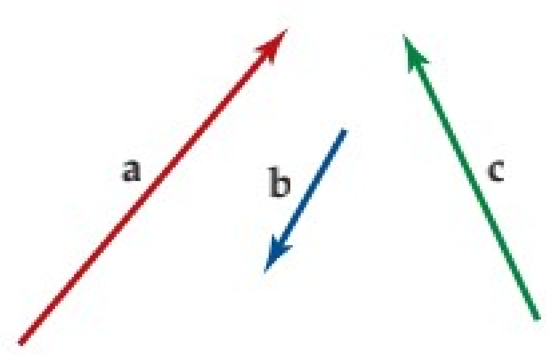


الشكل 5.1.3

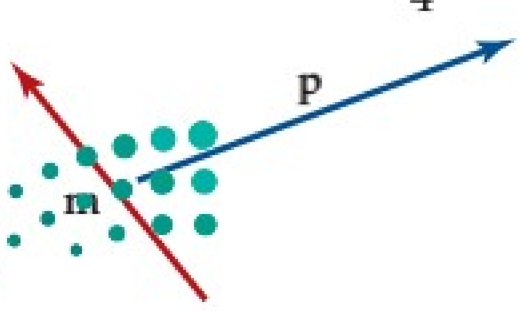
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

(4A $\mathbf{a}-\mathbf{c}+2\mathbf{b}$

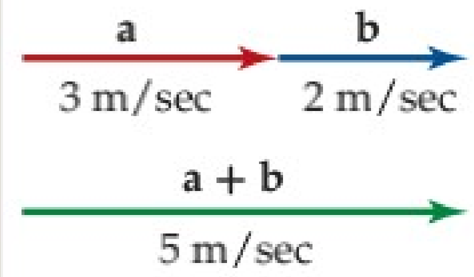


(4B $\mathbf{m}-\frac{1}{4}\mathbf{p}$



إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه
محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



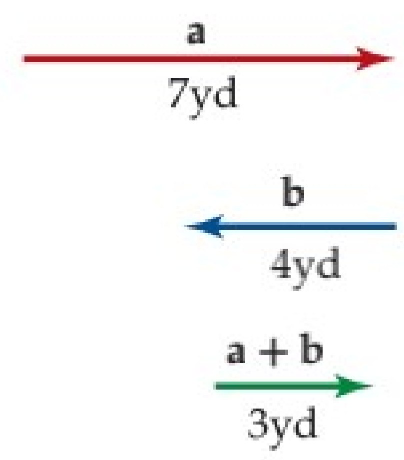
قراءة الرياضيات

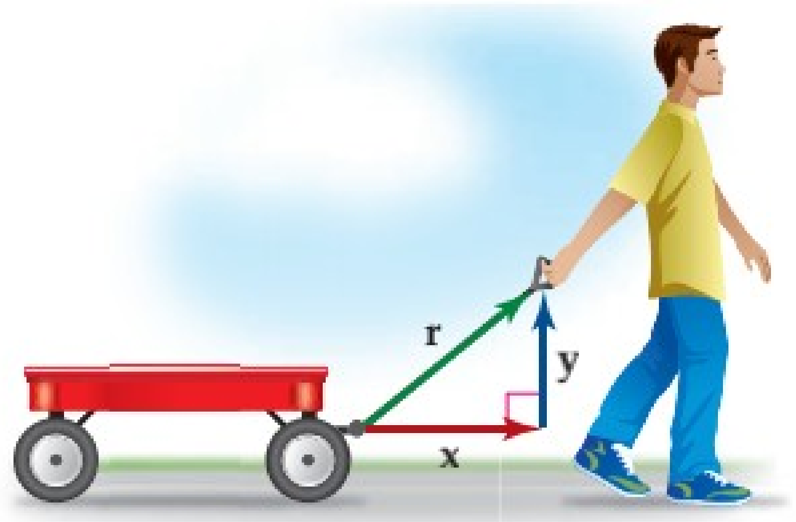
$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

$|\mathbf{v}|$ تمثل طول المتجه v.

إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.





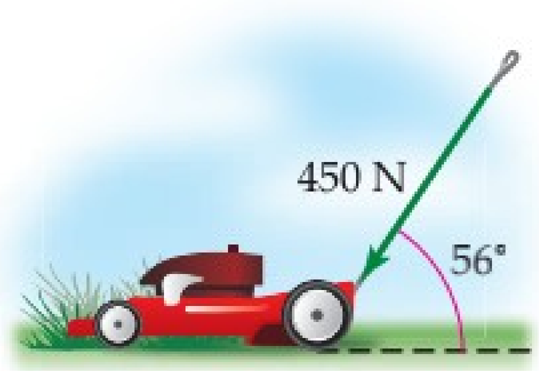
تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه **r** ، **مركبتي r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين،** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تسحب العربة إلى أعلى.

الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

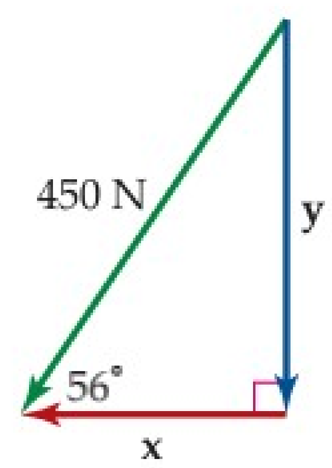
مثال 5 من واقع الحياة — تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها °56 مع سطح الأرض.



a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين؛ أفقية **x** إلى الأمام ورأسية **y** إلى أسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

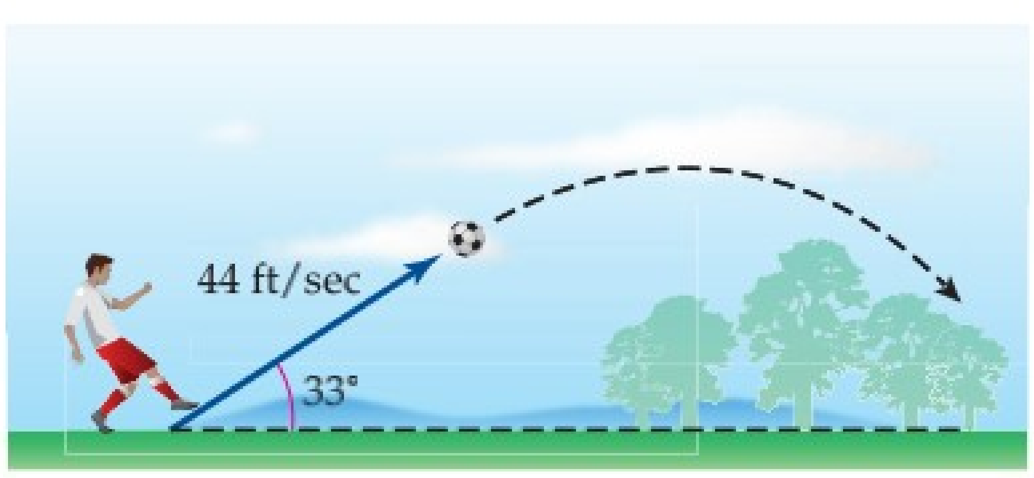
تكوّن كلٌّ من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{\lvert\mathbf{x}\rvert}{450}$	تعريف الجيب، وجيب التمام	$\sin 56° = \frac{\lvert\mathbf{y}\rvert}{450}$
$\lvert\mathbf{x}\rvert = 450 \cos 56°$	حُل بالنسبة إلى x ، y	$\lvert\mathbf{y}\rvert = 450 \sin 56°$
$\lvert\mathbf{x}\rvert \approx 252$	استعمل الآلة الحاسبة	$\lvert\mathbf{y}\rvert \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °33 مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 1)**

1) طول محمد $125\,cm$.

2) مساحة مربع $20\ m^2$.

3) يركض غزال بسرعة $15\ m/s$ باتجاه الغرب.

4) المسافة التي قطعتها كرة قدم $5\ m$.

5) إطار سيارة وزنه $7\,kg$ معلق بحبل.

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة $50\ ft/s$.

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. **(مثال 2)**

7) $\mathbf{h} = 13\ in/s$ ، باتجاه $205°$

8) $\mathbf{g} = 6\ km/h$ ، باتجاه $N\ 70°\ W$

9) $\mathbf{j} = 5\ ft/s$ ، وبزاويةٍ قياسها $300°$ مع الأفقي.

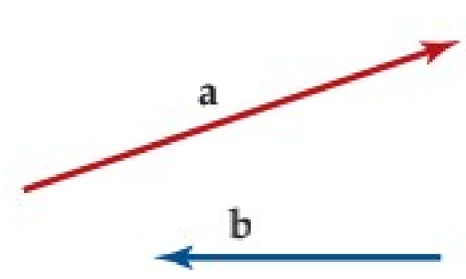
10) $\mathbf{d} = 28\ km$ ، وبزاويةٍ قياسها $35°$ مع الأفقي.

11) $\mathbf{R} = 40\ m$ ، باتجاه $S\ 55°\ E$

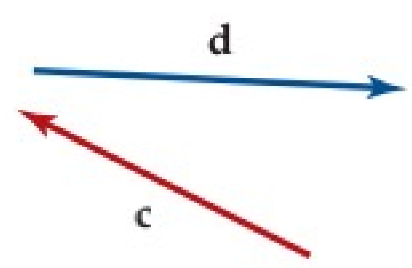
12) $\mathbf{n} = 32\ m/s$ ، باتجاه $030°$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة: **(مثال 3)**

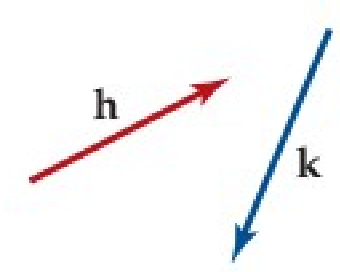
13)



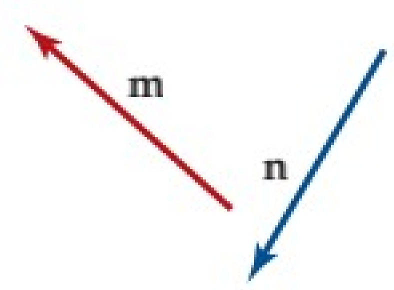
14)



15)



16)



17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانى باتجاه $N\,60°\,W$ ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًّا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى $N\,25°\,E$ ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًّا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. **(مثال 3)**

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 3)**

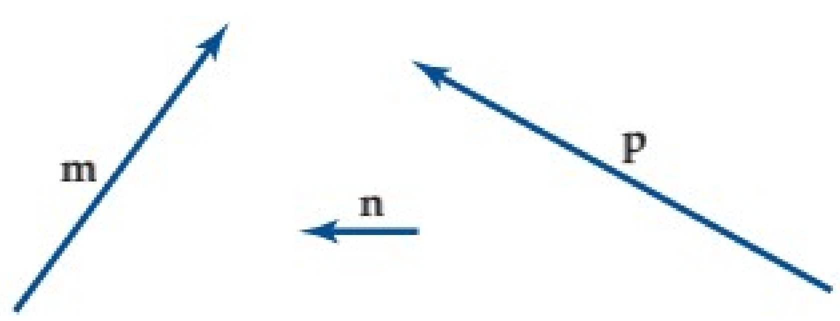
18) $18\,N$ للأمام، ثم $20\,N$ للخلف.

19) $100\,m$ للشمال، ثم $350\,m$ للجنوب .

20) $17\,mi$ شرقًا، ثم $16\,mi$ جنوبًا.

21) $15\,m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها $60°$ مع الأفقي، ثم $9.8\ m/s^2$ إلى الأسفل.

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي: **(مثال 4)**



22) $m - 2n$

23) $4n + \frac{4}{5}p$

24) $p + 2n - 2m$

25) $m - 3n + \frac{1}{4}p$

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. **(مثال 5)**

26) $2\frac{1}{8}\ in/s$ ، باتجاه $310°$ مع الأفقي.

27) $1.5\,cm$ ، باتجاه $N\,49°\,E$.

28) $\frac{3}{4}\ in/min$ ، باتجاه $255°$.

29) تنظيف: يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 5)**

a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

30) لعب أطفال: يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه 31° مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح.

31) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

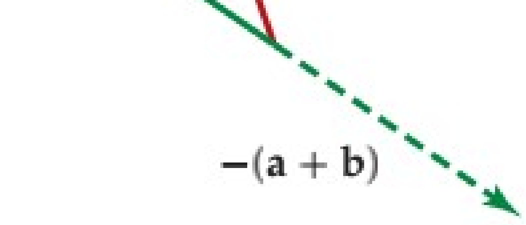
a) بيانيًا: ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لـ k ، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e** ، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة.

b) جدوليًا: انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a		
b		
c		
d		
e		

c) تحليليًا: إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه k**a** ؟

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه **a + b** هو **−(a + b)**

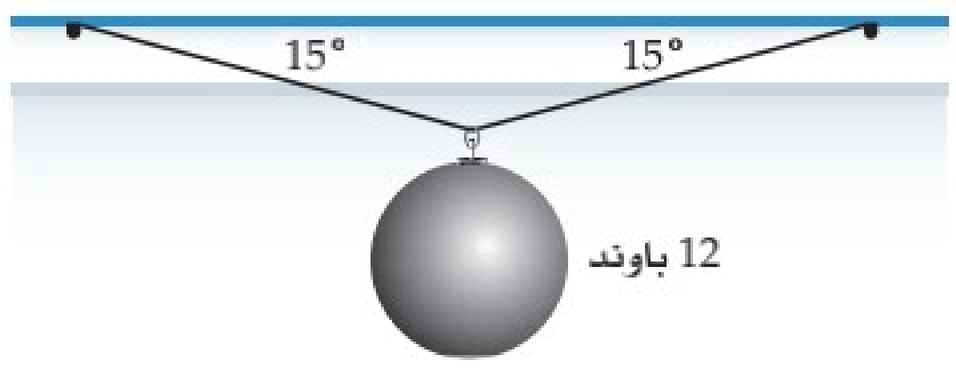


32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

a = 15 mi/h ، باتجاه 125°

b = 12 mi/h ، باتجاه 045°

33) كرة حديدية: عُلِّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه.



a) إذا كانت $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$ تُمثّلان قوتَي الشدِّ في الحبلين، وكانت $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}$ ، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.

b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$

c) استعمل الشكل في الفقرة **b** وحقيقة أن محصلة $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}$

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتَيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

34) الأفقية 0.32 in ، الرأسية 2.28 in ، $90° < \theta < 180°$.

35) الأفقية 3.1 ft ، الرأسية 4.2 ft ، $0° < \theta < 90°$.

36) الأفقية 2.6 cm ، الرأسية 9.7 cm ، $270° < \theta < 360°$.

ارسم ثلاثة متجهات a, b, c ؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا:

37) الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

38) الخاصية التجميعية $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

39) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **مسألة مفتوحة:** لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x، حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية.

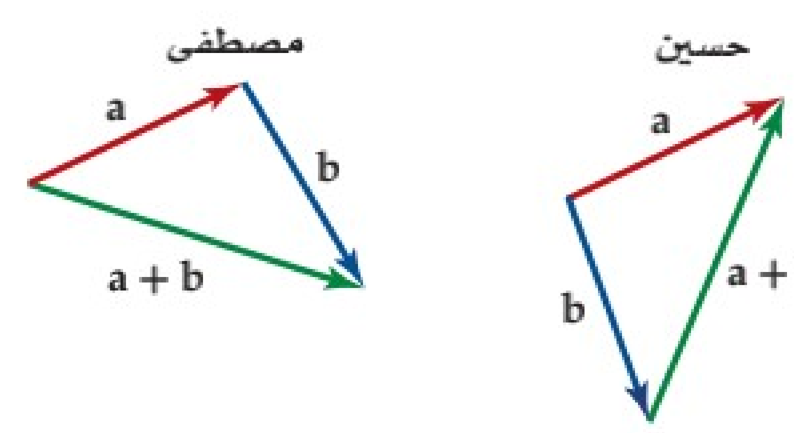
41) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرِّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع".

42) **تبرير:** بفرض أن: $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات.

b) هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ برِّر إجابتك.

43) **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين **a , b** . أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



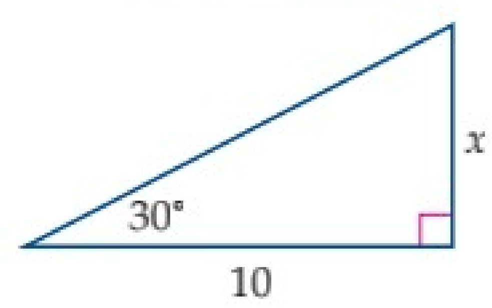
44) **تبرير:** هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برِّر إجابتك.

45) **اكتب:** قارن بين قاعدتَي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين.

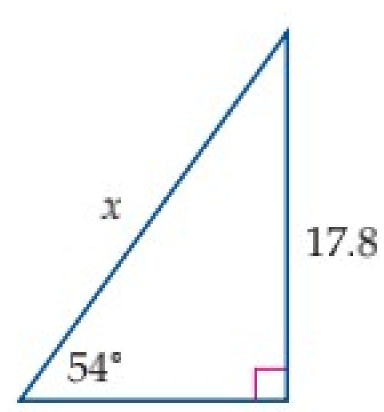
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. **(مهارة سابقة)**

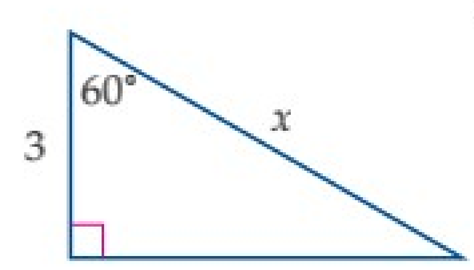
46)



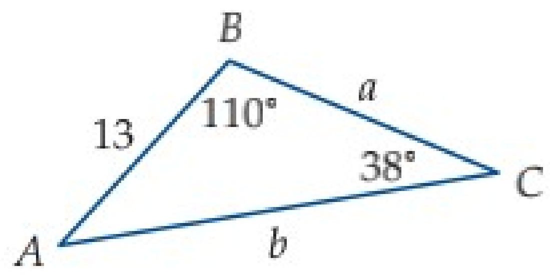
47)



48)



49) حُلّ المثلث الآتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.
(مهارة سابقة)

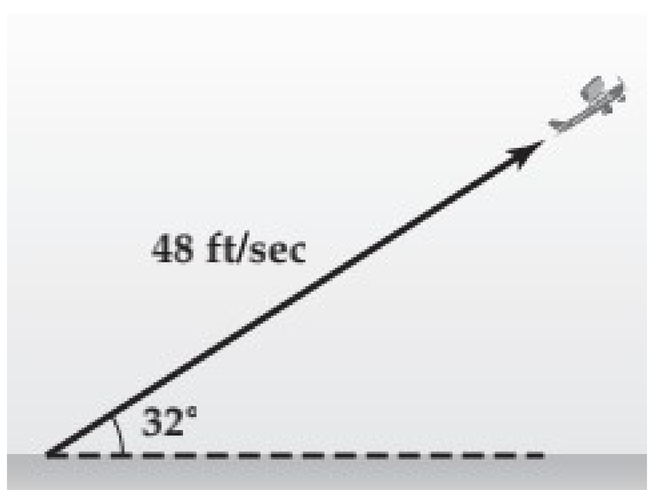


50) حُلّ المعادلة: $\sin 2x - \cos x = 0$ لجميع قيم x.
(مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

51) **نزهة:** قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km في اتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالًا قاصدًا حديقةً عامةً، فقطع مسافة 5.6 km، حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟

52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



A 25.4 ft/s , 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s , 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s , 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s , 56.6 ft/s

5-2

المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

فيما سبق:

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم. (الدرس 1-5)

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات:

الصورة الإحداثية
component form

متجه الوحدة
unit vector

متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors

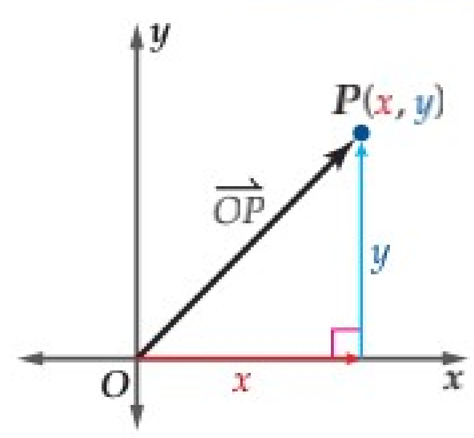
توافق خطي
linear combination

لماذا؟

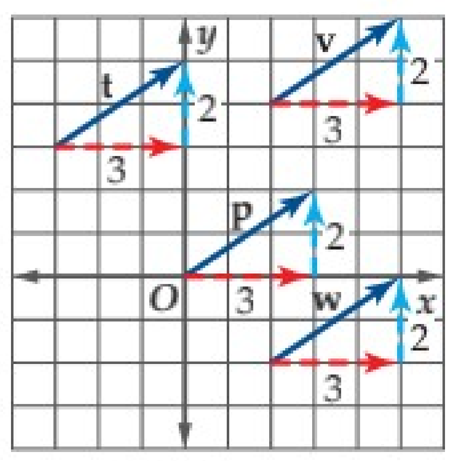
تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-5 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 5.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـِ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 5.2.1



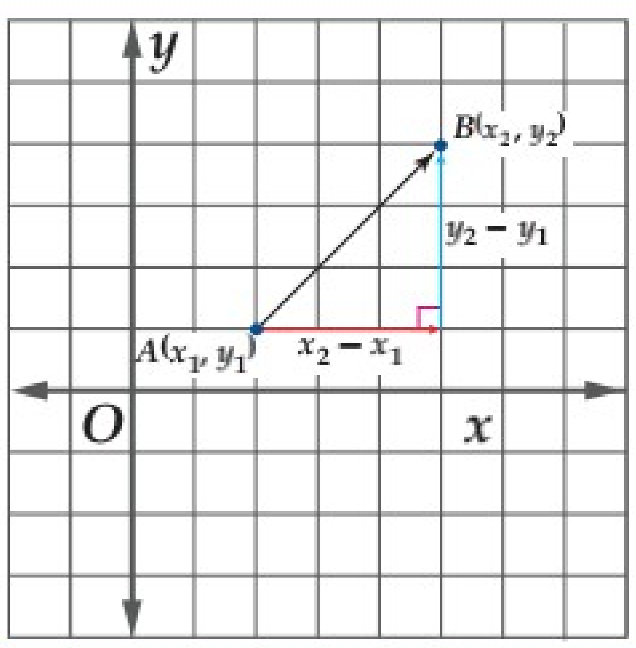
الشكل 5.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 5.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسومٍ في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي — الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$



مثال 1 — التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ — $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ — بسِّط

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

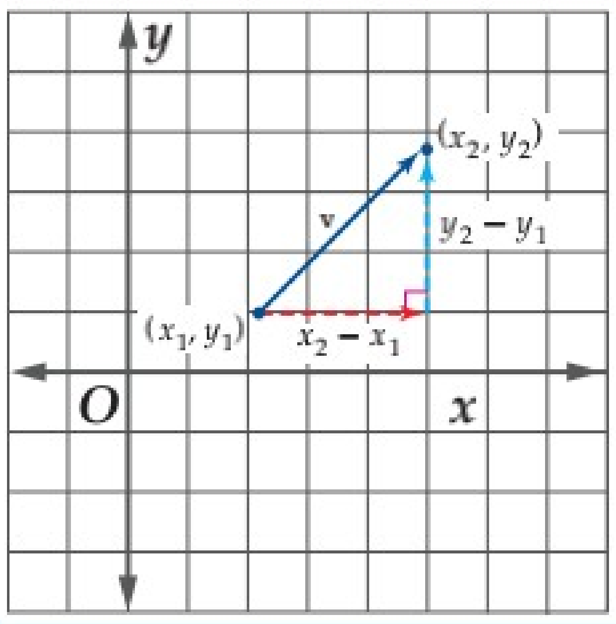
مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



قراءة الرياضيات

المعيار

يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

مثال 2 — إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ — $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98} \approx 9.9$ — بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$ ؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

✅ تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

2B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$

ضرب متجه في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

مثال 3 — العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$ — عوّض

$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$ — اجمع المتجهين

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$ — أعد كتابة الطرح كعملية جمع

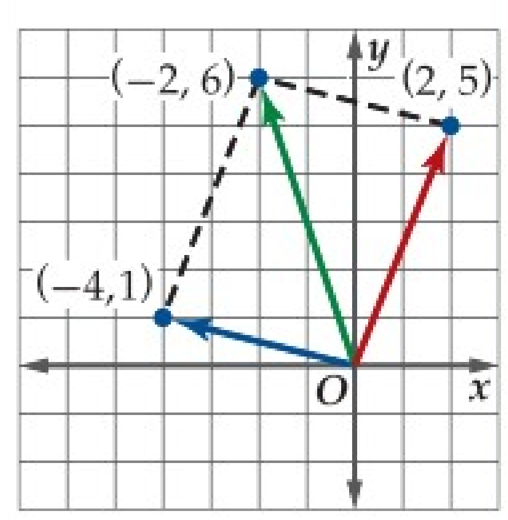
$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$ — عوّض

$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$ — اضرب متجهًا في عددٍ حقيقي، واجمع متجهين

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًا

يمكن التحقق بيانيًا من إجابة مثال 3 الفرع a ، استعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع .كما في الشكل أدناه.



✅ تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$

3B) $-3\mathbf{c}$

3C) $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{v}$

$$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$$ عوِّض

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$$ $|\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$$ بسِّط

$$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$ اضرب متجه في عدد حقيقي

$$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$ أنطق المقام

التحقق بما أن $\mathbf{u}$ تمثل حاصل ضرب $\mathbf{v}$ في عدد موجب فإن له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه. تحقَّق من أن طول $\mathbf{u}$ هو 1 .

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$$ بسِّط

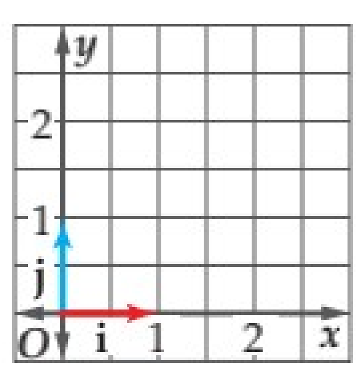
$$= \sqrt{1} = 1 \checkmark$$ بسِّط

تحقق من فهمك

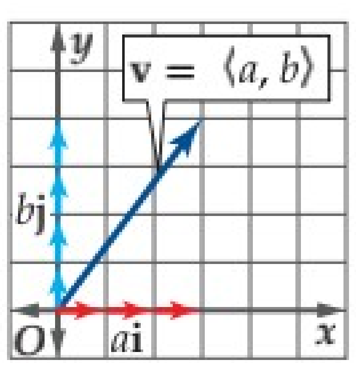
أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$ **(4B** $\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ على الترتيب كما في الشكل 5.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 5.2.3



الشكل 5.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 5.2.4 ؛ وذلك لأن:

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$ الصورة الإحداثية

$$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$$ أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين

$$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$$ اضرب متجه في عدد حقيقي

$$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$ $\langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}$ ، $\langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$

تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون
(1805–1865)
طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظريةً في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

تنبيه!

متجه الوحدة i
لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$، والعدد التخيلي i، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍّ داكن غير مائل $\mathbf{i}$، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍّ غير داكن مائل i .

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مثال 5 كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2 \rangle$ بسّط

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

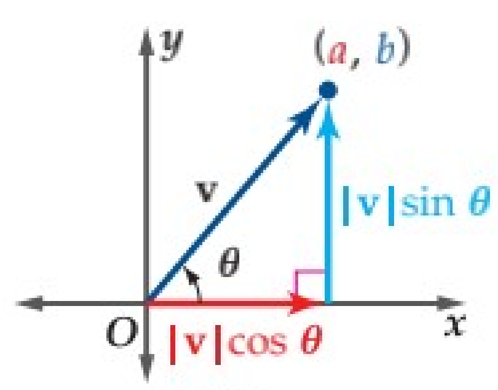
تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$

5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 5.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل 5.2.5

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ عوّض

$= |\mathbf{v}| (\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta)\mathbf{j}$ توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة $\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة

$\mathbf{u} = \langle 1 \cos \theta, 1 \sin \theta \rangle$

$= \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $|\mathbf{v}|, \theta$

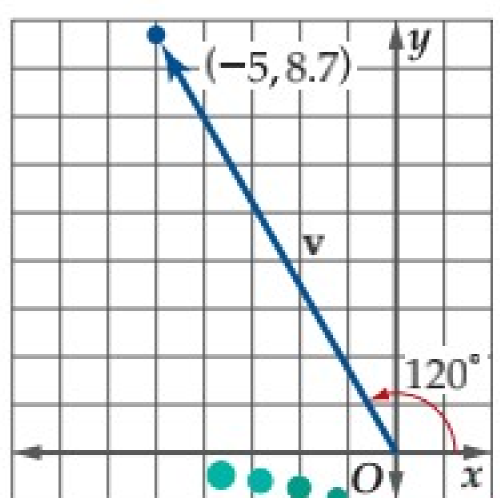
$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$ $|\mathbf{v}| = 10, \theta = 120°$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ بسّط

التحقق مثِّل بيانيًّا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$ ✔



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

6B) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

من الشكل (5.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

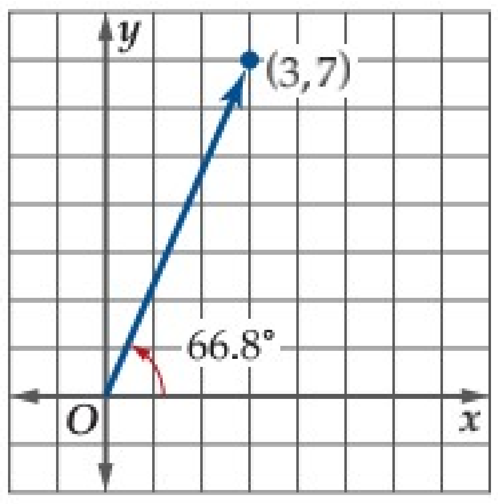
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3 , b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$ ، فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$\theta \approx 66.8°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 5.2.6

أي أن زاوية اتجاه المتجه **p** هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل **5.2.6** .

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

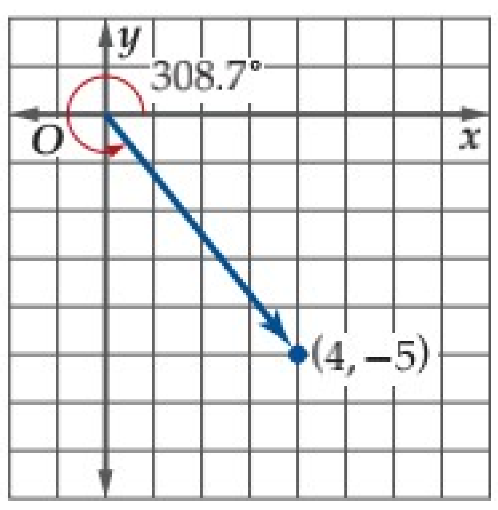
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4 , b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $y = -5 < 0$ ، $x = 4 > 0$ ، فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$\theta \approx -51.3°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 5.2.7

بما أن **r** يقع في الربع الرابع، كما في الشكل **5.2.7** ، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

تحقق من فهمك

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

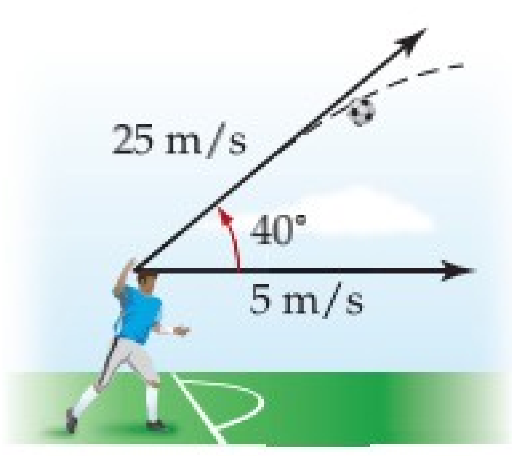
7B) $\langle -3, -8\rangle$

تنبيه!

لكل قيمة لِـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:
$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$
فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبة فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبة، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة $5\ m/s$ ، ليرمي الكرة بسرعة $25\ m/s$ ، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



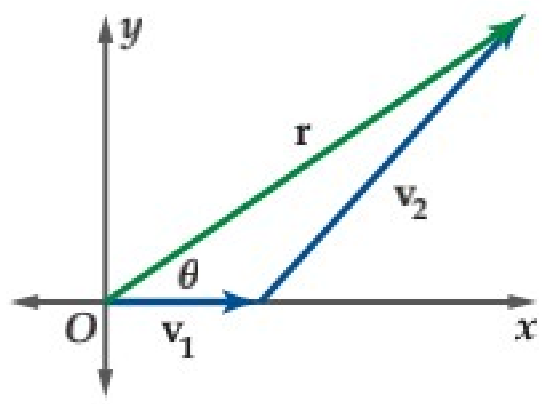
بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v_1}$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v_2}$ هي:

$\mathbf{v_2} = \langle |\mathbf{v_2}|\cos\theta, |\mathbf{v_2}|\sin\theta\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v_2}$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$ $|\mathbf{v_2}| = 25 , \theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$ بسِّط

اجمع المتجهين $\mathbf{v_1}$ ، $\mathbf{v_2}$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.



$\mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ متجه المحصلة

$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$ عوّض

$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$ اجمع

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$\tan \theta = \dfrac{16.1}{24.2}$ ، $\tan \theta = \frac{b}{a}$ حيث $\langle a, b \rangle = \langle 24.2, 16.1 \rangle$

$\theta = \tan^{-1} \dfrac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$ حُل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي 29.1 m/s تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها °33.6 مع الأفقي تقريبًا.

تحقق من فهمك

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7m/s

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$

4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$

6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان: $\mathbf{f} = \langle 8,0 \rangle, \mathbf{g} = \langle -3, -5 \rangle, \mathbf{h} = \langle -6,2 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$

8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$

9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$

10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$

11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$

12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 4)

13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$

14) $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$

15) $\mathbf{v} = \langle -8, -5 \rangle$

16) $\mathbf{v} = \langle 6, 3 \rangle$

17) $\mathbf{v} = \langle -1, -5 \rangle$

18) $\mathbf{v} = \langle 1, 7 \rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

19) $D(4, -1), E(5, -7)$

20) $D(9, -6), E(-7, 2)$

21) $D(3, 11), E(-2, -8)$

22) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

23) $D(-4, -6), E(9, 5)$

24) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 6)

25) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

26) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$

27) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$

28) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x : (مثال 7)

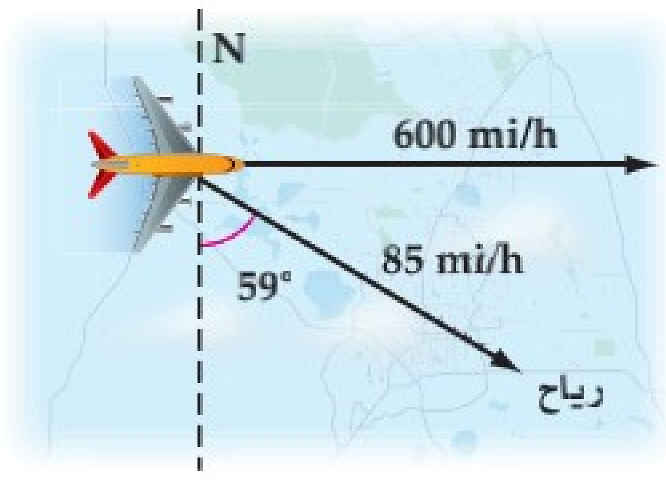
29) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

30) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

31) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

32) $\langle -5, 9 \rangle$

33) **ملاحة جوية:** تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها 600 mi/h ، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها 85 mi/h باتجاه S59°E . (مثال 8)



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة.

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة.

34) **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h ، ويؤثّر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h .

a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة.

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة.

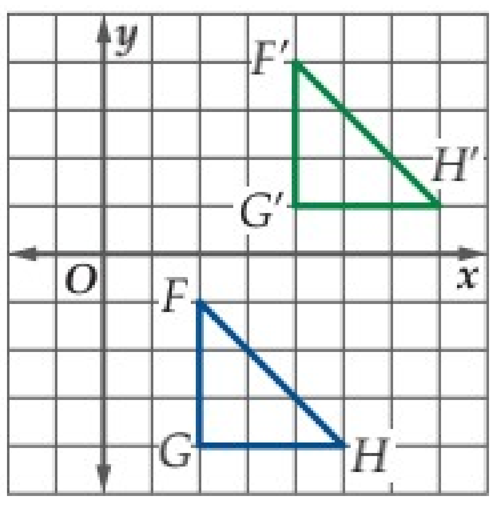
35) **ملاحة جوية:** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N82°E ، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N79°E .
ارسم شكلًا يُمثّل هذا الموقف.

بيّن ما إذا كان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب.

36) $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

37) $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

38) **انسحاب:** يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b\rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x ، وإضافة b إلى الإحداثي y .



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور.

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6\rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$ ، فمثّل بيانيًّا كلًّا من $\triangle F'G'H'$ ، وصورته $\triangle F''G''H''$.

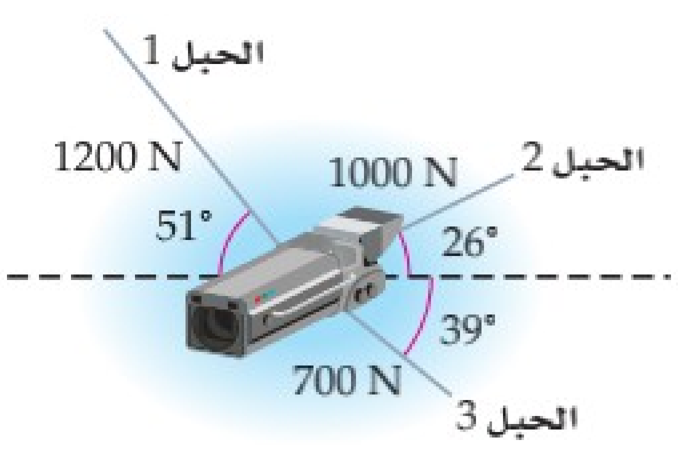
c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$.

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علِمتَ طوله ونقطة بدايته:

39) $\sqrt{37}, (-1, 4)$

40) $10, (-3, -7)$

41) **آلة تصوير:** عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثِّل متجهًا، فأجب عما يأتي:

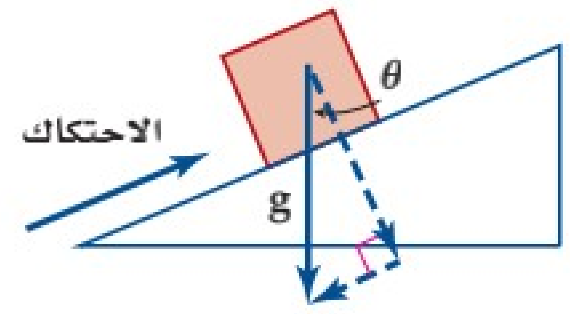


a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح.

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير.

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى.

42) **قوة:** تؤثّر قوة الجاذبية g وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟



مسائل مهارات التفكير العليا

43) **تبرير:** إذا كان a , b متجهين متوازيين، فعبِّر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيِّنًا العلاقة بين a , b.

44) **تبرير:** إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثِّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيَّنًا).

45) **تحدٍّ:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)°$، فأوجد قيمة x بدلالة y.

برهان: إذا كان: $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1\rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2\rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3\rangle$، فأثبت الخصائص الآتية:

46) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

47) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

48) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k عدد حقيقي.

49) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k عدد حقيقي.

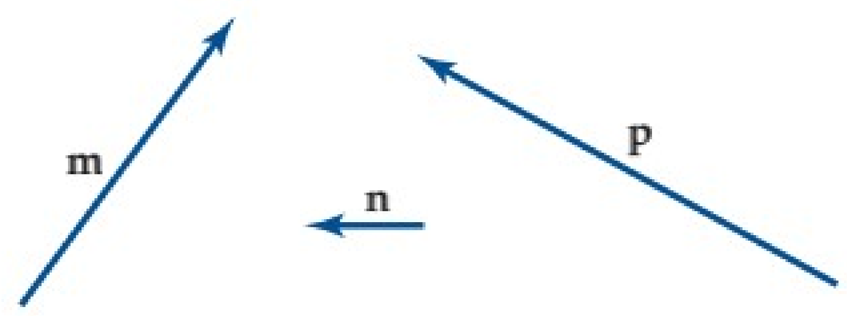
مراجعة تراكمية

50) **دُمى أطفال:** يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها 1.5N بواسطة نابض مثبَّت بها. (الدرس 1-5)

a) إذا كان النابض يصنع زاوية °52 مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الرأسية والأفقية للقوة.

b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها °78 مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثّل كلًّا مما يأتي:
(الدرس 1-5)



51) $\mathbf{n} - \frac{3}{4}\mathbf{m}$

52) $\frac{1}{2}\mathbf{p} + 3\mathbf{n}$

53) $\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$

54) $\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$

تدريب على اختبار

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$؟

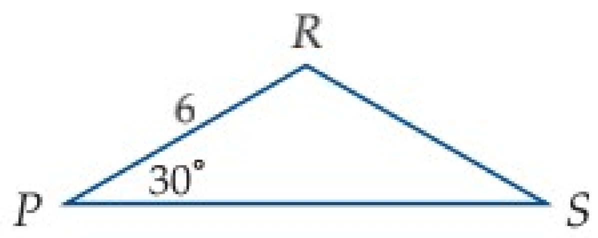
A $\sqrt{2}$

B $\sqrt{26}$

C $\sqrt{82}$

D $\sqrt{106}$

56) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن $PR = RS$؟



A $9\sqrt{2}$

B $9\sqrt{3}$

C $18\sqrt{2}$

D $18\sqrt{3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

5-3 الضرب الداخلي
Dot Product

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

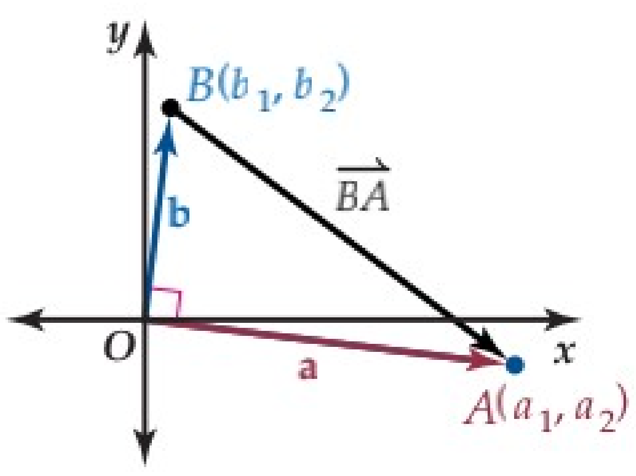
فيما سبق:
درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًا وجبريًا. (الدرس 2–5)

والآن:
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات:
الضرب الداخلي
dot product
المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors
الشغل
work

لماذا؟

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.



الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$ تعريف طول متجه

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$ ربّع الطرفين

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1{}^2 - 2a_1b_1 + b_1{}^2 + a_2{}^2 - 2a_2b_2 + b_2{}^2$$ فُك الأقواس

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1{}^2 + a_2{}^2) + (b_1{}^2 + b_2{}^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ جمّع الحدود المربعة

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$, $|\mathbf{a}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}$, $|\mathbf{b}|^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b ، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

قراءة الرياضيات
الضرب القياسي
يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي
يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي — المتجهان المتعامدان
يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن: $\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

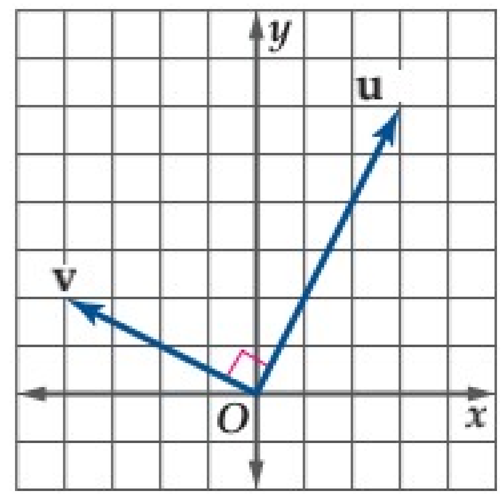
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2) = 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 5.3.1 .

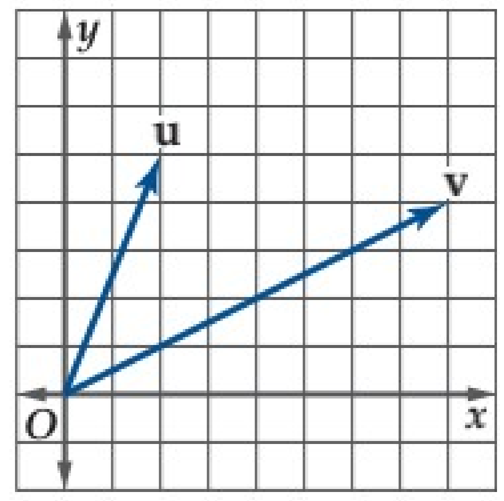
b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4) = 36$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 5.3.2 .



الشكل 5.3.1



الشكل 5.3.2

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

نظريَّة خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= |\mathbf{u}|^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37-35

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$|\langle -5, 12\rangle| = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط

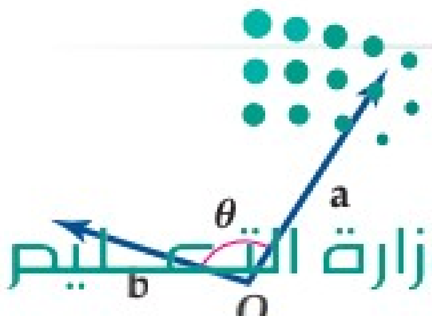
تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$

الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0° \leq \theta \leq 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.

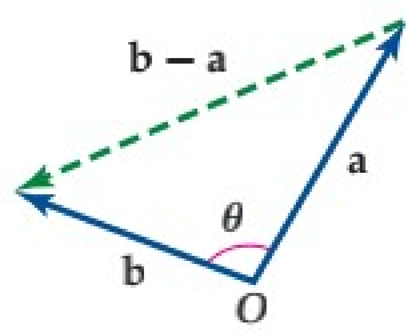


إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

البرهان

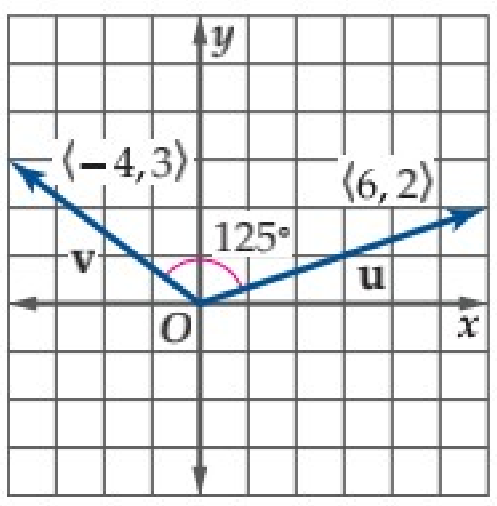
إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}-\mathbf{a}\rvert^2$	قانون جيوب التمام
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$
$-2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من الطرفين
$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert}$	بقسمة الطرفين على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert$

مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

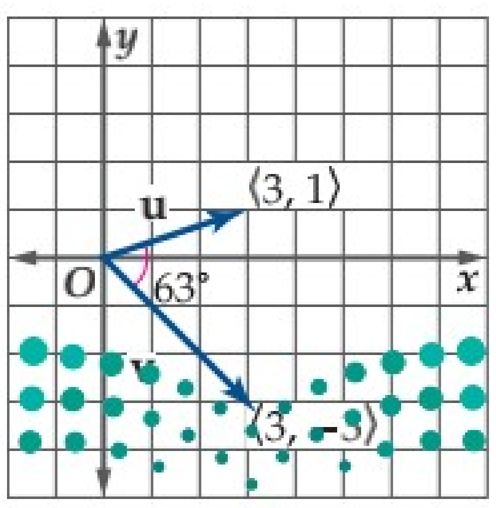


$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \dfrac{\langle 6, 2\rangle\cdot\langle -4, 3\rangle}{\lvert\langle 6, 2\rangle\rvert\,\lvert\langle -4, 3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$
$\cos\theta = \dfrac{-24+6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \dfrac{-18}{10\sqrt{10}}$	بسّط
$\theta = \cos^{-1}\dfrac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$	معكوس جيب التمام

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \dfrac{\langle 3, 1\rangle\cdot\langle 3, -3\rangle}{\lvert\langle 3, 1\rangle\rvert\,\lvert\langle 3, -3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$
$\cos\theta = \dfrac{9+(-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$	بسّط
$\theta = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$	معكوس جيب التمام



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل المجاور.

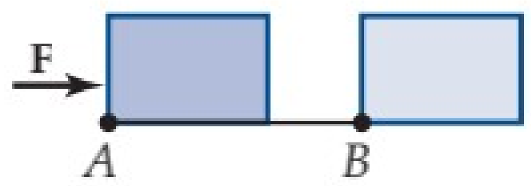
تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

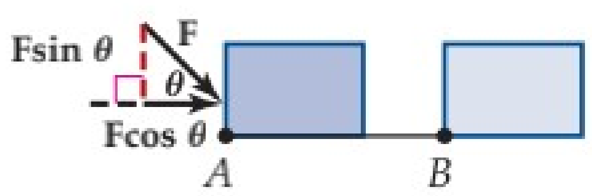
3A) $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت $\mathbf{F}$ قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت $\mathbf{F}$ موازيةً لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن $\mathbf{F}$ يساوي مقدار القوة $\mathbf{F}$ مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة $\mathbf{F}$ ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

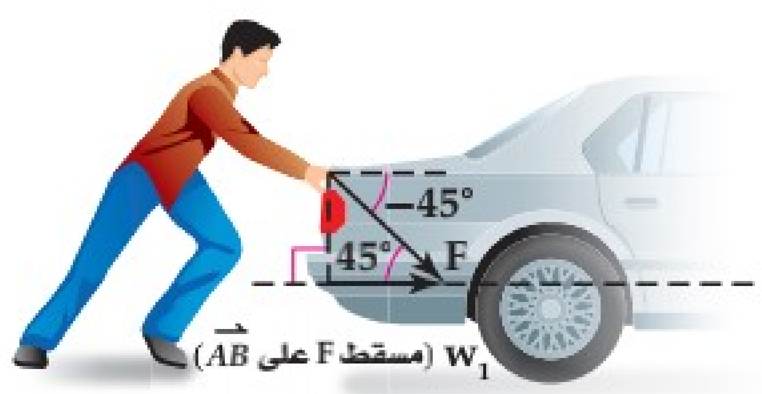


$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة $\mathbf{F}$ ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

مثال 4 من واقع الحياة — حساب الشغل

سيارة: **يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية °45 كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).**



استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة $\mathbf{F}$ بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي :

$\langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0 \rangle$.

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{قاعدة الضرب الداخلي للشغل}$$

$$= \langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle \cdot \langle 10, 0 \rangle \quad \text{عوّض}$$

$$= [120 \cos(-45°)](10) \approx 848.5 \quad \text{الضرب الداخلي}$$

أي أن الشخص يبذل 848.5J من الشغل؛ لدفع السيارة.

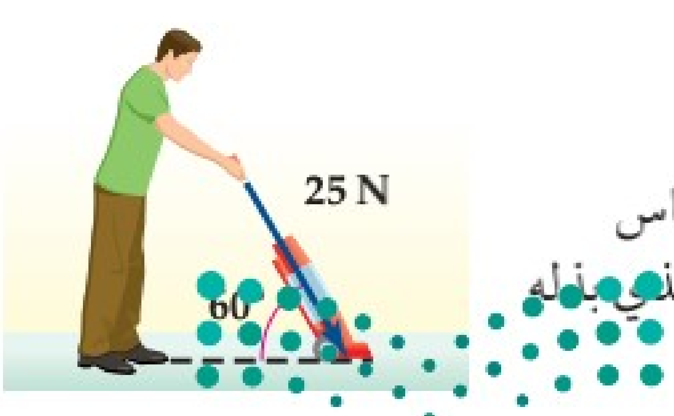
إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

تحقق من فهمك

4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض °60 ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u, v، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2\rangle$

6) **زيت الزيتون:** يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297\rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15\rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11\rangle$

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4\rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18\rangle$

10) $\mathbf{t} = \langle 23, -16\rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10\rangle$

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيَّمَهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6\rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3)

16) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوةٍ مقدارها 534 N؛ بزاوية 25°، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. (مثال 4)

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

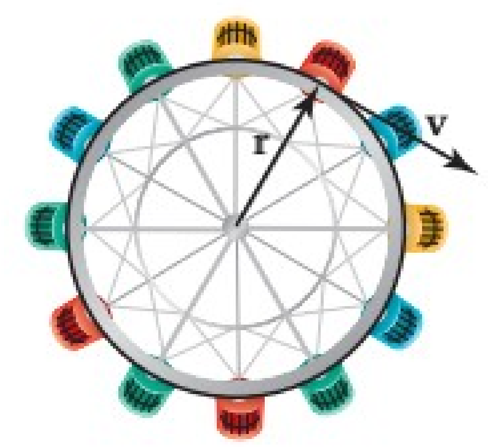
17) $\langle -2, -8\rangle$

18) $\langle 3, 5\rangle$

19) $\langle 7, -4\rangle$

20) $\langle -1, 6\rangle$

21) **عجلة دوَّارة:** يعامد المتجه **r** في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية **v** عند أيِّ نقطةٍ من نقاط الدائرة.



منظر علوي


منظر أمامي

a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه **r**، إذا كان يصنع زاويةً قياسها 35° مع الأفقي، ثم اكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

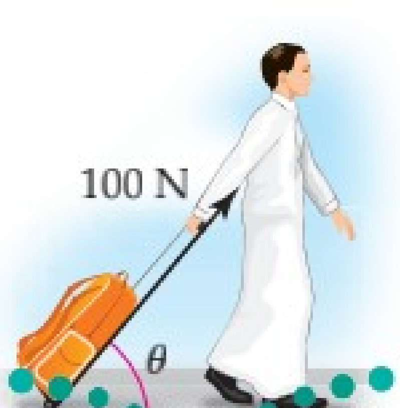
b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه **r**، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع a؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

إذا علمت كلًّا من v, u • v، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه u في كلٍّ مما يأتي:

22) $\mathbf{v} = \langle 3, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$

23) $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$

24) **مدرسة:** يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N، إذا بذل الطالب شغلًا مقداره 1747 J، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟



اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك.

25) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$

26) $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

27) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

28) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

29) النقاط: $(2, 3), (4, 7), (8, 1)$ تُمثِّل رؤوس مثلثٍ، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات.

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{u}, |\mathbf{v}|$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{v}$، قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

30) $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45°$

31) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121°$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **تبرير:** اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية:
إذا كانت $|\mathbf{d}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{f}|$ تُمثِّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسِّر تبريرك.

33) **اكتشف الخطأ:** يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضّح إجابتك.

34) **اكتب:** وضّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين.

برهان: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية:

35) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

36) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

37) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

38) **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين.

مراجعة تراكمية

إذا علمت: أن $\mathbf{a} = \langle 10, 1 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle -5, 2.8 \rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle \frac{3}{4}, -9 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-5)

39) $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$

40) $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$

41) $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (الدرس 2-5)

42) $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

43) $\langle -9, 5 \rangle$

44) $\langle -7, 7 \rangle$

تدريب على اختبار

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle$, $\langle -9, 0 \rangle$ ؟

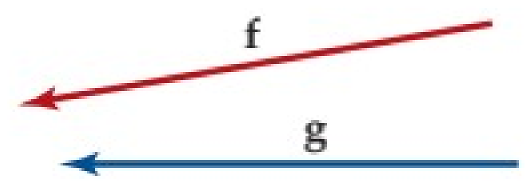
A $0°$
B $45°$
C $90°$
D $135°$

46) إذا كان: $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل $\mathbf{r}$، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟

A $\langle 14, 8 \rangle$
B $\langle 14, 6 \rangle$
C $\langle -14, 8 \rangle$
D $\langle -14, -8 \rangle$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، وقرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة . (الدرس 1-5)

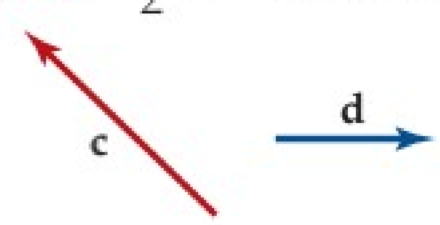
(1



(2

(3 **التزلُّج:** يسحب شخص مزلجةً على الجليد بقوةٍ مقدارها 50 N بزاوية °35 مع الأفقي، أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، وقرِّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-5)

(4 ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$ (الدرس 1-5)



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ ممَّا يأتي بدلالة متجهَي الوحدة **i, j** . (الدرس 2-5)

(5 $B(3,-1), C(4,-7)$ **(6** $B(10,-6), C(-8,2)$

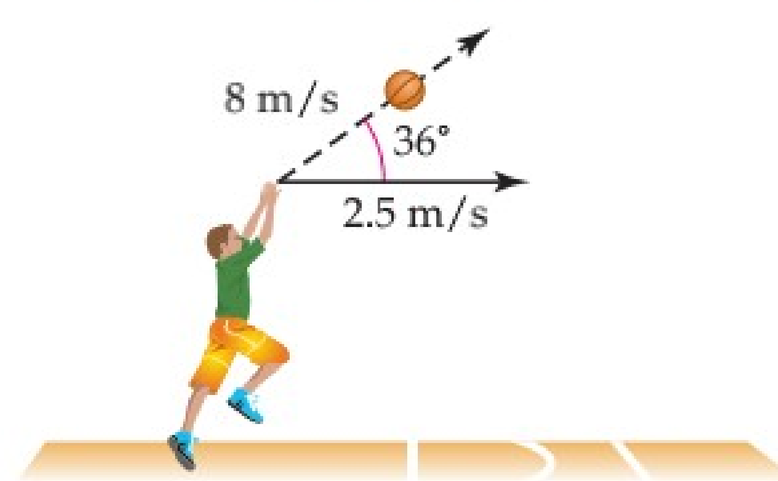
(7 $B(1,12), C(-2,-9)$ **(8** $B(4,-10), C(14,10)$

(9 **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لِـ $\overline{AB}$ ، حيث $A(-5\,,3)$ نقطة بدايته، و $B(2\,,-1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 2-5)

A $\langle 4, -1\rangle$ **C** $\langle -4, 7\rangle$

B $\langle 7, -4\rangle$ **D** $\langle -6, 4\rangle$

(10 **كرة سلة:** ركض راشد في اتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة 2.5 m/s ، ومن منتصف الملعب صوَّب كرةً بسرعة 8 m/s بزاويةٍ قياسها °36 مع الأفقي. (الدرس 2-5)



a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثِّلان سرعة راشد، وسرعة الكرة، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 2-5)

(11 $A(-4, 2)\ ,B(3,6)$ **(12** $Q(1, -5)\ ,R(-7, 8)$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u, v**، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 3-5)

(13 $\mathbf{u}=\langle 9\,,-4\rangle,\ \mathbf{v}=\langle -1, -2\rangle$

(14 $\mathbf{u}=\langle 8, 4\rangle,\ \mathbf{v}=\langle -2, 4\rangle$

(15 $\mathbf{u}=\langle 2, -2\rangle,\ \mathbf{v}=\langle 3, 8\rangle$

(16 **اختيار من متعدد:** إذا كان :
$\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{w} = \langle 8, -5\rangle$ ، فما ناتج $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$ ؟ (الدرس 3-5)

A -2 **C** 15

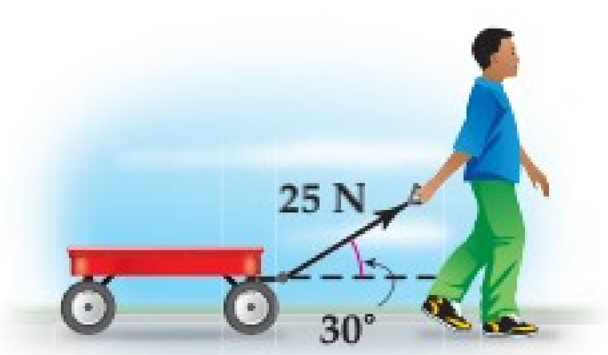
B -18 **D** 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-5)

(17 $\langle 2, -5\rangle\cdot\langle 4, 2\rangle$ **(18** $\langle 4, -3\rangle\cdot\langle 7, 4\rangle$

(19 $\langle 1, -6\rangle\cdot\langle 5, 8\rangle$ **(20** $\langle 3, -6\rangle\cdot\langle 10, 5\rangle$

(21 **عربة:** يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها 25 N، وبزاوية °30 مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 3-5)



a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي °40، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أم أقل؟ فسِّر إجابتك.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
Vectors in Three-Dimensional Space

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًّا وجبريًّا. الدرس (1–5)

والآن:

- أعيّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبّرُ عن المتجهات جبريًّا، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المفردات:

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system

المحور z
z-axis

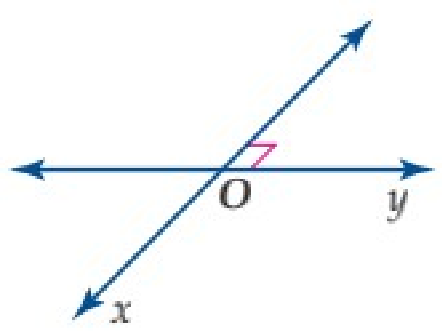
الثُمن
octant

الثلاثي المرتب
ordered triple

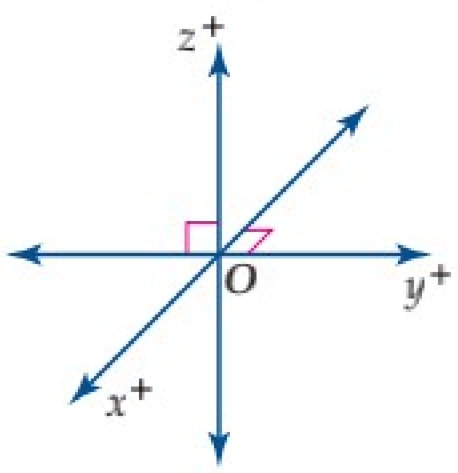
لماذا؟

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

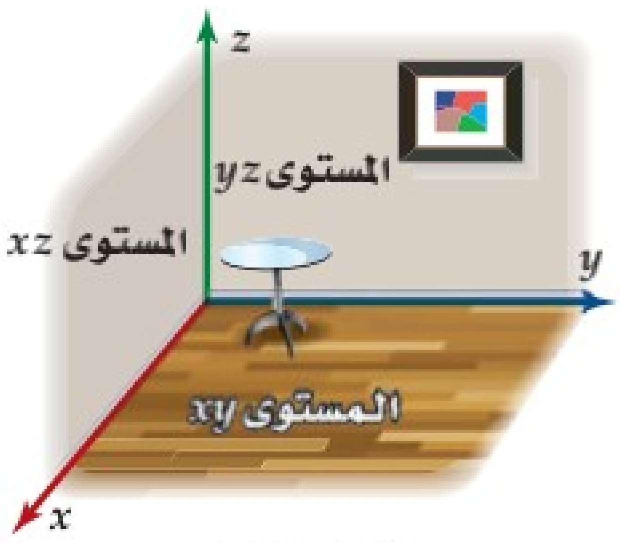
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 5.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل 5.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُمُن**، ويمكن تمثيل الثُمُن الأول بجزء الحجرة في الشكل 5.4.3.



الشكل 5.4.1



الشكل 5.4.2



الشكل 5.4.3

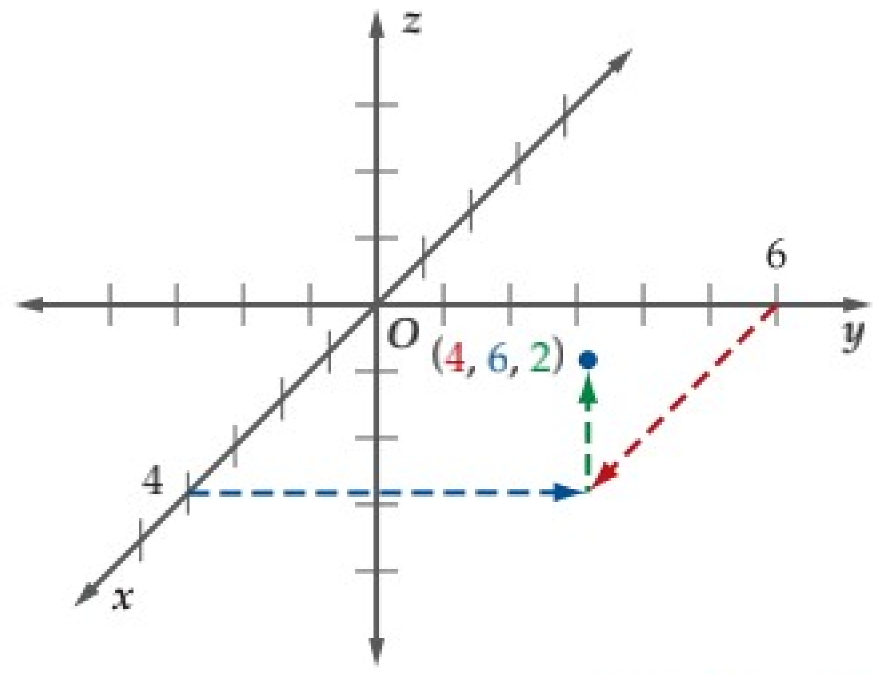
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى xy، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

مثال 1 تعيين نقطة في الفضاء

عيّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

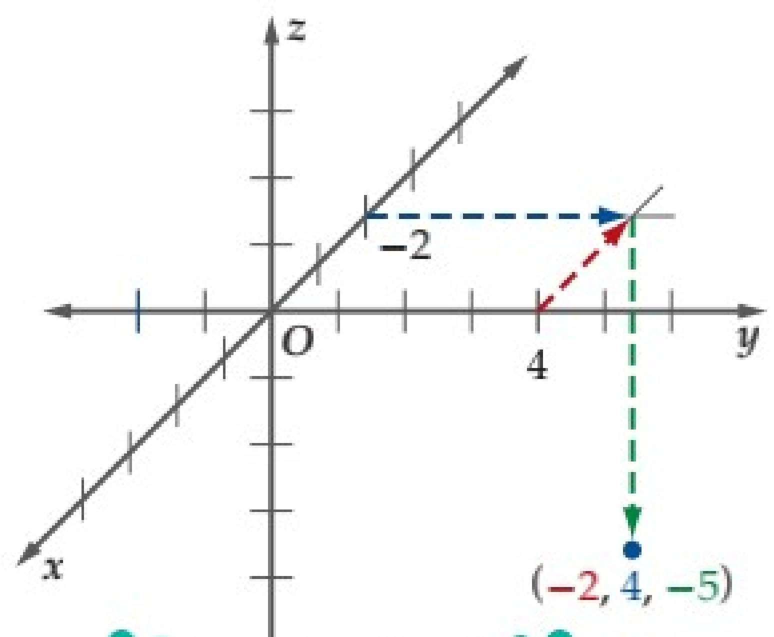
a) $(4, 6, 2)$

عيّن $(4, 6)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



b) $(-2, 4, -5)$

عيّن $(-2, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



إرشادات للدراسة

تدريج المحاور
تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

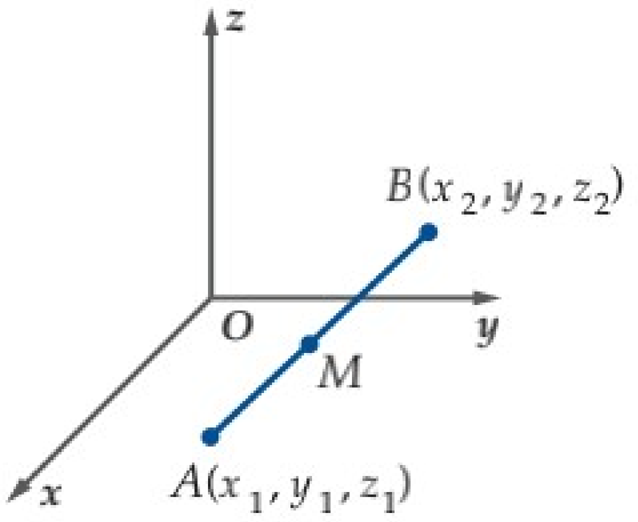
✓ تحقق من فهمك

عيّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1A) $(-3, -4, 2)$ 1B) $(3, 2, -3)$ 1C) $(5, -4, -1)$

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ **بالصيغة:**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

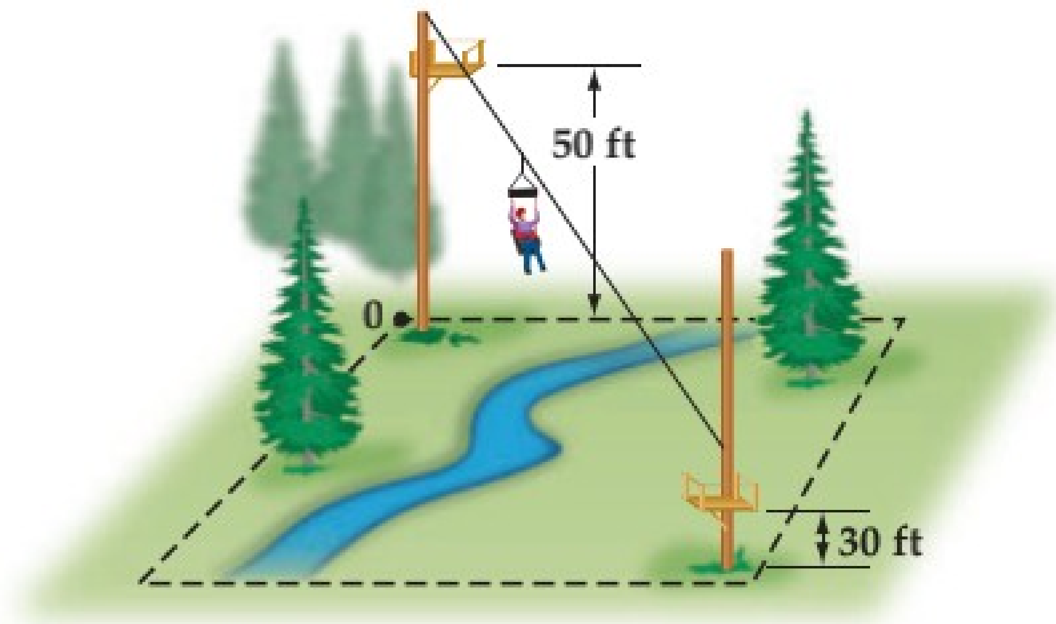
وتعطى نقطة المنتصف M **لـ** $\overline{AB}$ **بالصيغة:**

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

مثال 2 من واقع الحياة المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصّتَين إلى أقرب قدمٍ.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2} \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$\approx 101.98 \quad \text{بسّط}$$

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصّتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء .

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \quad \text{صيغة المنتصف}$$

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$= (40, 52, 40)$$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي $(40, 52, 40)$

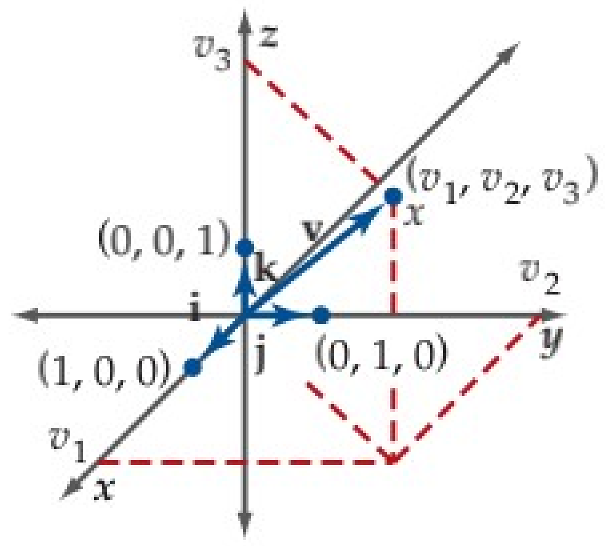
تحقق من فهمك

2) طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(300, 150, 30000)$, $(450, -250, 28000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا



الشكل 5.4.4

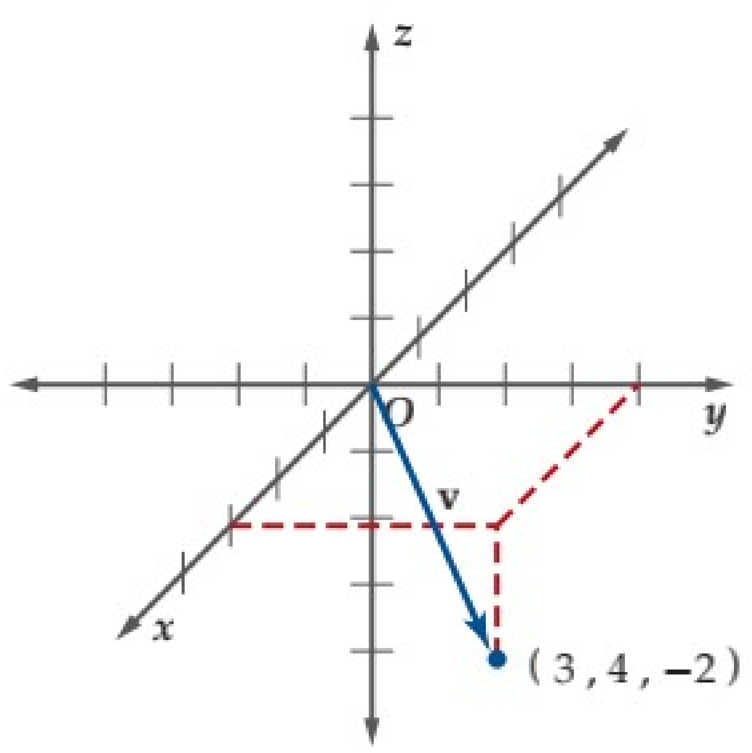
المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ ، كما في الشكل **5.4.4** ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال 3 تعيين متجه في الفضاء

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

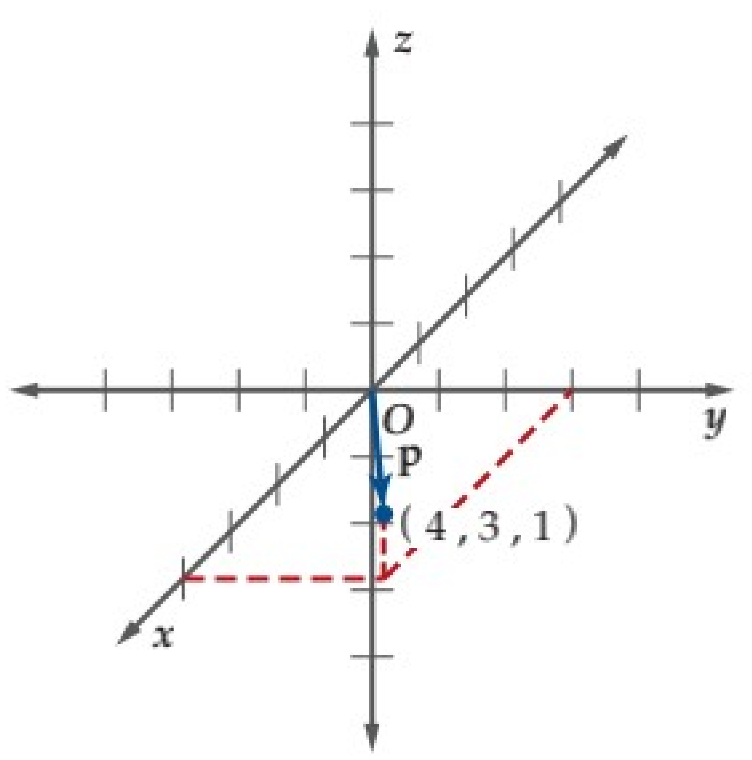
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2\rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{v}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{p}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



تحقق من فهمك

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3\rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$

مثال 4 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$$ عوّض

$$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي

$$= \langle 8, -24, 18 \rangle$$ اجمع المتجهين

b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$$ عوّض

$$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$$ اضرب متجهٍ في عددٍ حقيقي

$$= \langle 9, -10, -7 \rangle$$ اجمع المتجهات

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

4A) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

4B) $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

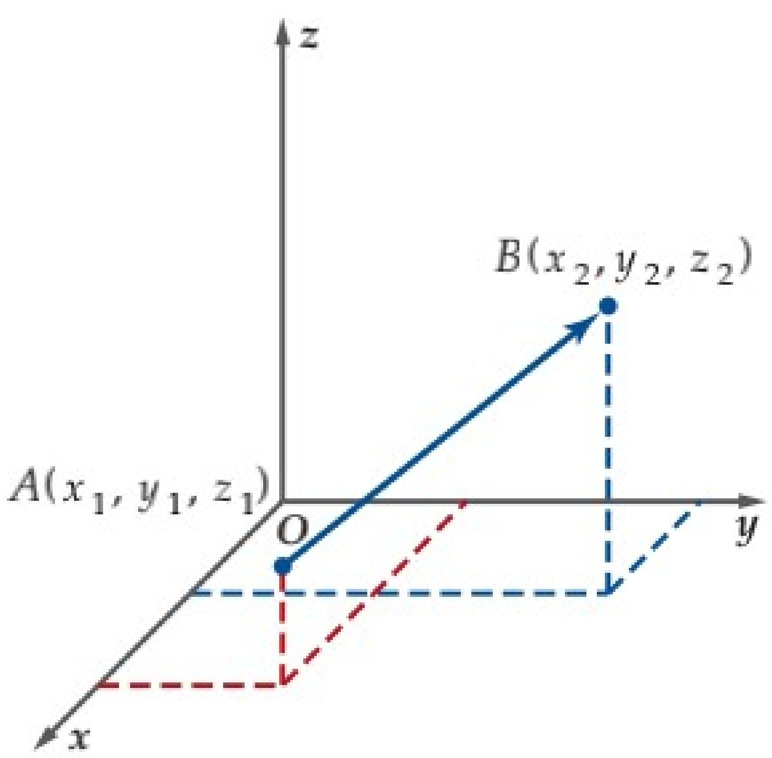
وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

مثال 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$ ، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$ ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$ الصورة الإحداثية لمتجه

$$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$$ $(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

$$= 9\sqrt{2}$$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$ متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle, |\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A) $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$

5B) $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

تدرب وحل المسائل

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)

1) $(1, -2, -4)$

2) $(3, 2, 1)$

3) $(-5, -4, -2)$

4) $(-2, -5, 3)$

5) $(2, -2, 3)$

6) $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$

10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

11) **طيَّارون:** في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(675, -121, 19300)$، وإحداثيات موقع طائرةٍ أخرى $(-289, 715, 16100)$ ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم .

b) عيِّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4\rangle$

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2\rangle$

14) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4\rangle$

15) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3\rangle$

16) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

17) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :
$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3\rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7\rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4\rangle$.
(مثال 4)

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

22) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$

23) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$

24) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :
$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
(مثال 4)

26) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$

27) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$

28) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

29) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$

30) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$

31) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

34) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

35) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

36) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

37) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

38) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

39) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممّا يأتي:

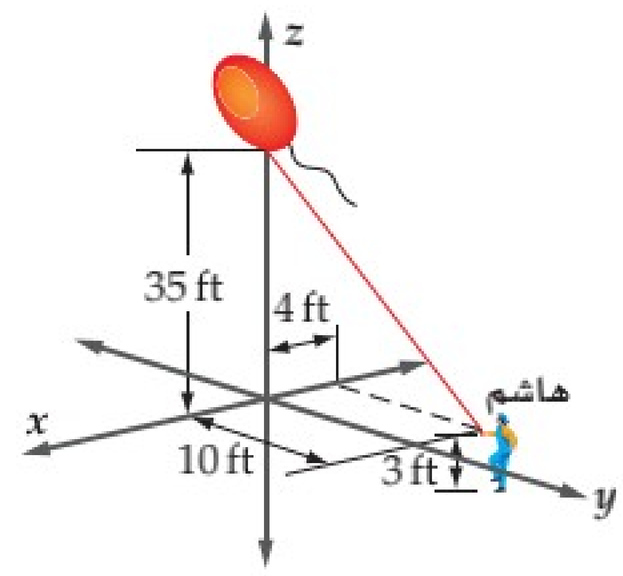
40) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$

41) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$

42) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$

43) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$

44) **تطوُّع:** تَطَوَّع هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدمٍ.



حدِّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

47) $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

48) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r .
"إرشاد: الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعدًا ثابتًا (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)".

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي:

49) مركزها $(-4, -2, 3)$ ، طول نصف قطرها 4

50) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

51) مركزها $(5, -3, 4)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

52) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M .

54) **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر منطقية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية.

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-5)

55) $A(6, -4), B(-7, -7)$

56) $A(-4, -8), B(1, 6)$

57) $A(-5, -12), B(1, 6)$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطِّيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-5)

58) $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

59) $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$

60) $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$

تدريب على اختبار

61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, -3, 5)$ ؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء
Dot and Cross Products of Vectors in Space

فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى.

الدرس (3-5)

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء.
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:

الضرب الاتجاهي
cross product

متوازي السطوح
parallelepiped

الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

لماذا؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطًّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي **الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء**

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

مثال 2 الزاوية بين متجهين في الفضاء

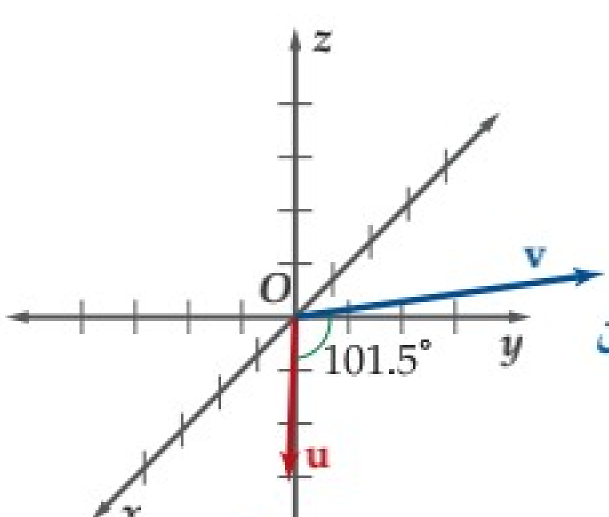
أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$ الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{\langle 3, 2, -1 \rangle \cdot \langle -4, 3, -2 \rangle}{|\langle 3, 2, -1 \rangle|\,|\langle -4, 3, -2 \rangle|}$$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$$ أوجد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين

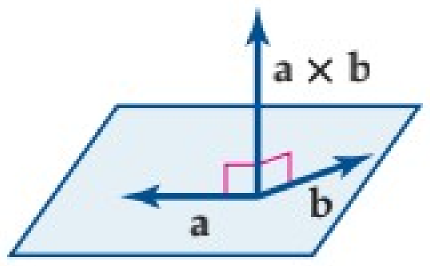
$$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$$ بسِّط وحُل بالنسبة إلى θ



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو 101.5° تقريبًا.

تحقق من فهمك

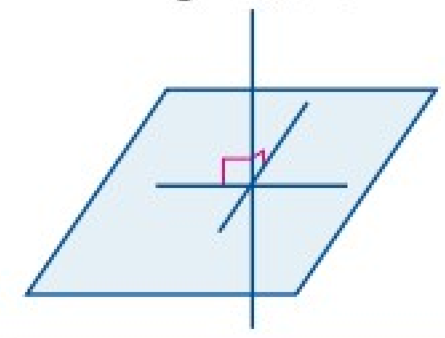
2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ.



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ $\mathbf{a}$ cross $\mathbf{b}$، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًا على مستوى، إذا كان عموديًا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.



مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

مثال 3 — إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle , \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

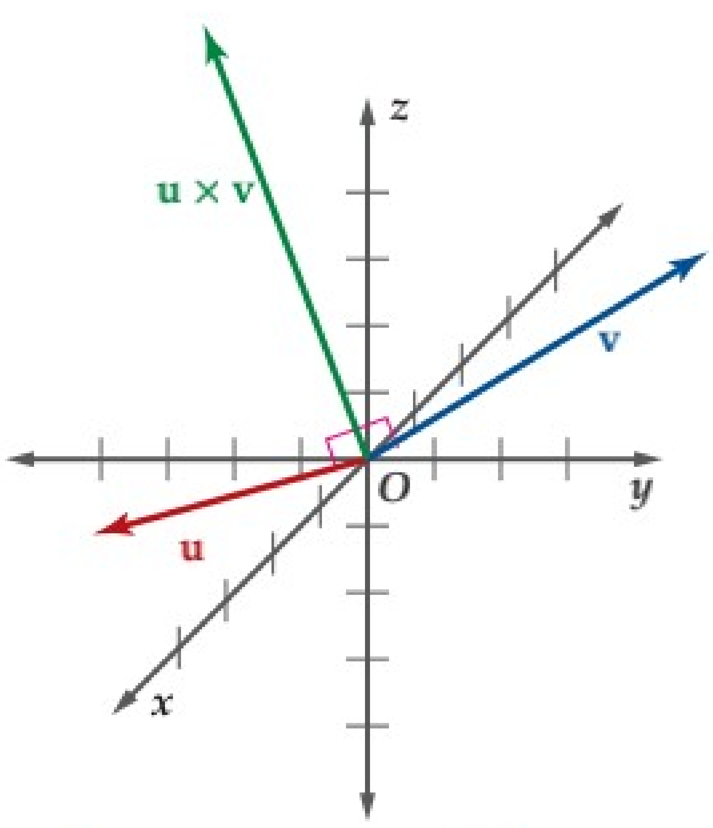
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k} \qquad \text{قاعدة إيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة}$$

$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k} \qquad \text{أوجد قيمة محدّدة الدرجة الثانية}$$

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \text{بسّط}$$

$$= \langle -5, -6, 3\rangle \qquad \text{الصورة الإحداثية}$$



ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle = -5(3) + (-6)(-2) + 3(1) = -15 + 12 + 3 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle = -5(-3) + (-6)(3) + 3(1) = 15 + (-18) + 3 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u}$.

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

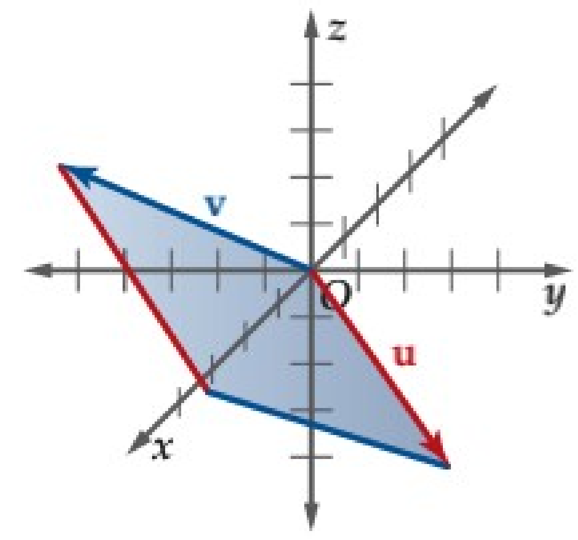
تحقق من فهمك

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A) $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 5.5.1 .



الشكل 5.5.1

مثال 4 مساحة متوازي أضلاعٍ في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثالثة

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثانية

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ طول متجه في الفضاء

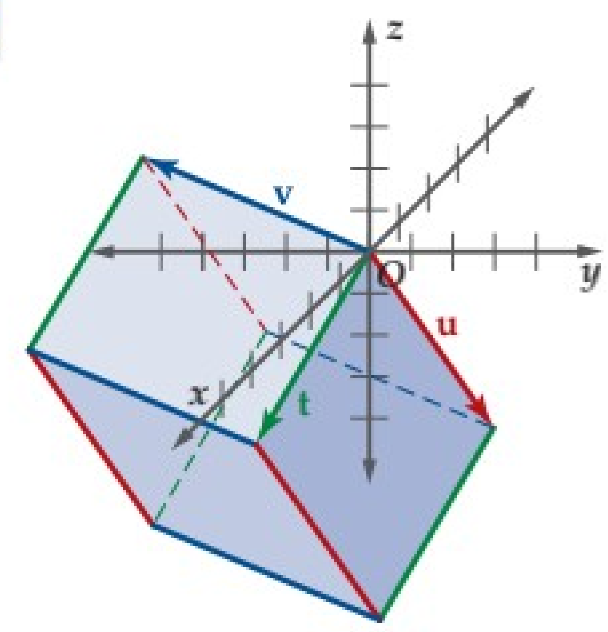
$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$ بسّط

أي أن مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 5.5.1 ، تساوي 16.91 وحدةً مربعةً تقريبًا.

✓ تحقق من فهمك

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 5.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة **للضرب القياسي الثلاثي** لهذه المتجهات يُمثّل حجم متوازي السطوح.



الشكل 5.5.2

مفهوم أساسي الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال 5 حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ أوجد قيمة محدِّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بسّط

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل 5.5.2 هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ ، ويساوي 34 وحدةً مكعبةً.

✓ تحقق من فهمك

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4 \rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13 \rangle$

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8 \rangle$

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتَي الهيدروجين في جُزيء الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5 \rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5 \rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 2)

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5 \rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2 \rangle$

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12 \rangle$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من **u, v** : (مثال 3)

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3 \rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1 \rangle$

14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8 \rangle$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه **u, v** ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2 \rangle$

18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه **t, u, v** أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6 \rangle$

21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4 \rangle$

22) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

23) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4 \rangle$

25) $\langle -1, -2, 5 \rangle$

26) $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3 \right\rangle$

27) $\langle 7, 0, 8 \rangle$

إذا عُلم كلٌّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، فأوجد حالةً ممكنةً للمتجه **u** في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$

29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4 \right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$

30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$

حدّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعةً على استقامةٍ واحدةٍ أم لا؟

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$

32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9 \rangle$

34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7 \rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$

35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه **u** الذي يقع في المستوى yz ، وطوله 8، ويصنع زاوية قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y.

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

36) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$

37) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$

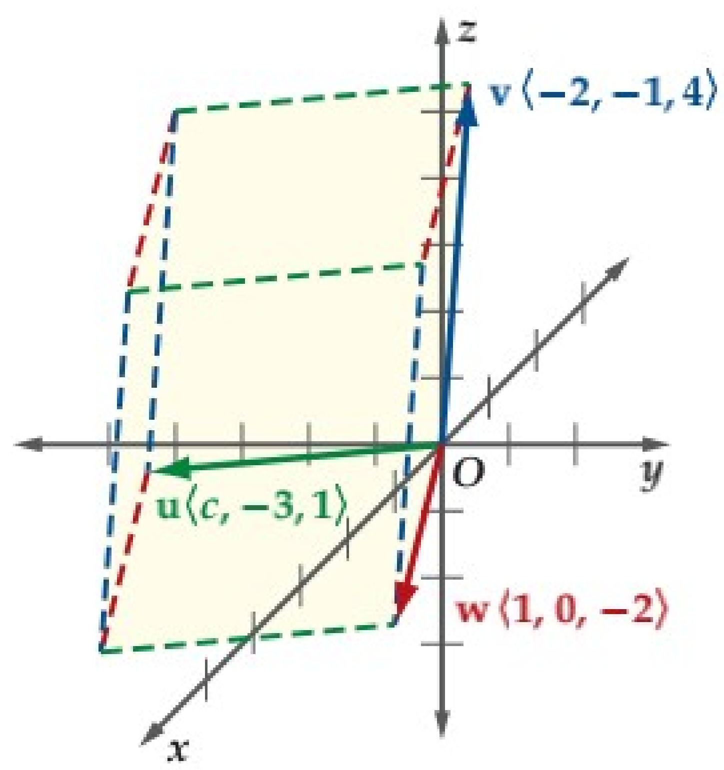
38) عرض جوي: أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأقلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$، في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطَّا سير الطائرتين؟ وضِّح إجابتك.

إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

39) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

40) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

41) إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداتٍ مكعبةٍ، فما قيمة c؟



مسائل مهارات التفكير العليا

42) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برِّر إجابتك.

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين».

43) تحدٍّ: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$، فأوجد قيمة c التي تجعل: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

44) تبرير: فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى.

45) اكتب: بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهَين أو تعامدهما.

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعةٍ مستقيمةٍ مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 5-4)

46) $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$

47) $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$

48) $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 5-3)

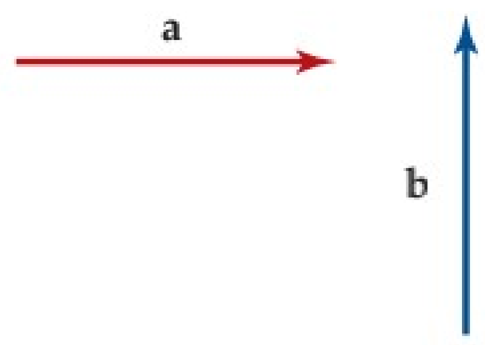
49) $\langle -8, -7 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle$

50) $\langle -4, -6 \rangle \cdot \langle 7, 5 \rangle$

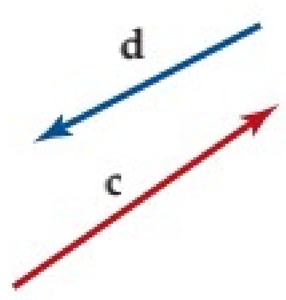
51) $\langle 6, -3 \rangle \cdot \langle -3, 5 \rangle$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مُستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي. (الدرس 5-1)

52)



53)



تدريب على اختبار

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle$, $\langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle$, $\langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle$, $\langle 6, 2, -2 \rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$؟

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

دليل الدراسة والمراجعة

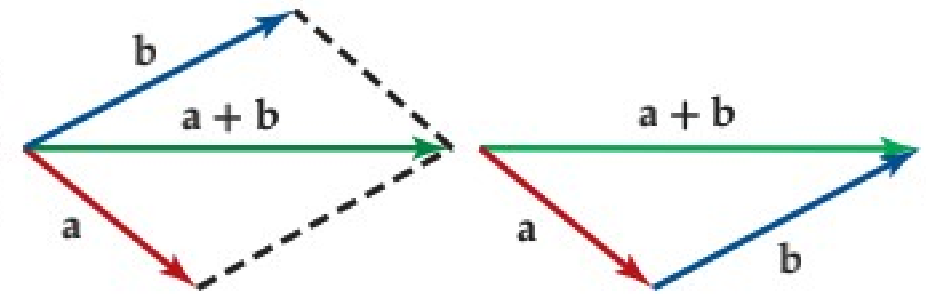
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 5-1)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصِّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.

قاعدة متوازي الاضلاع



قاعدة المثلث

المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 5-2)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y\rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استعمال متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 5-3)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 5-4)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 5-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ، ويساوي $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات

- كمية قياسية عددية ص 218
- المتجه ص 218
- كمية متجهة ص 218
- قطعة مستقيمة متجهة ص 218
- نقطة البداية ص 218
- نقطة النهاية ص 218
- طول المتجه ص 218
- الوضع القياسي ص 218
- اتجاه المتجه ص 218
- الاتجاه الربعي ص 219
- الاتجاه الحقيقي ص 219
- المتجهات المتوازية ص 219
- المتجهات المتساوية ص 219
- المتجهان المتعاكسان ص 219
- المحصلة ص 220
- قاعدة المثلث ص 220
- قاعدة متوازي الأضلاع ص 220
- المتجه الصفري ص 221
- المركبات ص 222
- المركبات المتعامدة ص 222
- الصورة الإحداثية ص 226
- متجه الوحدة ص 228
- متجها الوحدة القياسيّان ص 228
- توافق خطّيّ ص 229
- الضرب الداخلي ص 234
- المتجهان المتعامدان ص 234
- الشغل ص 237
- نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد ص 241
- المحور z ص 241
- الثُمن ص 241
- الثلاثي المرتب ص 241
- الضرب الاتجاهي ص 248
- متوازي السطوح ص 249
- الضرب القياسي الثلاثي ص 249

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه .

2) إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$.

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6\rangle$.

5) يتساوَى متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه.

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$.

7) لتجد متجهًا يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين.

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه.

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدةٍ باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$

مراجعة الدروس

5-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 218 - 225)

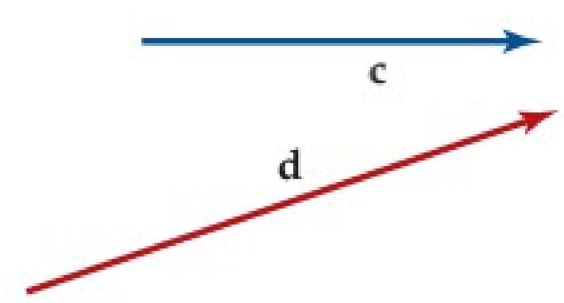
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق.

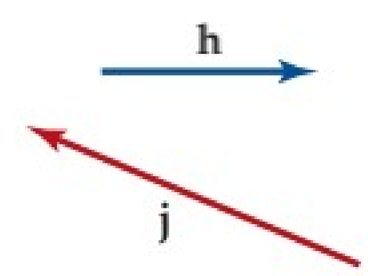
11) شجرة طولها 20 ft.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

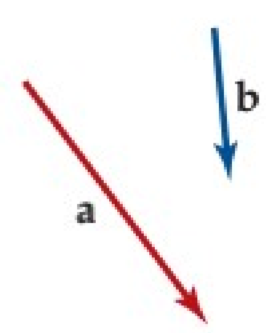
12)



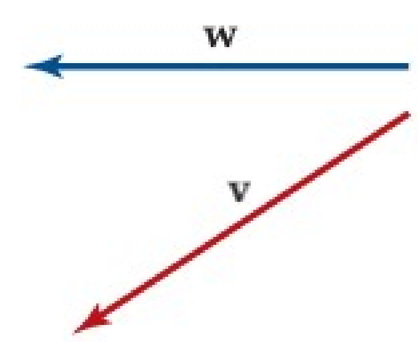
13)



14)



15)



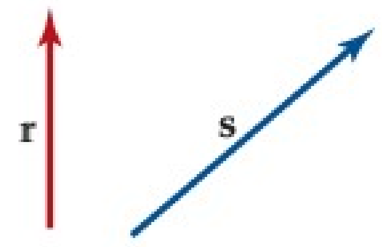
أوجد طول المحصِّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق.

17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف.

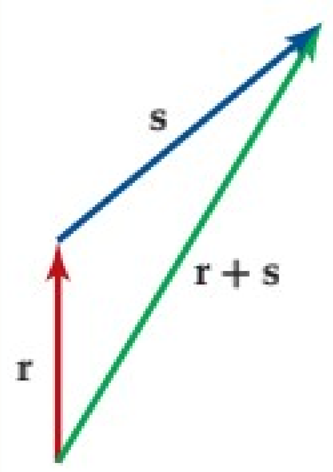
مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



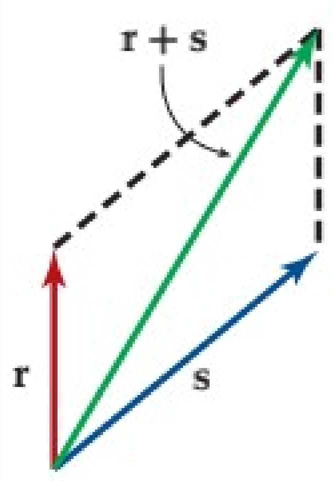
قاعدة المثلث

اسحب **r** ، بحيث تلتقي نقطة نهاية **r** مع نقطة بداية **s** ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية **r** ، وينتهي عند نقطة نهاية **s**.



قاعدة متوازي الأضلاع

اسحب **s** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **r** ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه **r, s** ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.



فيكون طول المحصلة 3.4 cm ، وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

دليل الدراسة والمراجعة

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 226 - 233)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

18) $A(-1, 3), B(5, 4)$

19) $A(7, -2), B(-9, 6)$

20) $A(-8, -4), B(6, 1)$

21) $A(2, -10), B(3, -5)$

إذا كان: $\mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle$ ، $\mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

22) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$

23) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$

24) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$

25) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

26) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

27) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

28) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

29) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$ ، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$ عوّض

$= \langle 1, 1\rangle$ اطرح

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{1^2 + 1^2}$ عوّض

$= \sqrt{2} \approx 1.4$ بسّط

5-3 الضرب الداخلي (الصفحات 234 - 239)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي، ثم تحقّق ممّا إذا كانا متعامدين أم لا:

30) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$

31) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$

32) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$

33) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي:

34) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

35) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle$ ، $\mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ الضرب الداخلي

$= 2(-4) + (-5)(7)$ عوّض

$= -8 + (-35) = -43$ بسّط

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$ ، فإن المتجهين $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 241 - 246)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

36) $(1, 2, -4)$

37) $(3, 5, 3)$

38) $(5, -3, -2)$

39) $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفَيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها.

40) $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

41) $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

42) $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

43) $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثّل بيانيًا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء:

44) $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4\rangle$

45) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

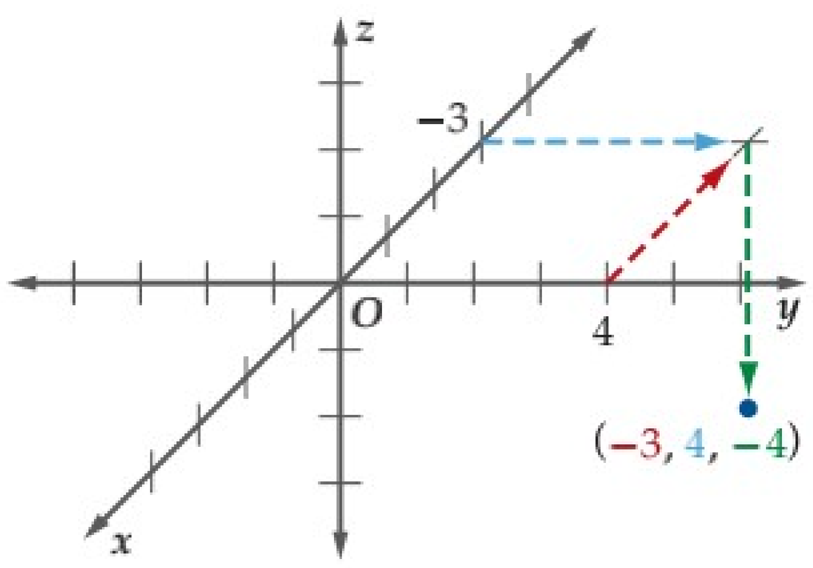
46) $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

47) $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3\rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد .

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطةً تبعد 4 وحداتٍ أسفل هذه النقطة، وباتجاه موازٍ للمحور z .



5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 247 - 251)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا.

48) $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13\rangle$

49) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3\rangle$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

50) $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3\rangle$

51) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1\rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2\rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58\rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58\rangle \cdot \langle -4, 2, -3\rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

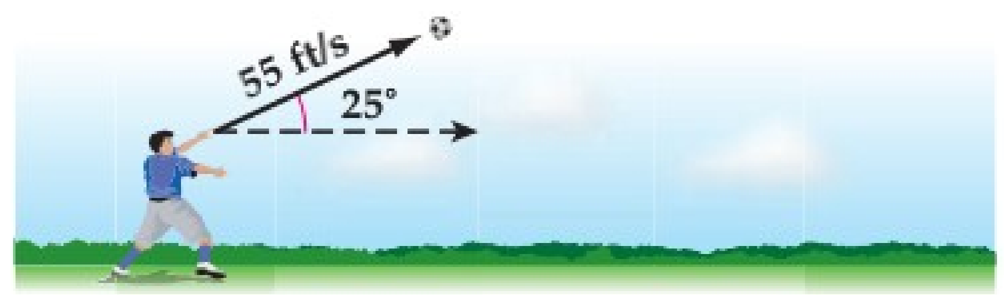
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58\rangle \cdot \langle 7, 11, 2\rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

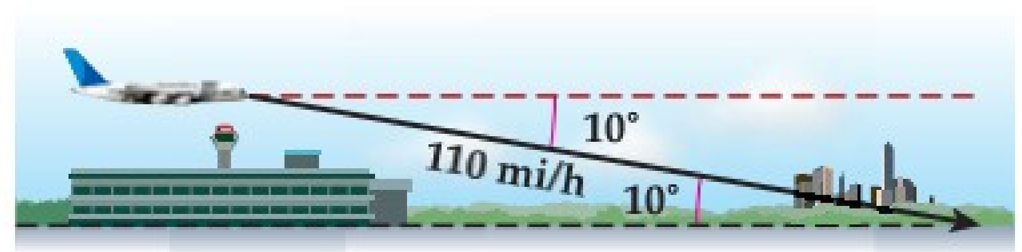
بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

تطبيقات ومسائل

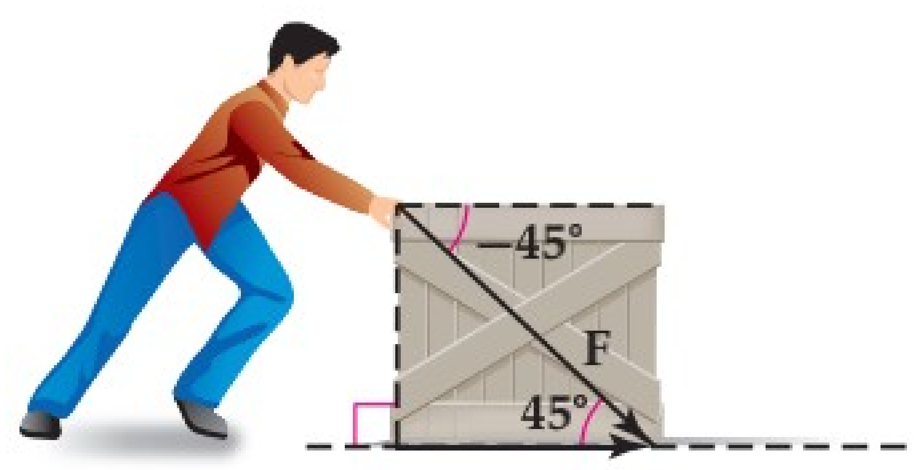
52) كرة قدم: تلقَّى لاعب كرة قدمٍ الكرة برأسه، فارتدَّت بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 55 ft/s، وبزاويةٍ قياسها °25 فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 1-5)



53) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h، وبزاوية قياسها °10 تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. (الدرس 2-5)



54) صناديق: يدفع عامل صندوقًا بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 90 N بزاوية °45 في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). (الدرس 3-5)



55) أقمار اصطناعية: إذا مَثَّلت النقطتان: (28625, 32461, −38426)، (43015 ,29218− ,31613−) موقِعَي قمرين اصطناعيين، ومَثَّلَتِ النقطة (0 ,0 ,0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 4 - 5)

a) أوجد المسافة بين القمرين.

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟

c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع **b**.

56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفةٍ أبعادها 3 m, 4 m, 5 m
"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالةً خاصةً من متوازي السطوح". (الدرس 5-5)

اختبار الفصل

أوجد محصّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة، والمنقلة.

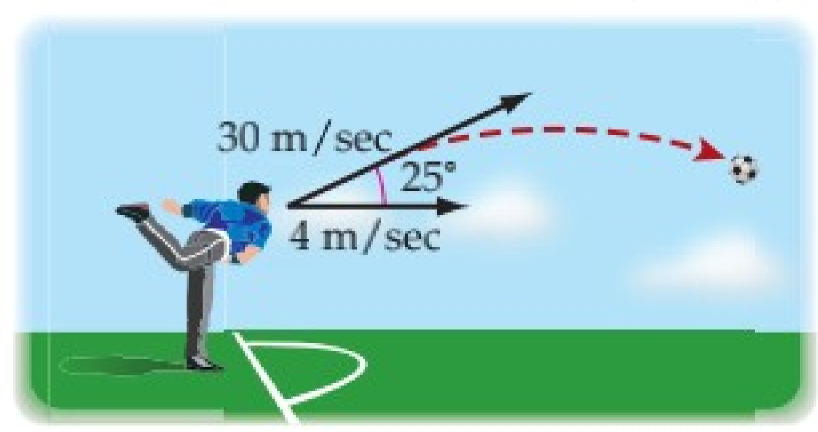
(1   **(2**

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(3 $A(1, -3), B(-5, 1)$

(4 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

(5 **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/s ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s ، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي، فما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟



أوجد متجه وحدة باتجاه **u** في كلٍّ مما يأتي:

(6 $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$

(7 $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

(8 $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$

(9 $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$

(10 $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

(11 **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** ؟

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

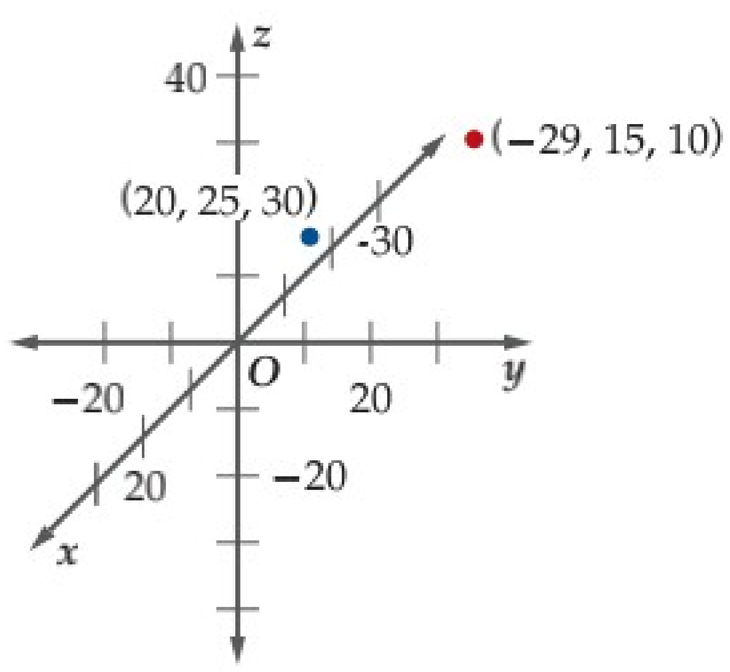
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle , \mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle , \mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(12 $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$

(13 $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$

(14 **بالونات الهواء الساخن:** أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(20, 25, 30)$, $(-29, 15, 10)$ كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة.

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته.

أوجد الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كلٍّ ممّا يأتي:

(15 $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$

(16 $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن **u × v** يعامد كلًّا من **u, v** :

(17 $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$

(18 $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

الصيـغ

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ أو $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ أو $x^2 + y^2 = r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec \theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc \theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan \theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc \theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$		$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$	$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$

الصيغ

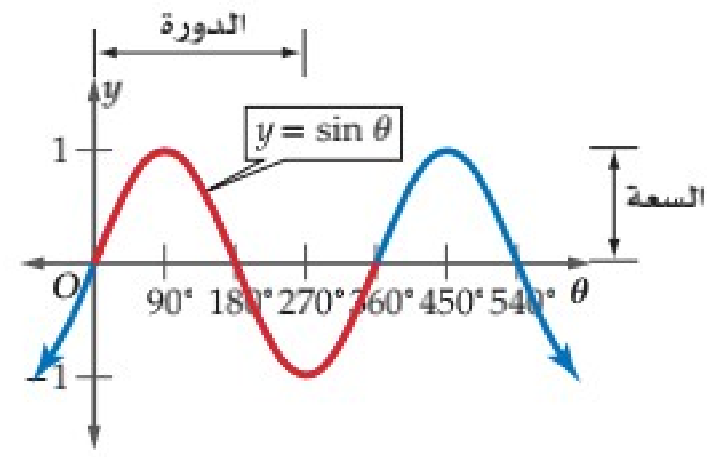
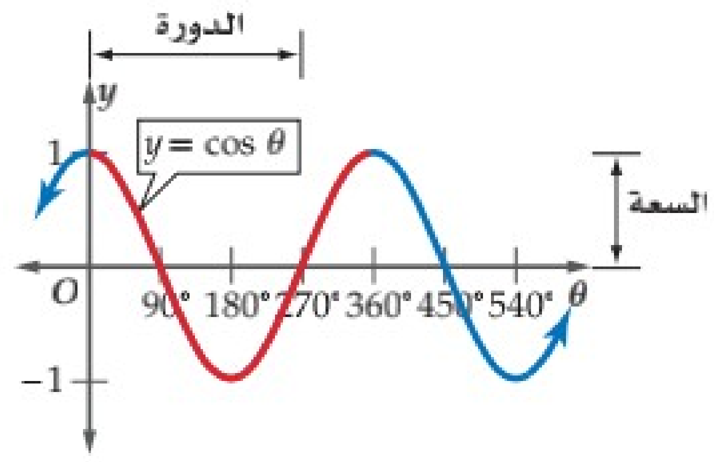
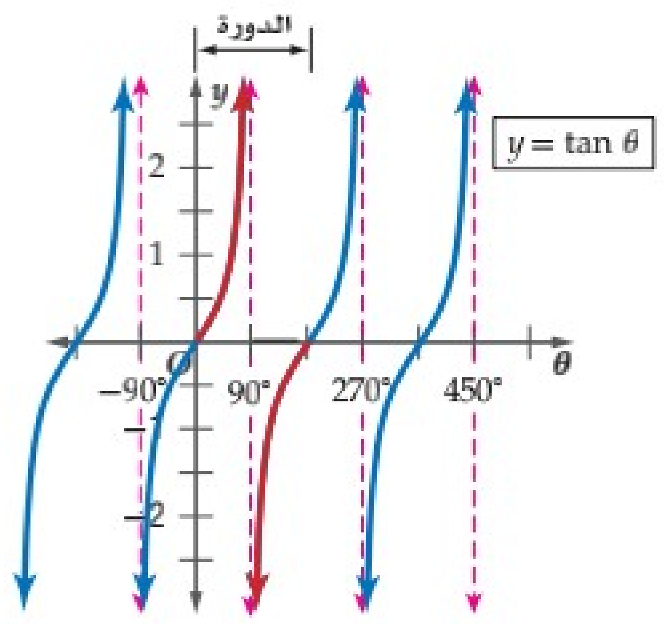
المتجهات

جمع متجهين في المستوى	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\langle a_1+b_1, a_2+b_2\rangle$	جمع متجهين في الفضاء	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\langle a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\rangle$
طرح متجهين في المستوى	$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\langle a_1-b_1, a_2-b_2\rangle$	طرح متجهين في الفضاء	$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\rangle$
ضرب متجه في عدد حقيقي في المستوى	$k\mathbf{a}=\langle ka_1, ka_2\rangle$	ضرب متجه في عدد حقيقي في الفضاء	$k\mathbf{a}=\langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$
الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$	الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	الضرب القياسي للثلاثيات	$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
طول متجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$		
الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$		

قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	الزاوية
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin\theta$
-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\theta$
0	غير معرّف	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan\theta$

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية

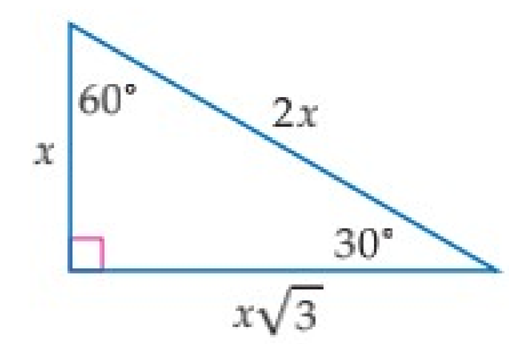
الدالة	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$	$y = \tan \theta$
التمثيل البياني			

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

$30°$ ،$60°$ ،$90°$

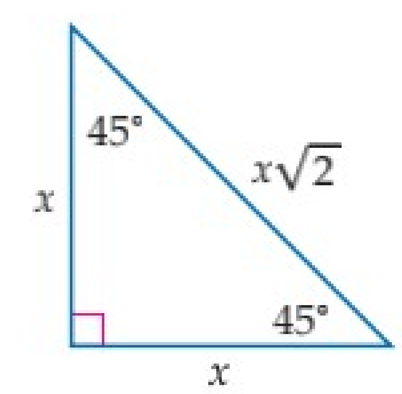
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$



$45°$ ،$45°$ ،$90°$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 45° = 1$

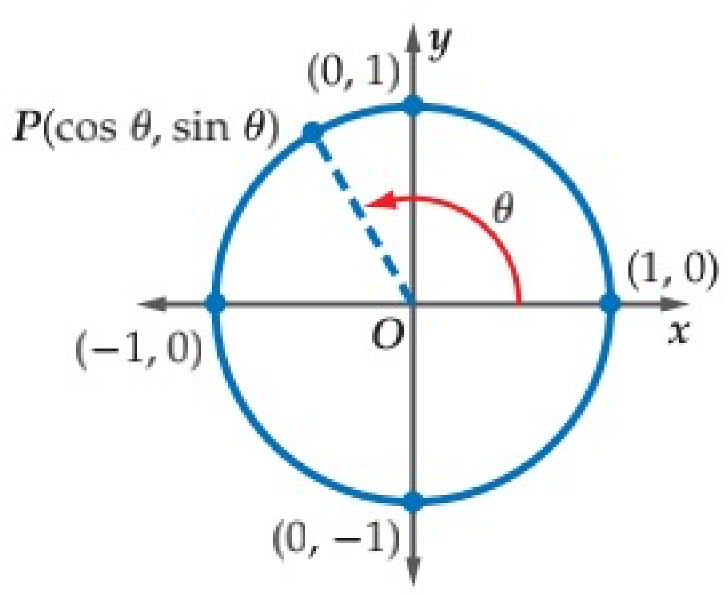


دوال في دائرة الوحدة

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$،

فإن $\sin \theta = y$ ، $\cos \theta = x$، أي أن: $P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}	دالة معكوس الجيب	$\sin^{-1} x$
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$	دالة معكوس جيب التمام	$\cos^{-1} x$
مصفوفة الوحدة	I	دالة معكوس الظل	$\tan^{-1} x$
دالة الجيب	$\sin x$	مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\mathrm{A}_{m \times n}$
دالة جيب التمام	$\cos x$	العنصر في الصف i والعمود j من المصفوفة A	a_{ij}
دالة الظل	$\tan x$	محددة المصفوفة A	$\|\mathrm{A}\|$
دالة مقلوب الظل	$\cot x$	المتجه AB	$\langle a, b \rangle$
دالة مقلوب الجيب	$\csc x$	المتجه a	$\mathbf{a}$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec x$	مقدار المتجه $\mathbf{a}$	$\|\mathbf{a}\|$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

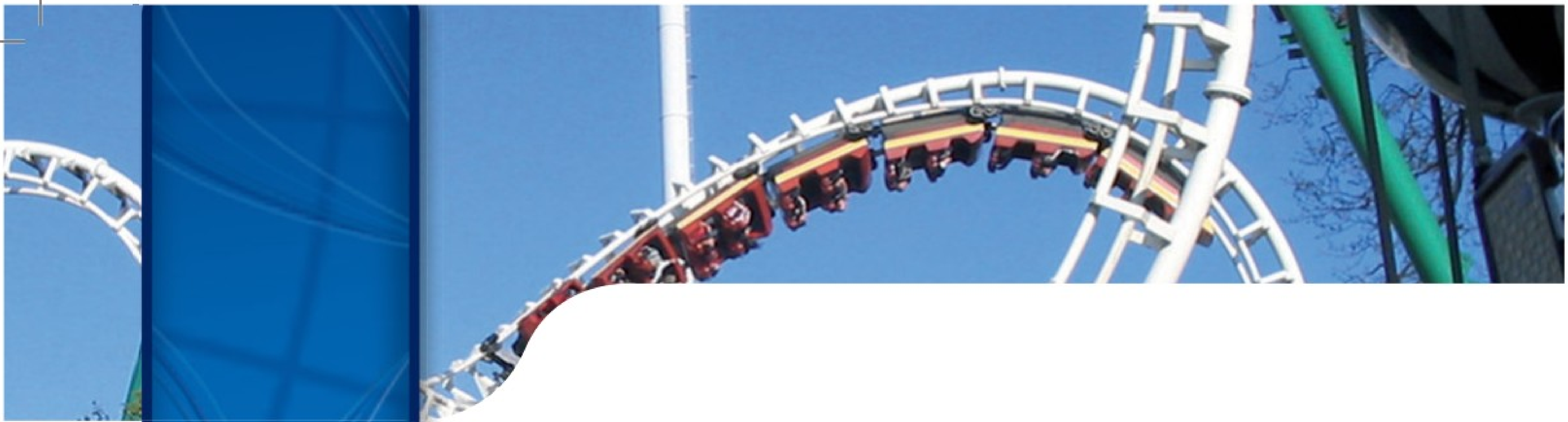
القسم الثالث

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفهرس

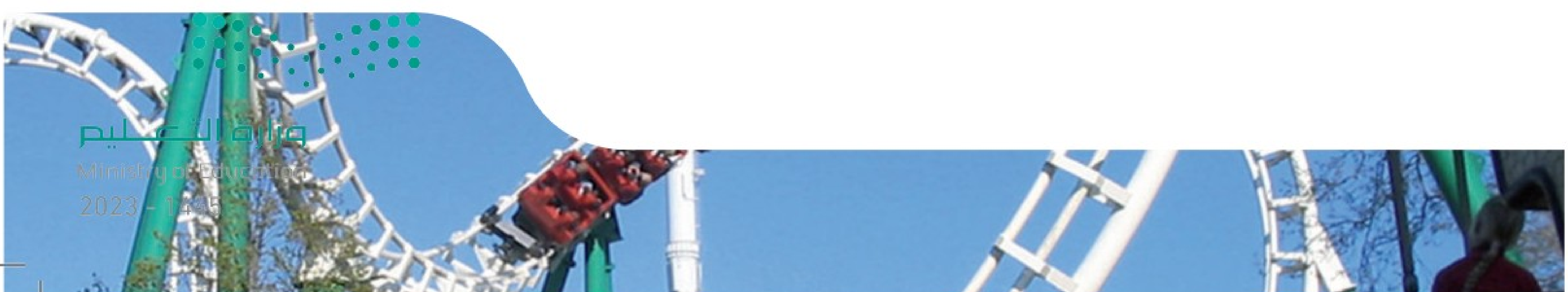
الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الفصل 7 الاحتمال والإحصاء



الفهرس

الفصل 8 النهايات والاشتقاق



الفصل 6

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة
Polar Coordinates and Complex Numbers

فيما سبق:

درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أُمثِّلُ الإحداثيات القطبية بيانيًا.
- أحولُ بين الإحداثيات والمعادلات الديكارتية والقطبية.
- أكتب الأعداد المركبة على الصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.

لماذا؟

تصاميم هندسية: يمكن استعمال المعادلات القطبية في عمل تصاميم هندسية فمثلًا لوحة سهام تظهر عليها المواقع بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية. كما يمكن استعمالها لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد على تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل: السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل؛ لتساعدك على التنبؤ بالأفكار التي ستتعلمها في هذا الفصل.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 6

اختبار سريع

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1) $200°$

2) $-45°$

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثِّلهما في الوضع القياسي:

3) $165°$

4) $-10°$

5) $\frac{4\pi}{3}$

6) $-\frac{\pi}{4}$

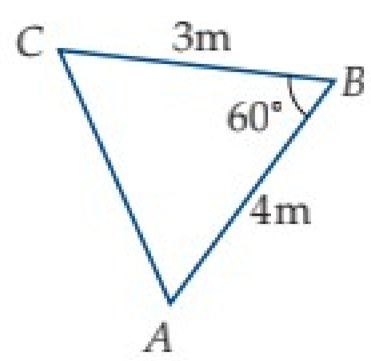
حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

7) $-60°$

8) $\frac{3\pi}{2}$

9) أوجد القيمة الدقيقة لـِ $\sin 15$ باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين.

10) أوجد طول الضلع AC في المثلث المرسوم أدناه (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة).

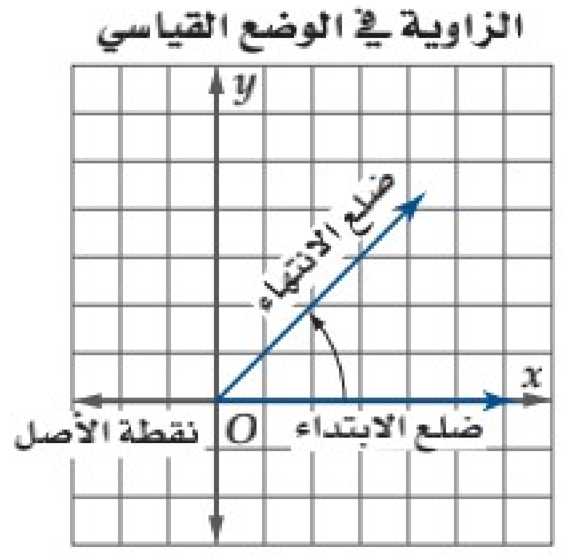


مراجعة المفردات

ضلع الابتداء للزاوية (Initial Side of an Angle)
الضلع المنطبق على المحور x عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

ضلع الانتهاء للزاوية (Terminal Side of an Angle)
الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

الزاوية في الوضع القياسي



قياس الزاوية (Measure of an Angle)
يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

متطابقات المجموع والفرق
(Sum and Difference Identities)

- $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-1 الإحداثيات القطبية
Polar Coordinates

فيما سبق:
درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أُمثّل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أُمثّل بيانيًا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات:
نظام الإحداثيات القطبية
polar coordinate system
القطب
pole
المحور القطبي
polar axis
الإحداثيات القطبية
polar coordinates
المعادلة القطبية
polar equation
التمثيل القطبي
polar graph

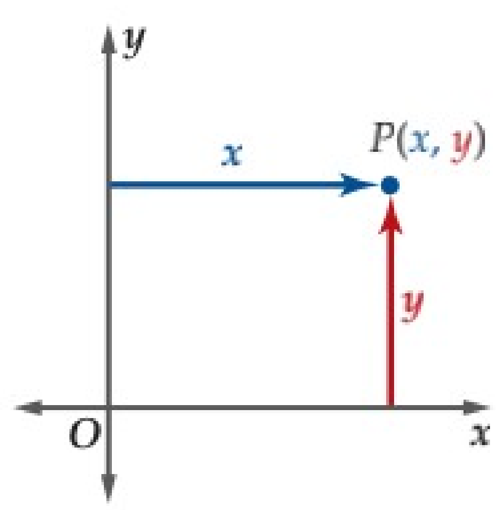
لماذا؟


يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

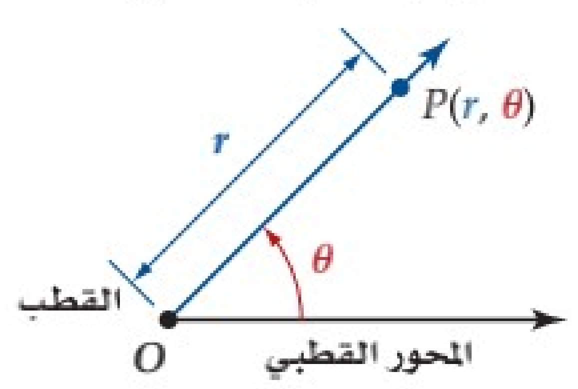
في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x , y هما المحوران الأفقي والرأسي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل، ويرمز لها بالحرف O. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x , y)، حيث x , y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والرأسية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(1, \sqrt{3})$ على بُعد وحدة واحدة إلى يمين المحور y، وعلى بُعد $\sqrt{3}$ وحدة إلى أعلى المحور x .

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو نصف مستقيم يمتد أفقيًا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات** (r, θ) ، حيث r المسافة المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا)، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلى النقطة P ، و θ الزاوية المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا) من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



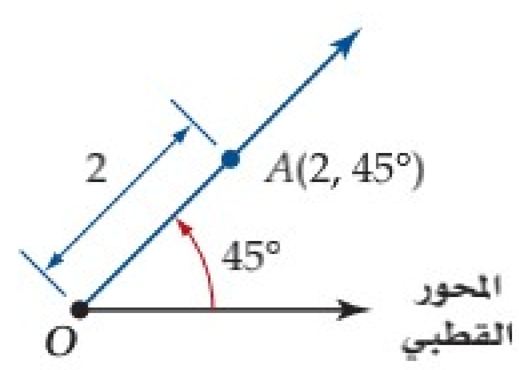
القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، ولتمثيل النقطة P بالإحداثيات القطبيّة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ إذا كانت r موجبة. أما إذا كانت سالبة، فإن P تقع على نصف المستقيم المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ .

مثال 1 تمثيل الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

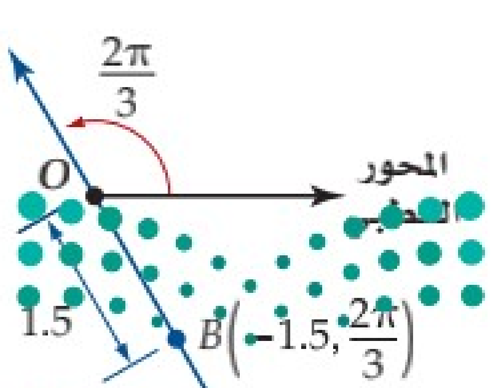
a) $A(2, 45°)$

بما أن $\theta = 45°$ ، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $45°$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 2$ ، لذا عيِّن نقطةً A تبعُد وحدتين عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية $45°$ ، كما في الشكل المجاور.



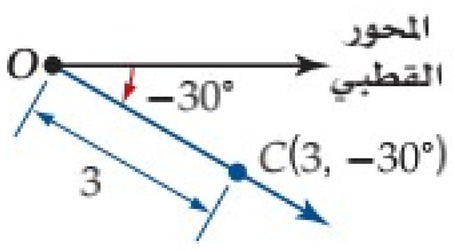
b) $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{2\pi}{3}$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً B تبعُد 1.5 وحدة عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء، كما في الشكل المجاور.



$C(3, -30°)$ (c

بما أن $\theta = -30°$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$، لذا عيِّن نقطةً C تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



✓ تحقق من فهمك

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

$D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ (1A $\quad$ $E(2.5, 240°)$ (1B $\quad$ $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$ (1C

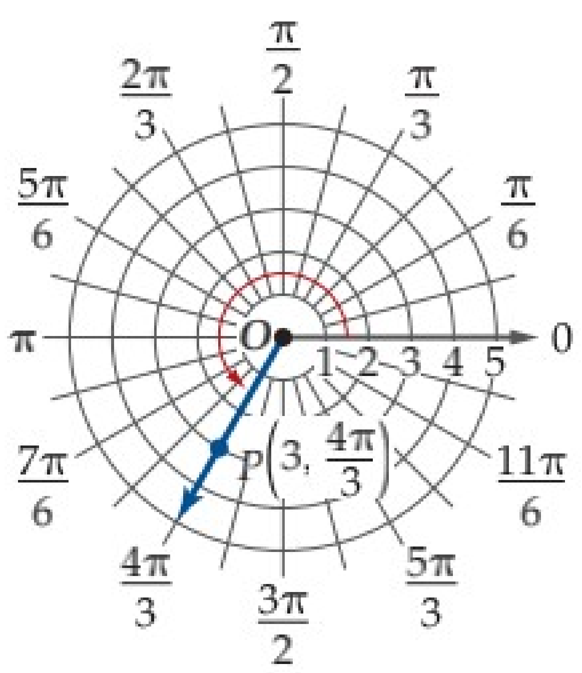
تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

مثال 2 تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

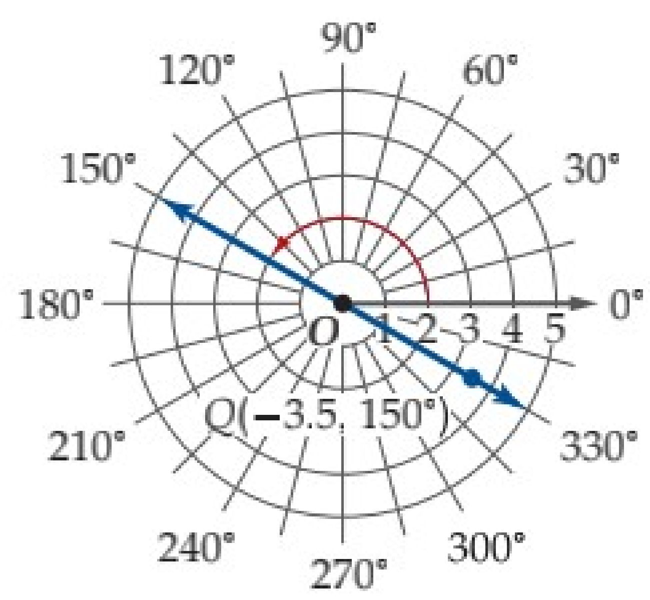
$P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$ (a

بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$، لذا عيِّن نقطةً P تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



$Q(-3.5, 150°)$ (b

بما أن $\theta = 150°$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $150°$، بحيث يكون المحور القطبي ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةَ Q تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



✓ تحقق من فهمك

مثِّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

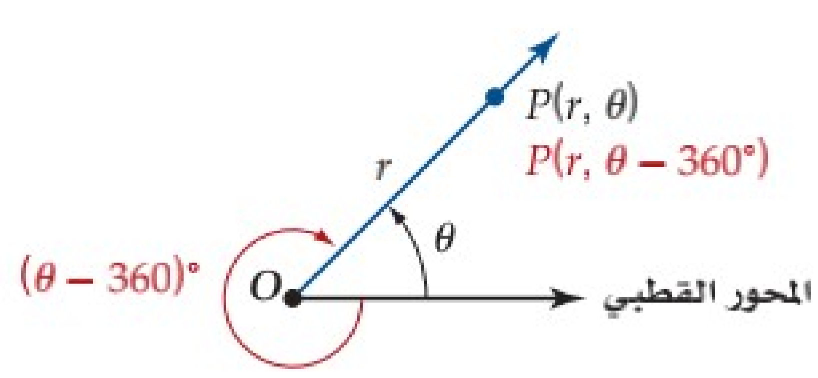
$R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ (2A $\quad$ $S(-2, -135°)$ (2B

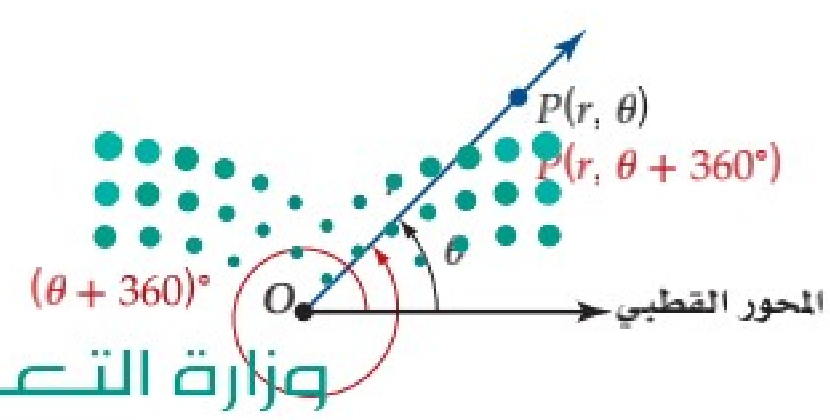
إرشادات للدراسة

القطب

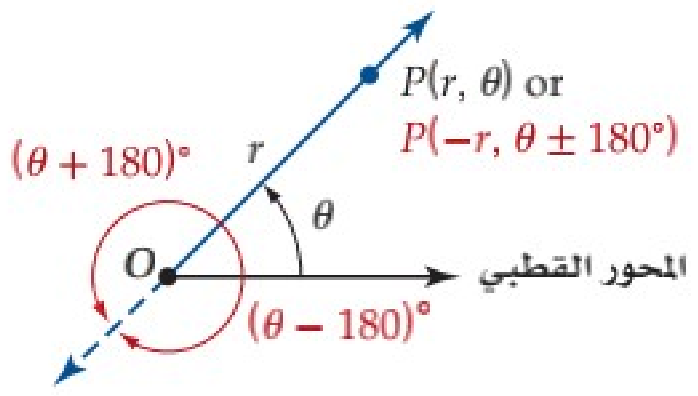
يمكن تمثيل القطب بالنقطة $(0, \theta)$، حيث θ أي زاوية.

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.





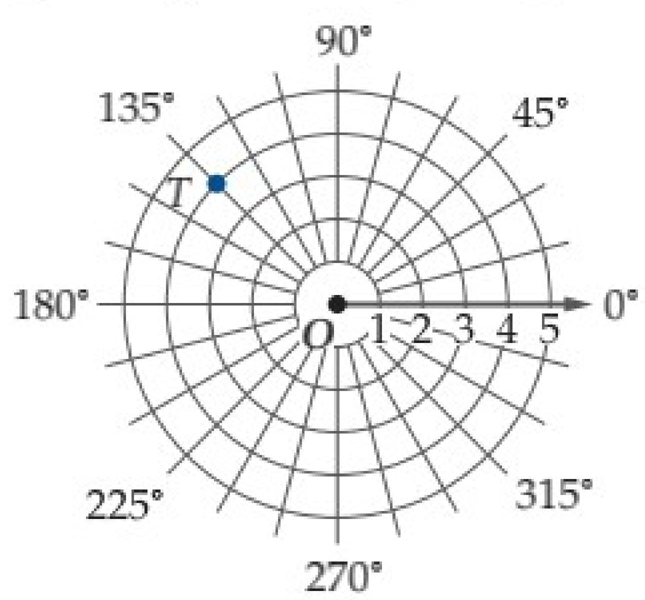
وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

مثال 3 تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



أحد الأزواج القطبية التي تمثّل النقطة T هو $(4, 135°)$.
وفيما يأتي الأزواج الثلاثة الأخرى:

$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$ اطرح $360°$ من θ
$= (4, -225°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$ ضع $-r$ بدلًا من r ، وأضف $180°$ إلى θ
$= (-4, 315°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$ ضع $-r$ بدلًا من r ، واطرح $180°$ من θ
$= (-4, -45°)$

تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \le \theta \le 360°$ ، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

3A) $(5, 240°)$ **3B)** $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبيةً**. فمثلًا : $r = 2\sin\theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = a$ ، و $y = b$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$ ، و $\theta = h$ ، حيث k, h عددان حقيقيان، يُعَدُّ أساسيًّا في نظام الإحداثيات القطبية.

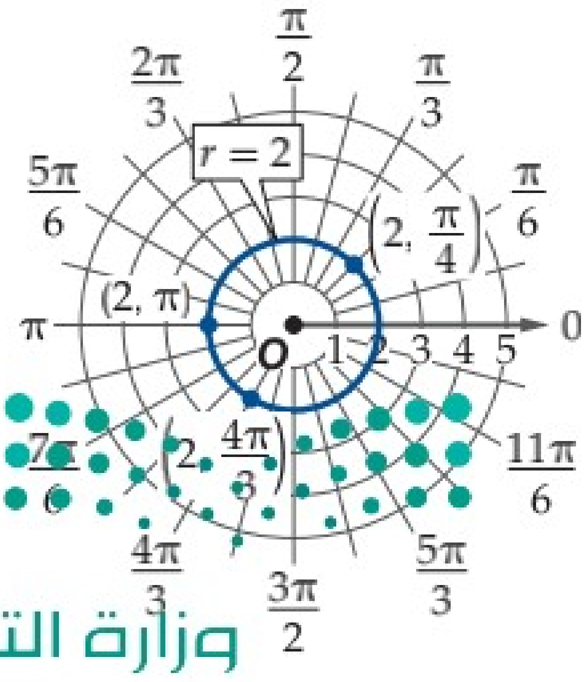
مثال 4 التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

a) $r = 2$

تتكون حلول المعادلة $r = 2$ من جميع النقاط على الصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي فمثلًا تعد النقاط $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ ، $(2, \pi)$ ، $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ حلولًا لها.

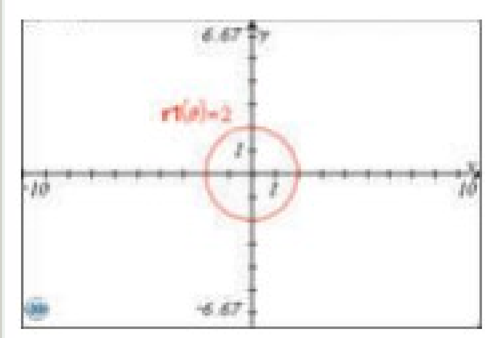
يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعُد 2 وحدة عن القطب. وعليه فإن المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل (القطب)، وطول نصف قطرها 2 كما في الشكل المجاور.



إرشاد تقني

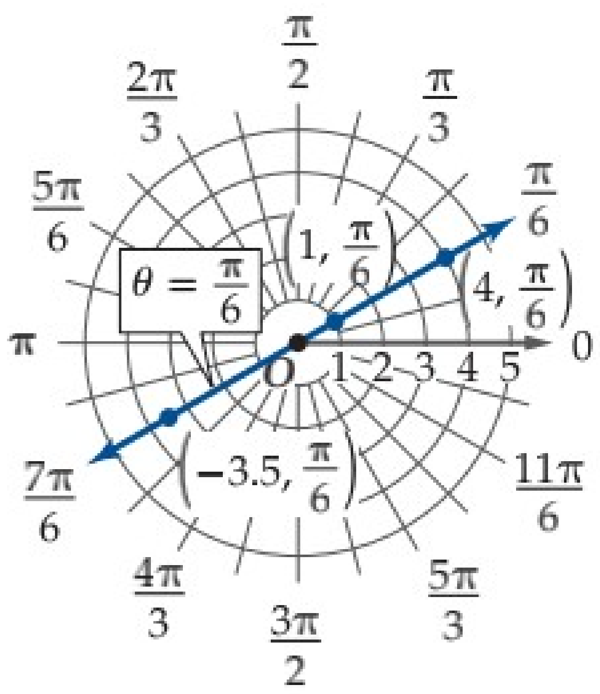
تمثيل المعادلات القطبية

لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ على الحاسبة البيانية TI-nspire، اضغط على أولًا ثم menu وَ 3: إدخال/ تحرير الرسم البياني وغيّر وضع الرسم إلى 4: قطبي، لاحظ أن المتغيّر التابع تغيّر من $f(x)$ إلى r ، والمتغيّر المستقل من x إلى θ . مثّل $r = 2$.



$\theta = \frac{\pi}{6}$ (b

تتكوّن حلول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ من جميع النقاط $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r أي عدد حقيقي مثل النقاط $\left(-3.5, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ ؛ وعليه فإن التمثيل البياني عبارة عن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي.



تحقق من فهمك

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

$r = 3$ **(4A**

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ **(4B**

يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

تنبيه!

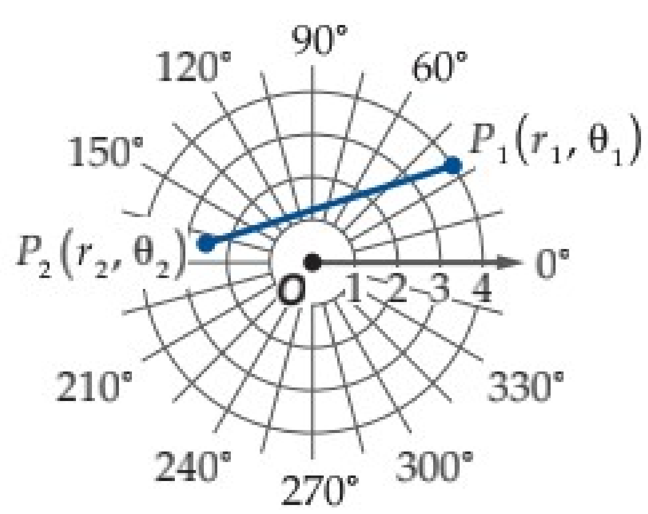
تهيئة الحاسبة البيانيّة

عند استعمال صيغة المسافة القطبية، تأكد من ضبط الحاسبة البيانية على وضعية الدرجات، أو الراديان بحسب قياسات الزوايا المعطاة.

مفهوم أساسي — المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



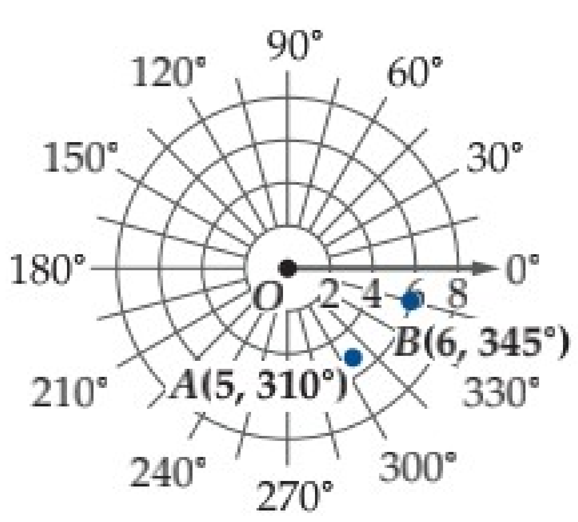
سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 56

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

حركة جوية: **يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$, $B(6, 345°)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.**

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

تقع الطائرة A على بُعد 5 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها °310 ، في حين تقع الطائرة B على بُعد 6 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها °345 ، كما في الشكل المجاور.



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi ، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

باستعمال الصيغة القطبية للمسافة، فإن.

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$ المسافة بالصيغة القطبية

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6) \cos(345° - 310°)} \approx 3.44$$ $(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$, $(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$

أي أن المسافة بين الطائرتين 3.44 mi تقريبًا؛ وعليه فإنهما لا تخالفان تعليمات الطيران.

الربط مع الحياة

لقد طوّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi .

تحقق من فهمك

5) **قوارب:** يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$ ، حيث r بالأميال.

(5A فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

(5B ما المسافة بين القاربين؟

تدرب وحل المسائل

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (المثالان 1, 2)

1) $R(1, 120°)$
2) $T(-2.5, 330°)$
3) $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$
4) $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$
5) $B(5, -60°)$
6) $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$
7) $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$
8) $C(-4, \pi)$
9) $M(0.5, 270°)$
10) $W(-1.5, 150°)$

11) **رماية:** يتكون هدف في منافسة للرماية من 10 دوائر متحدة المركز. ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 10 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب. افترض أن راميًا يستعمل هدفًا نصف قطره 120 cm، وأنه قد أطلق ثلاثة أسهم، فأصابت الهدف عند النقاط $(30, 240°)$, $(82, 315°)$, $(114, 45°)$. إذا كان لجميع الحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية. (المثالان 1, 2)

a) فمثِّل النقاط التي أصابها الرَّامي في المستوى القطبي.

b) ما مجموع النقاط التي حصل عليها الرَّامي؟

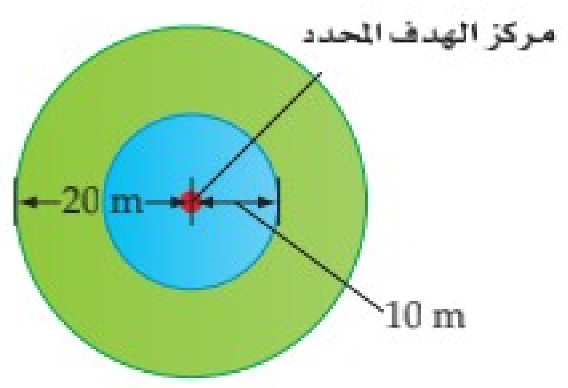
إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثِّل إحداثيين قطبيين للنقطة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

12) $(1, 150°)$
13) $(-2, 300°)$
14) $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$
15) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$
16) $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$
17) $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
18) $(2, -30°)$
19) $(-1, -240°)$

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: (مثال 4)

20) $r = 1.5$
21) $\theta = 225°$
22) $\theta = -\frac{7\pi}{6}$
23) $r = -3.5$

24) **القفز بالمظلات:** في مسابقة لتحديد دقة موقع الهبوط، يحاول مظلي الوصول إلى «مركز الهدف المحدد»؛ ومركز الهدف عبارة عن دائرة حمراء طول قطرها 2 m. كما يشمل الهدف دائرتين طولا نصفي قطريهما 10 m و 20 m . (مثال 4)



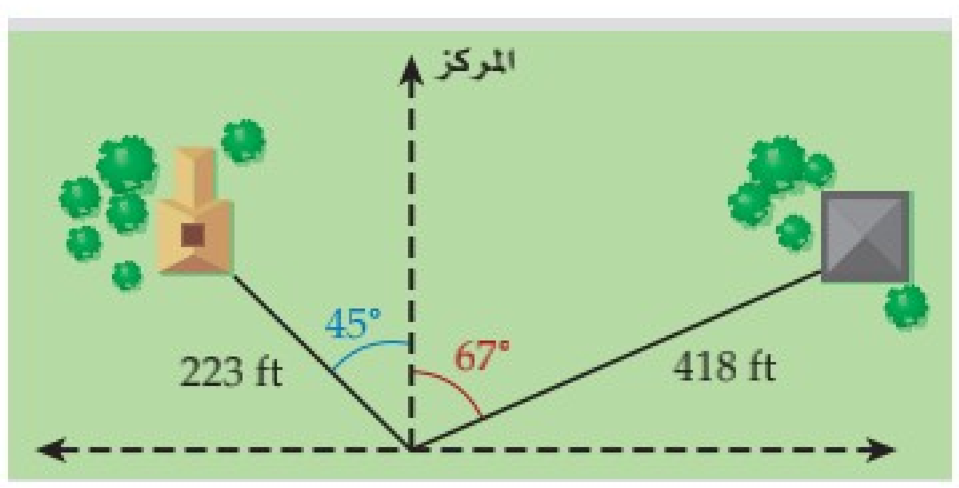
a) اكتب 3 معادلات قطبية تمثِّل حدود المناطق الثلاث للهدف.

b) مَثِّل هذه المعادلات في المستوى القطبي.

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي. (مثال 5)

25) $(2, 30°), (5, 120°)$
26) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$
27) $(6, 45°), (-3, 300°)$
28) $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$
29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$
30) $(4, -315°), (1, 60°)$
31) $(-2, -30°), (8, 210°)$
32) $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$
33) $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$
34) $(7, -90°), (-4, -330°)$
35) $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$
36) $(-5, 135°), (-1, 240°)$

37) **مسّاحون:** أراد مسَّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft، بزاوية 45° إلى يسار المركز ، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft، بزاوية 67° إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين. (مثال 5)



38) **مراقبة:** تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثِّل جزءًا من دائرة ، وتُحدَّدُ بالمتباينتين $0 \le r \le 40$, $-60° \le \theta \le 150°$ ، حيث r بالأمتار.

a) مثِّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها.

b) أوجد مساحة المنطقة (مساحة القطاع الدائري تساوي: $\frac{\text{قياس زاوية القطاع بالدرجات}}{360°}$ × مساحة الدائرة).

إذا كانت $0 \leq \theta \leq 180°$ ، فأوجد زوجًا آخر من الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي:

39) $(5, 960°)$

40) $\left(-2.5, \frac{15\pi}{6}\right)$

41) $\left(4, \frac{33\pi}{12}\right)$

42) $(1.25, -920°)$

43) $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$

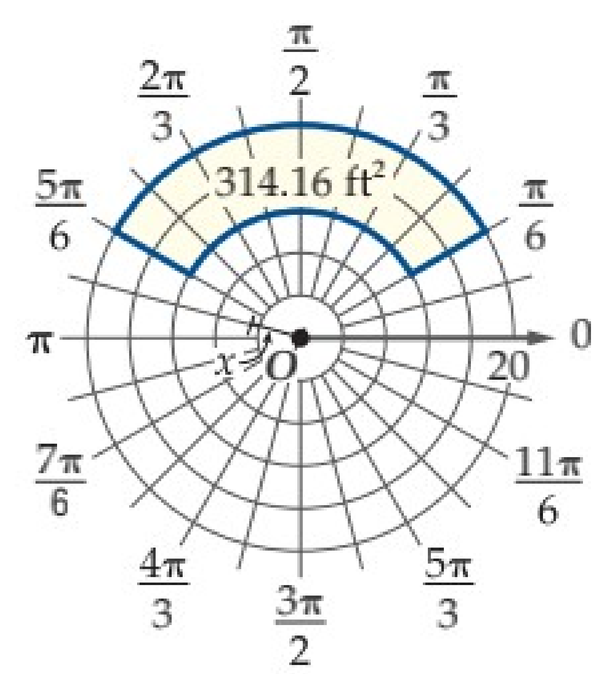
44) $(-6, -1460°)$

45) **مسرح:** يلقي شاعر قصيدة في مسرح. ويمكنُ وصف المسرح بمستوى قطبي، بحيث يقف الشاعر في القطب باتجاه المحور القطبي. افترض أن الجمهور يجلس في المنطقة المحددة بالمتباينتين $30 \leq r \leq 240$ ، $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ، حيث r بالأقدام.

a) مثِّل المنطقة التي يجلس بها الجمهور في المستوى القطبي.

b) إذا كان كل شخص بحاجة إلى $5\,ft^2$، فكم مقعداً يتسع له المسرح؟

46) **أمن:** يضيء مصباح مراقبة مثبت على سطح أحد المنازل منطقة على شكل جزء من قطاع دائري محدَّد بالمتباينتين $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ ، $x \leq r \leq 20$ ، حيث r بالأقدام. إذا كانت مساحة المنطقة $314.16\,ft^2$ ، كما هو مبين في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .



أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقِّق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $P_1 = (3, 35°), P_2 = (r, 75°), P_1P_2 = 4.174$

48) $P_1 = (5, 125°), P_2 = (2, \theta), P_1P_2 = 4, 0 \leq \theta \leq 180°$

49) $P_1 = (3, \theta), P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right), P_1P_2 = 5, 0 \leq \theta \leq \pi$

50) $P_1 = (r, 120°), P_2 = (4, 160°), P_1P_2 = 3.297$

51) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستقصي العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

a) **بيانيًا:** عيِّن $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، وارسم نظام الإحداثيات الديكارتية فوق المستوى القطبي بحيث تنطبق نقطة الأصل على القطب، والجزء الموجب من المحور x على المحور القطبي. وبالتالي سينطبق المحور y على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ارسم مثلثًا قائمًا بوصل A مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x .

b) **عدديًا:** احسب طولي ضلعي الزاوية القائمة باستعمال طول الوتر والمتطابقات المثلثية.

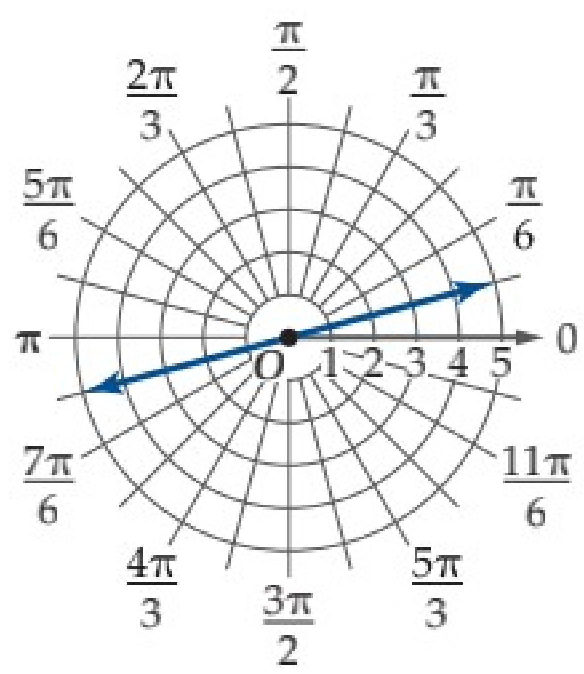
c) **بيانيًا:** عيِّن $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على المستوى القطبي نفسه، وارسم مثلثًا قائمًا بوصل B مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x ، واحسب طولي ضلعي الزاوية القائمة.

d) **تحليليًا:** كيف ترتبط أطوال أضلاع المثلث بالإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

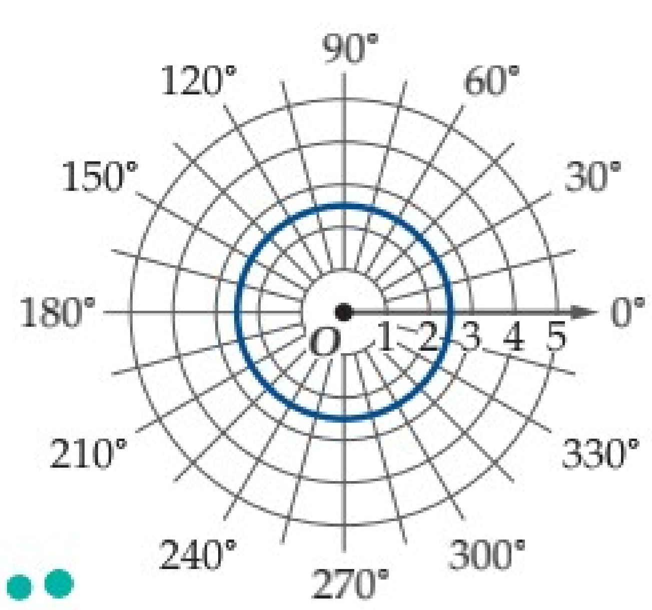
e) **تحليليًا:** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) ، والإحداثيات الديكارتية (x, y) .

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

52)



53)



مسائل مهارات التفكير العليا

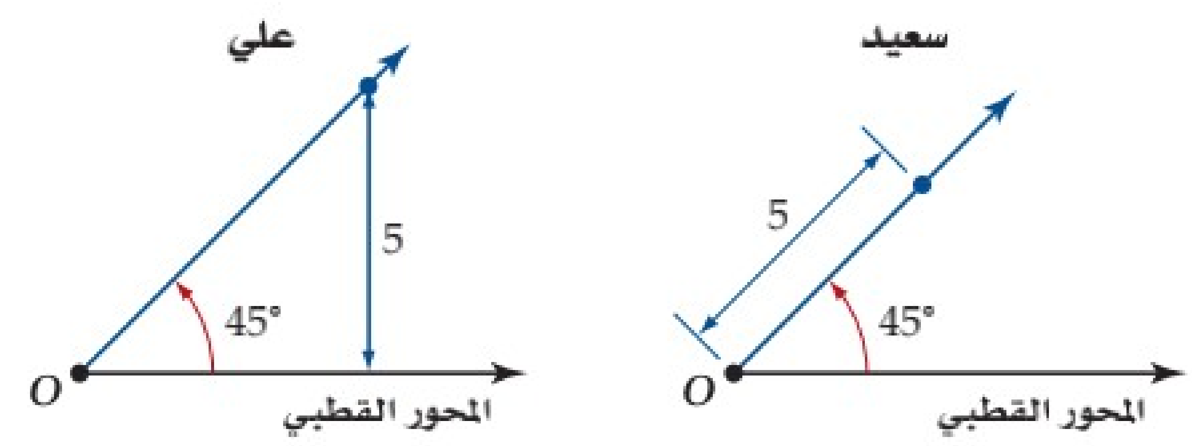
54) **تبرير:** وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1 ، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟

55) **تحدٍّ:** أوجد زوجًا مُرَتَّبًا من الإحداثيات القطبية ؛ لتمثيل النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-3, -4)$.

56) **برهان:** أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.
(**إرشاد:** استعمل قانون جيوب التمام).

57) **تبرير:** وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسّر هذا التغيّر.

58) **اكتشف الخطأ:** قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك.



59) **اكتب:** خمِّن سبب عدم كفاية الإحداثيات القطبية لتحديد موقع طائرة بشكل دقيق.

مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كان u , v متعامدين أولًا: (مهارة سابقة)

60) $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7\rangle$

61) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8\rangle$

62) $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0\rangle$

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 5, 1\rangle, \mathbf{c} = \langle 3, -6, 5\rangle$. فأوجد كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

63) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

64) $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u , v لكل مما يأتي: (مهارة سابقة)

65) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, -8\rangle$

66) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

67) $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, -6, 9\rangle$

أوجد إحداثيات مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية: (مهارة سابقة)

68) $x^2 + (y-1)^2 = 9$

69) $(x+1)^2 + y^2 = 16$

70) $x^2 + y^2 = 1$

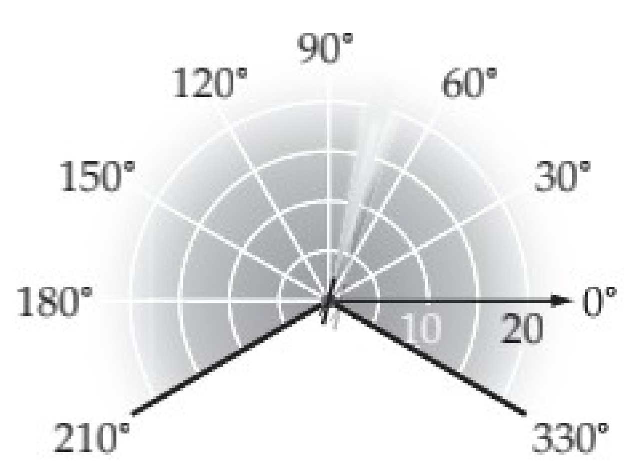
تدريب على اختبار

71) أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟

A $\langle 7, -10\rangle$ **C** $\langle -7, 10\rangle$

B $\langle -3, 10\rangle$ **D** $\langle -3, -10\rangle$

72) يستطيع رشاش ماء رشَّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينتين $0 \le r \le 20$, $-30° \le \theta \le 210°$ ، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟



A $821\ ft^2$ **C** $852\ ft^2$

B $838\ ft^2$ **D** $866\ ft^2$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات
Polar and Rectangular Forms of Equations

فيما سبق:

درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.

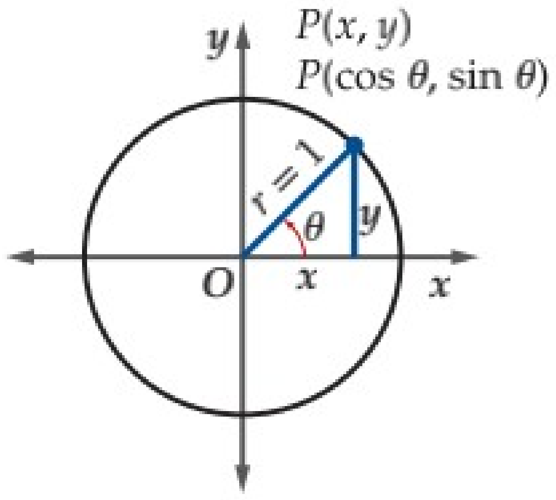
(الدرس 1 – 6)

والآن:

- أحوِّلُ بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوِّلُ المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

لماذا؟

يبعث مِجَس مُثبت إلى رجل آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r، والزاوية المتجهة θ. ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.



الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$؛ لأن

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة r, θ على النحو الآتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$r\sin\theta = y \quad , \quad r\cos\theta = x \qquad \text{اضرب في } r$$

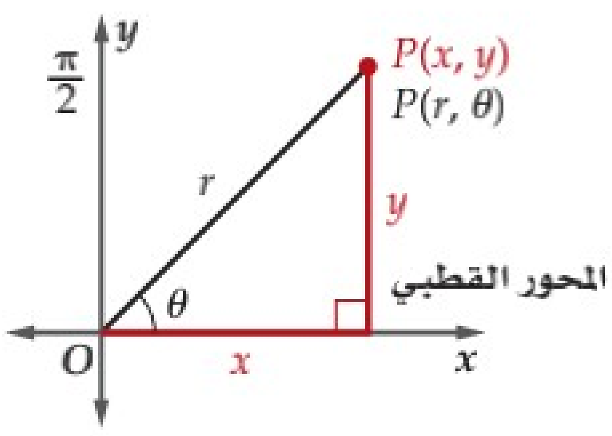
وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيّات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$y = r\sin\theta \quad , \quad x = r\cos\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



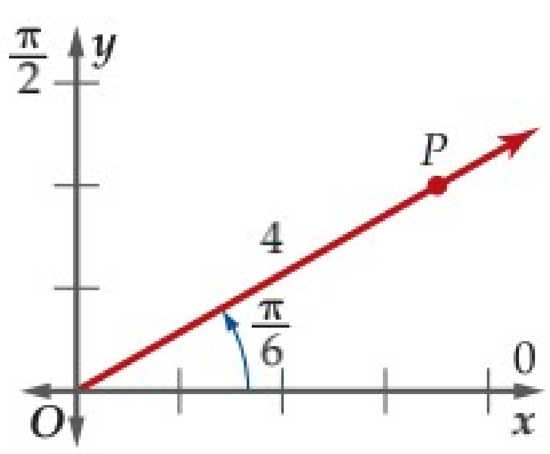
مثال 1 تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلِّ نقطة مما يأتي:

a) $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، فإن $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$.

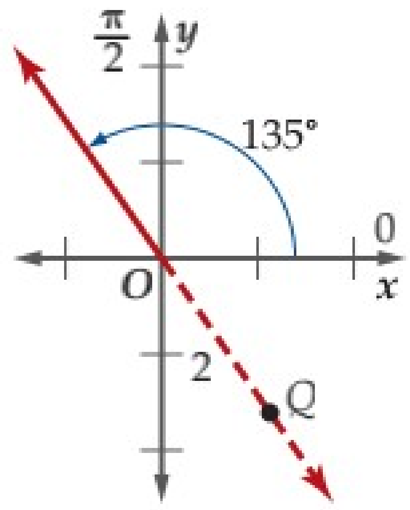
$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 4\cos\frac{\pi}{6}$	$r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4\sin\frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بسّط	$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3}$		$= 2$



أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو $(3.46, 2)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

b) $Q(-2, 135°)$

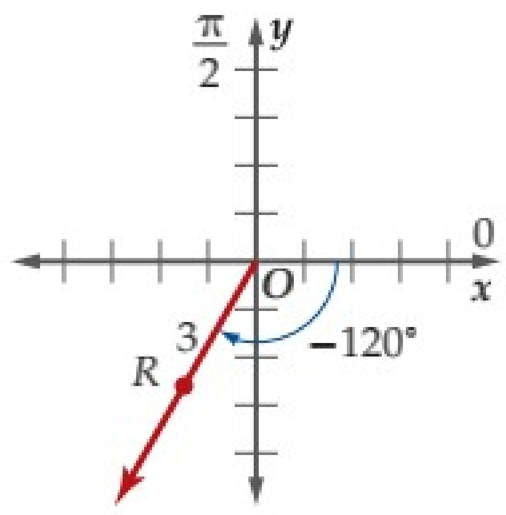


بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (-2, 135°)$ ، فإن $r = -2, \theta = 135°$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= -2\cos 135°$	$r = -2, \theta = 135°$	$= -2\sin 135°$
$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$	بسّط	$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو $(1.41, -1.41)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

c) $V(3, -120°)$



بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (3, -120°)$ ، فإن $r = 3, \theta = -120°$

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 3(\cos -120°)$	$r = 3, \theta = -120°$	$= 3\sin(-120°)$
$= 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$	بسّط	$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $(-1.5, -2.6)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

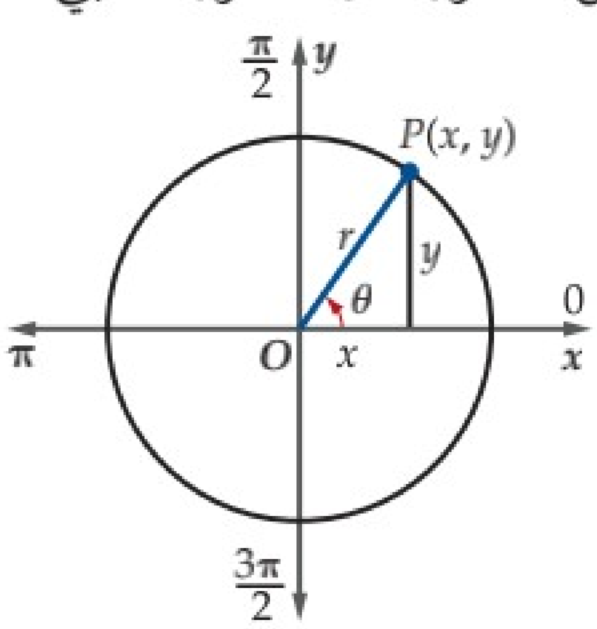
1A) $R(-6, -120°)$ **1B)** $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ **1C)** $T(-3, 45°)$

إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات

إن العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتها العملية المتبعة في إيجاد طول المتجه واتجاهه.

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة المتجهة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية المتجهة التي يصنعها r مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.



استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.

$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

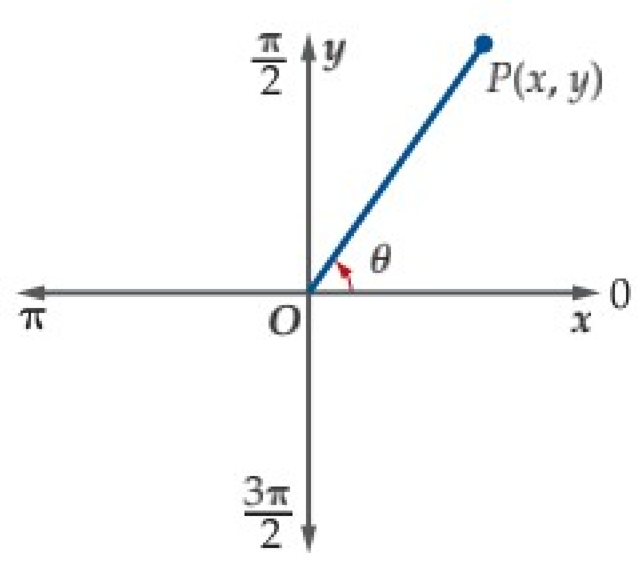
ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل، ولإيجاد الزاوية θ:

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ تعريف الظل

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ دالة معكوس الظل

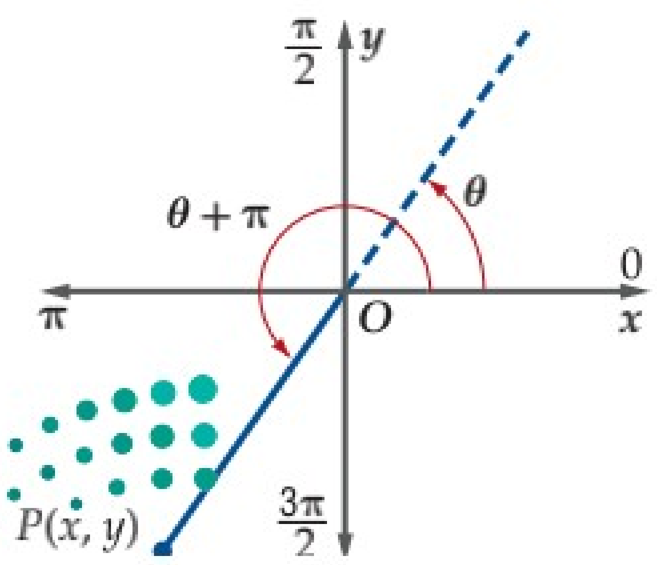
تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ أو $(-90°, 90°)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية.

وتُعطى قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أي عندما تكون $x > 0$ ، كما في الشكل **6.2.1** . وإذا كانت $x < 0$ ، فإن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث، لذا عليك إضافة π أو $180°$ (طول الدورة للدالة $y = \tan x$) إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل **6.2.2** .



$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

الشكل 6.2.1



$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$

الشكل 6.2.2

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

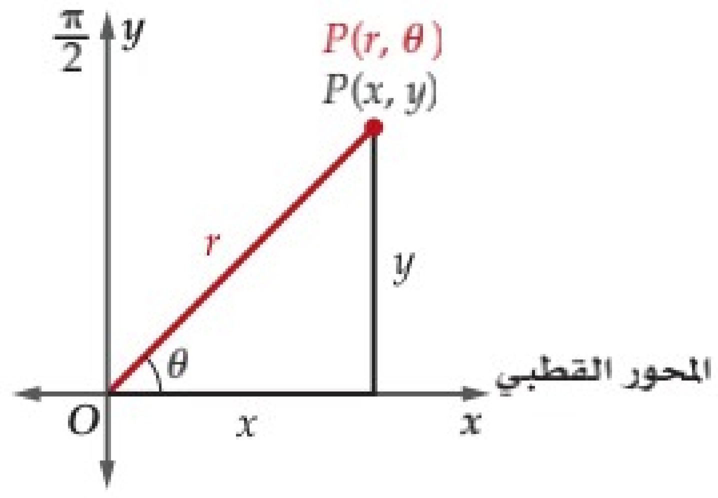
وعندما $x < 0$ فإن:

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$



تذكَّر أن هناك عددًا لانهائيًّا من أزواج الإحداثيات القطبية للنقطة، والتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية يعطي أحدها.

مثال 2 تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a) $S(1, -\sqrt{3})$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (1, -\sqrt{3})$ ، فإن $x = 1, y = -\sqrt{3}$.

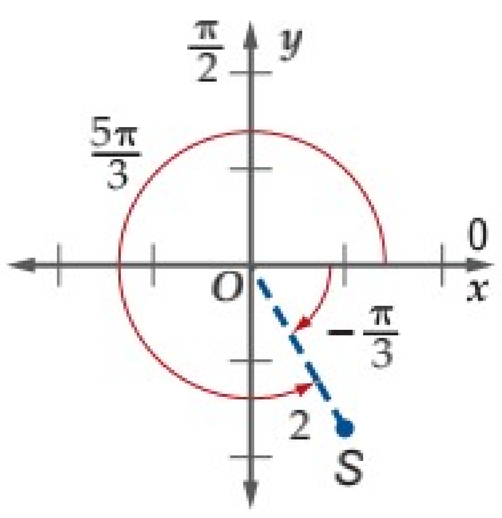
ولأن $x > 0$ ، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ؛ لإيجاد الزاوية θ .

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1, y = -\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بسِّط	$= -\frac{\pi}{3}$

أي أن $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة S.

ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة موجبة لـ θ ، وذلك بإضافة 2π .

فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ ، كما في الشكل المجاور.



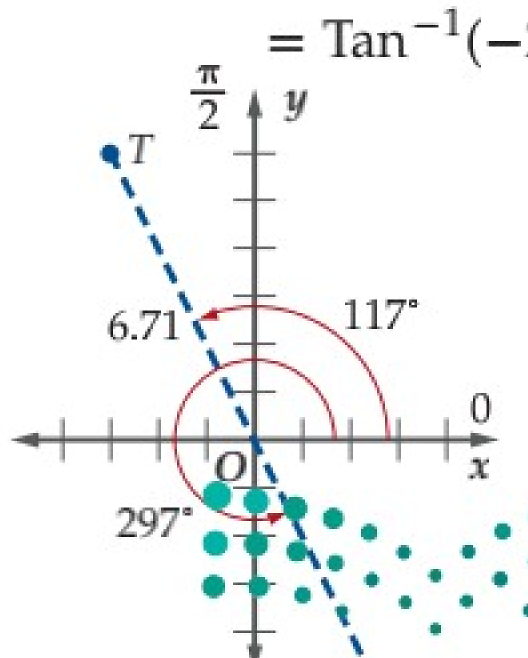
b) $T(-3, 6)$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (-3, 6)$ ، فإن $x = -3, y = 6$.

ولأن $x < 0$ ، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ ؛ لإيجاد الزاوية θ

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$y = 6, x = -3$	$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + 180°$
$= \sqrt{45} \approx 6.71$	بسِّط	$= \text{Tan}^{-1}(-2) + 180° \approx 117°$

أي أن $(6.71, 117°)$ تقريبًا هو زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة T ، ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة سالبة لـ r، فنحصل على $(-6.71, 117° + 180°)$ أو $(-6.71, 297°)$ ، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A) $V(8, 10)$ **2B)** $W(-9, -4)$

في بعض ظواهر الحياة الطبيعية، قد يكون من المفيد أن تحوّل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

مثال 3 من واقع الحياة — التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟»، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 5\cos 295°$	$r = 5, \theta = 295°$	$= 5\sin 295°$
≈ 2.11	بسّط	≈ -4.53

أي أن الإحداثيات الديكارتية لموقع الجسم هي $(2.11, -4.53)$ تقريبًا.

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3, 7)$، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{3^2 + 7^2}$	$x = 3, y = 7$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{7}{3}$
≈ 7.62	بسّط	$\approx 66.8°$

الإحداثيات القطبية لموقع الجسم هي $(7.62, 66.8°)$ تقريبًا؛ أي أن المسافة بين الجسم والرجل الآلي 7.62، وقياس الزاوية بينهما $66.8°$

الربط مع الحياة

صممت وكالة ناسا رجلًا آليًا وزنه 3400 باوند، وطوله 12 ft، وطول ذراعه 11 ft؛ لأداء بعض المهام في الفضاء الخارجي.

✓ تحقق من فهمك

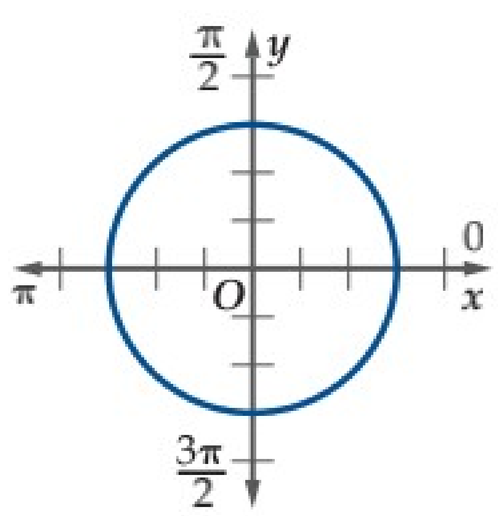
3) **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

المعادلات القطبية والديكارتية قد تحتاج في دراستك المستقبلية إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس؛ وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية المعقَّدة صورتها القطبية أسهل كثيرًا. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

المعادلة على الصورة الديكارتية
$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية
$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقَّدة صورتها الديكارتية أسهل كثيرًا، فالمعادلة القطبية $r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ صورتها الديكارتية هي $2x - 3y = 6$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r\cos\theta$، وعن y بـ $r\sin\theta$ ، ثم نبسِّط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

مثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2+y^2=16$

لإيجاد الصورة القطبيّة للمعادلة، عوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. ثم بَسِّط المعادلة.

$(x-4)^2+y^2=16$ المعادلة الأصلية

$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$ اضرب

$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$ اطرح 16 من الطرفين

$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$ ضع الحدود المربعة في طرف واحد

$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$ حلّل

$r^2(1)=8r\cos\theta$ متطابقة فيثاغورس

$r=8\cos\theta$ اقسم الطرفين على r حيث $r\neq 0$

b) $y=x^2$

$y=x^2$ المعادلة الأصلية

$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$ اضرب

$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$ اقسم الطرفين على $r\cos^2\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=r$ $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta\sec\theta=r$ المتطابقات النسبية ومتطابقات المقلوب

تحقق من فهمك

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2+(y-3)^2=9$

4B) $x^2-y^2=1$

إرشادات للدراسة

المتطابقات المثلثية
من المفيد أن تراجع المتطابقات المثلثية التي تعلمتها سابقًا؛ لمساعدتك على تبسيط الصورة القطبية للمعادلات الديكارتيّة.

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$$r^2=x^2+y^2,\ \tan\theta=\frac{y}{x},\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$	المعادلة الأصلية
$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$	خُذ tan الطرفين
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	اضرب الطرفين في x

b) $r = 7$

$r = 7$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 49$	ربّع الطرفين
$x^2 + y^2 = 49$	$r^2 = x^2 + y^2$

c) $r = -5 \sin \theta$

$r = -5 \sin \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = -5r \sin \theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = -5y$	$r^2 = x^2 + y^2 , y = r \sin \theta$
$x^2 + y^2 + 5y = 0$	أضف $5y$ إلى الطرفين

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

النقطتان $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$، والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$ ، فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5A) $r = -3$ 5B) $\theta = \frac{\pi}{3}$ 5C) $r = 3 \cos \theta$

تدرب وحل المسائل

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلِّ نقطة مما يأتي: (مثال 1)

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

3) $(5, 240°)$ 4) $(2.5, 250°)$

5) $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ 6) $(-13, -70°)$

7) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 8) $(-2, 270°)$

9) $(4, 210°)$ 10) $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

11) $(7, 10)$ 12) $(-13, 4)$

13) $(-6, -12)$ 14) $(4, -12)$

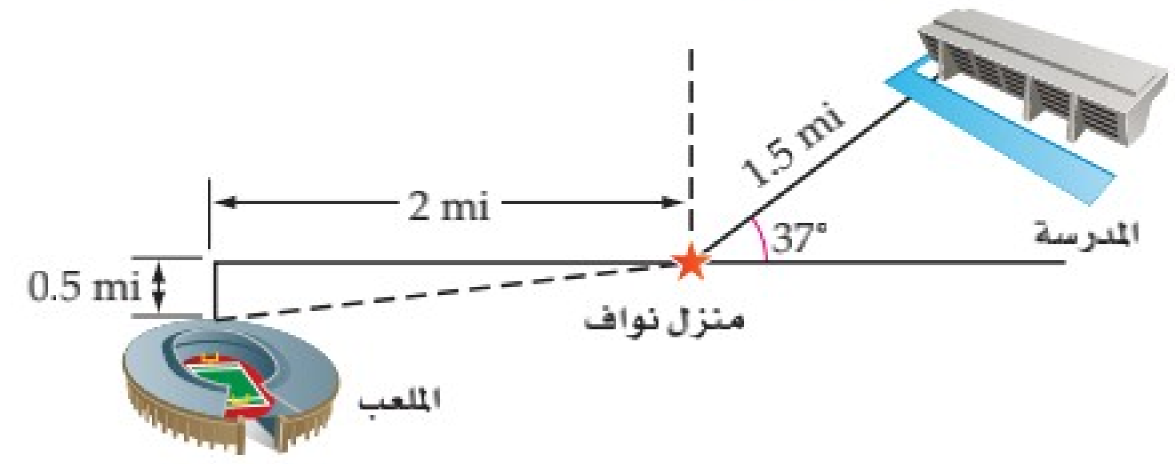
15) $(2, -3)$ 16) $(0, -173)$

17) $(1, 3)$ 18) $(-14, 14)$

19) $(52, -31)$ 20) $(3, -4)$

21) $(1, -1)$ 22) $(2, \sqrt{2})$

23) **مسافات:** إذا كانت مدرسة نواف تبعُد $1.5\,mi$ عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها $53°$ شمال الشرق كما في الشكل أدناه، فأجب عن الفرعين **a** ,**b**. (مثال 3)



a) إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال؛ كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟

b) إذا كان الملعب على بُعد $2\,mi$ غربًا، و $0.5\,mi$ جنوبًا، ومنزل نواف يمثِّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (مثال 4)

24) $x = -2$ 25) $(x+5)^2 + y^2 = 25$

26) $y = -3$ 27) $x = 5$

28) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 29) $x^2 + (y+3)^2 = 9$

30) $y = \sqrt{3}x$ 31) $x^2 + (y+1)^2 = 1$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية: (مثال 5)

32) $r = 3\sin\theta$ 33) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

34) $r = 10$ 35) $r = 4\cos\theta$

36) $\tan\theta = 4$ 37) $r = 8\csc\theta$

38) $r = -4$ 39) $\cot\theta = -7$

40) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 41) $r = \sec\theta$

42) **زلازل:** تُنمذَج حركة أمواج الزلازل بالمعادلة $r = 12.6\sin\theta$، حيث r مقاسه بالأميال. اكتب معادلة أمواج الزلازل على الصورة الديكارتية. (مثال 5)

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

43) $r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

44) $r = 10\csc\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$

45) $r = 3\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

46) $r = -2\sec\left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$

47) $r = 4\sec\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$

48) $r = \frac{5\cos\theta + 5\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

49) $r = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

50) $r = 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

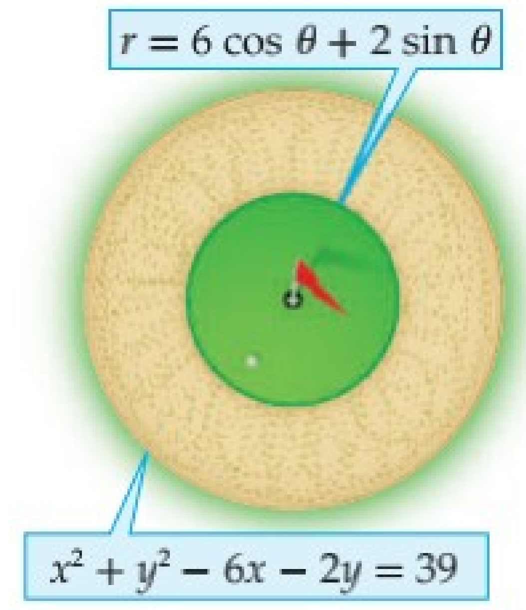
51) $6x - 3y = 4$

52) $2x + 5y = 12$

53) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

54) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$

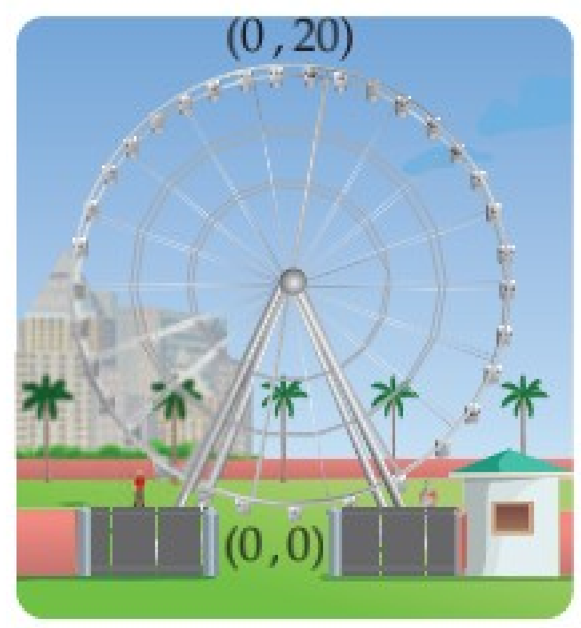
55) **جولف:** في أحد ملاعب الجولف، يحيط بثقب الهدف منطقة خضراء محاطة بمنطقة رملية، كما في الشكل أدناه. أوجد مساحة المنطقة الرملية على فرض أن الثقب يمثّل القطب لكلتا المعادلتين، وأن المسافات تُقاس بوحدة الياردة.



56) **عجلة دوَّارة:** إذا كانت إحداثيات أدنى نقطة في عجلة دوَّارة $(0, 0)$، وأعلى نقطة فيها $(0, 20)$.

a) فاكتب معادلة العجلة الدوَّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية.

b) اكتب المعادلة في الفرع **a** بالصيغة القطبية.



57) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تكتشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

a) **بيانيًا:** يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في المستوى الديكارتي بالنقطة (a, b). مَثِّل العدد المركب $6 + 8i$ في المستوى الديكارتي.

b) **عدديًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **a** .

c) **بيانيًا:** عزِّز إجابتك في الفرع **b** بتمثيل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

d) **بيانيًا:** مَثِّل بيانيًا العدد المركب $-3 + 3i$ في المستوى الديكارتي.

e) **بيانيًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **d**. ومَثِّل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

f) **تحليليًا:** أوجد العبارات الجبرية التي تبيّن كيفية كتابة العدد المركب $a + bi$ بالإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

58) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin \theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$، في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

59) **تحدٍّ:** اكتب معادلة الدائرة $r = 2a \cos \theta$ بالصورة الديكارتية، وأوجد مركزها وطول نصف قطرها.

60) **اكتب:** اكتب تخمينًا يبيِّن متى يكون تمثيل المعادلة على الصورة القطبيّة أسهل من تمثيلها على الصورة الديكارتية، ومتى يكون العكس صحيحًا.

61) **برهان:** استعمل $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ؛ لإثبات أن $r = x \sec \theta, r = y \csc \theta$ ، حيث $\sin \theta \neq 0, \cos \theta \neq 0$.

62) **تحدٍّ:** اكتب المعادلة:

$$r^2(4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + r(-8a \cos \theta + 6b \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

على الصورة الديكارتية. (**إرشاد:** فك الأقواس قبل تعويض قيم r^2 ، r . تمثّل المعادلة الديكارتية قطعًا مخروطيًّا).

مراجعة تراكمية

مَثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (مهارة سابقة)

63) $A(-2, 45°)$

64) $D(1, 315°)$

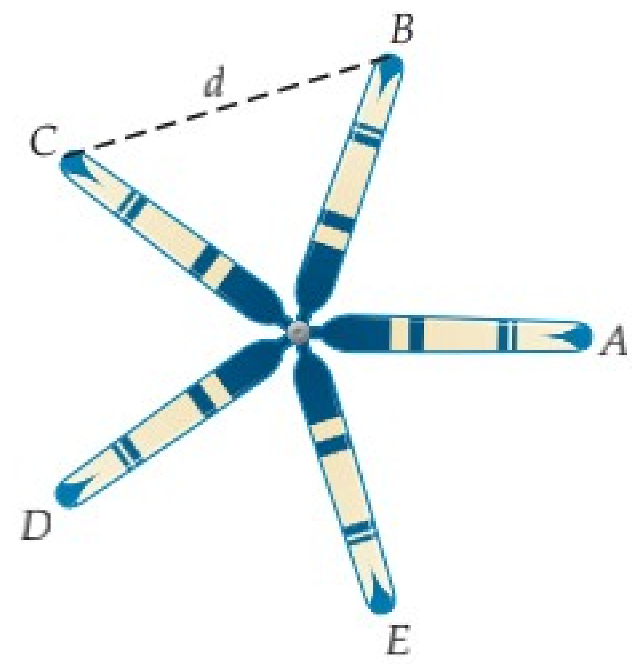
65) $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

أوجد الزاوية بين المتّجهين u , v في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

66) $\mathbf{u} = \langle 6, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7 \rangle$

67) $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6 \rangle$

68) **طائرات:** تتكون مروحة طائرة من 5 ريش، المسافة بين أطرافها المتتالية متساوية. ويبلغ طول كل ريشة منها 11.5 ft . (الدرس 1-6)



a) إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي °3، فاكتب زوجًا يمثّل الإحداثيات القطبية لطرف كل شفرة، بفرض أن مركز المروحة ينطبق على القطب.

b) ما المسافة d بين رأسي شفرتين متتاليتين؟

حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام. (مهارة سابقة)

69) $x^2 - 7x = -15$

70) $x^2 + 2x + 4 = 0$

71) $12x^2 + 9x + 15 = 0$

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي، وأوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (مهارة سابقة)

72) $(2, -15, 12), (1, -11, 15)$

73) $(-4, 2, 8), (9, 6, 0)$

74) $(7, 1, 5), (-2, -5, -11)$

تدريب على اختبار

75) أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟

A $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$

D $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

76) إذا كان $\mathbf{m} = \langle 5, -4 \rangle$ ، $\mathbf{n} = \langle -7, 3 \rangle$، فأيٌّ مما يأتي يمثّل $\mathbf{k}$ ، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$؟

A $\langle -17, 11 \rangle$

B $\langle -17, -5 \rangle$

C $\langle 17, -11 \rangle$

D $\langle -17, 5 \rangle$

77) ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y - 2)^2 = 4$؟

A $r = \sin \theta$

B $r = 2 \sin \theta$

C $r = 4 \sin \theta$

D $r = 8 \sin \theta$

78) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2 \rangle$؟

A $\langle -10, 10, 25 \rangle$

B $\langle -10, -10, 25 \rangle$

C $\langle -10, -10, -25 \rangle$

D $\langle -10, 10, -25 \rangle$

6-3

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر
Complex Numbers and De Moivre's Theorem

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحوِّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أجِدُ حاصلَ ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجِدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

المفردات:

المستوى المركب
complex plane

المحور الحقيقي
real axis

المحور التخيلي
imaginary axis

القيمة المطلقة لعدد مركب
absolute value of a complex number

الصورة القطبية
polar form

الصورة المثلثية
trigonometric form

المقياس
modulus

السعة
argument

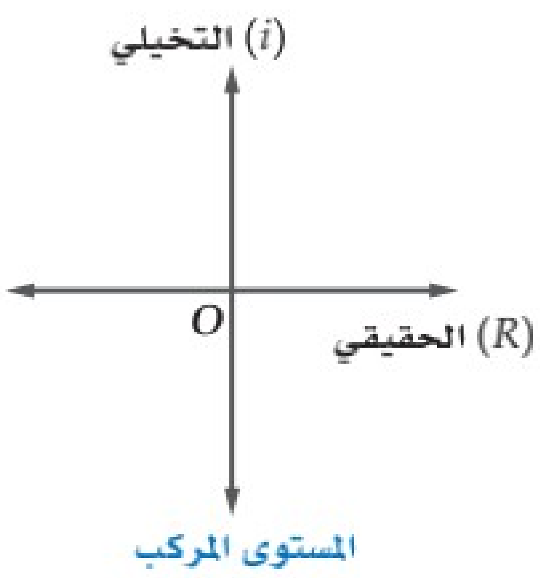
الجذور النونية للعدد واحد
nth roots of unity

لماذا؟

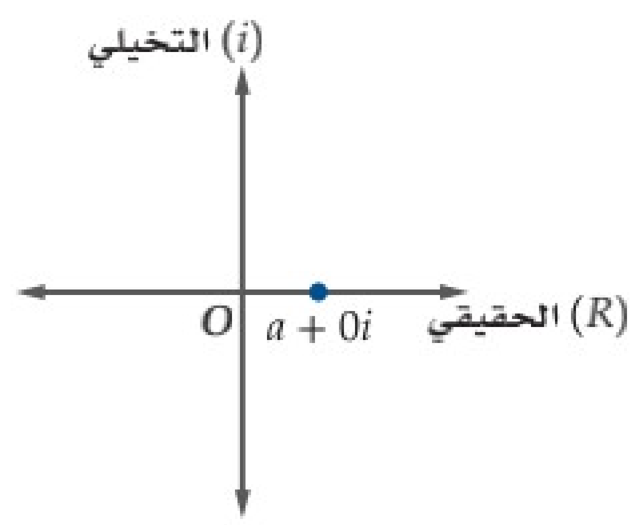
يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

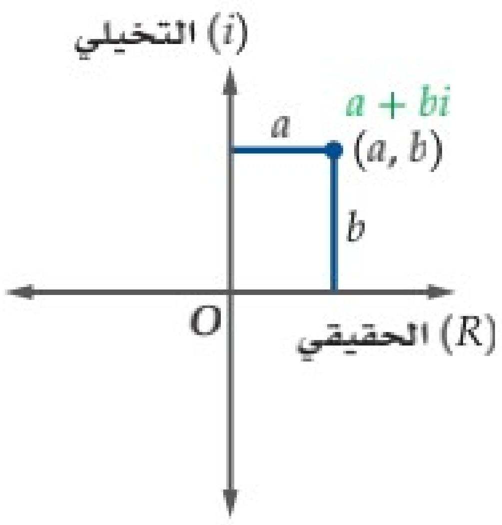
(**إرشاد:** استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi. ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i.



في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.



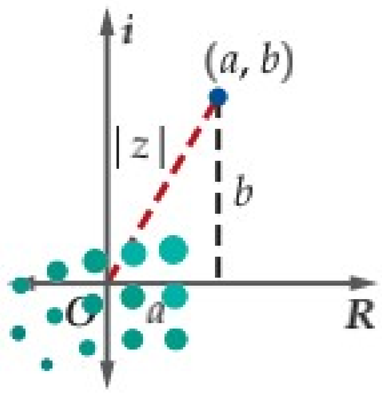


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي **القيمة المطلقة لعدد مركب**

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

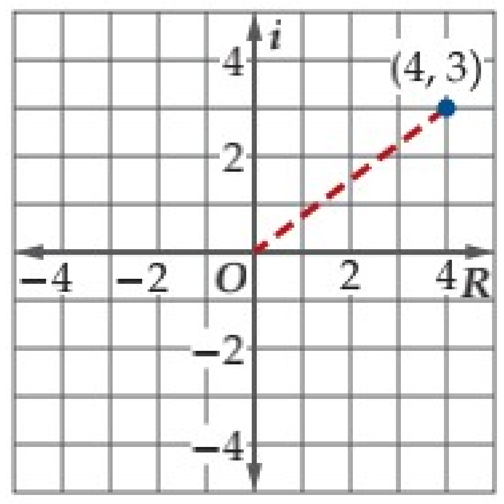


مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

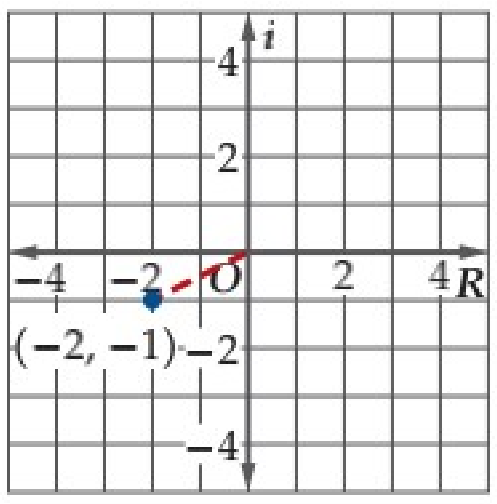
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4, b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بسِّط

القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي 5.

b) $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ $a = -2, b = -1$

$= \sqrt{5} \approx 2.24$ بسِّط

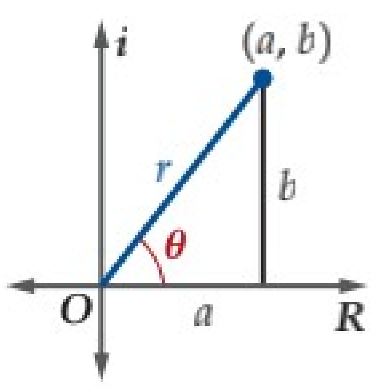
القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.

تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1A) $5 + 2i$ **1B)** $-3 + 4i$

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لإيجاد قيم a, b.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$r\cos\theta = a$ ، $r\sin\theta = b$ اضرب كل طرف في r

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a ، b ، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$ $b = r\sin\theta$ ، $a = r\cos\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ خُذ العامل المشترك

في حالة العدد المركب ، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

> **تنبيه!**
>
> **الصورة القطبية:** يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب

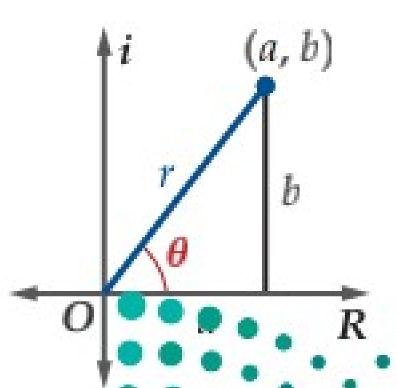
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$ ،

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



> **إرشادات للدراسة**
>
> **السعة:** كما في الإحداثيات القطبية ، فإن θ ليست وحيدةً ، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

مثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6 + 8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل، $a < 0$	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$
$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$	$a = -6, b = 8$	$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{8}{6}\right) + \pi \approx 2.21$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6 + 8i$ هي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$ تقريبًا.

b) $4 + \sqrt{3}i$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل، $a > 0$	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = \sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{19} \approx 4.36$	بسّط	≈ 0.41

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $4 + \sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

2A) $9 + 7i$

2B) $-2 - 2i$

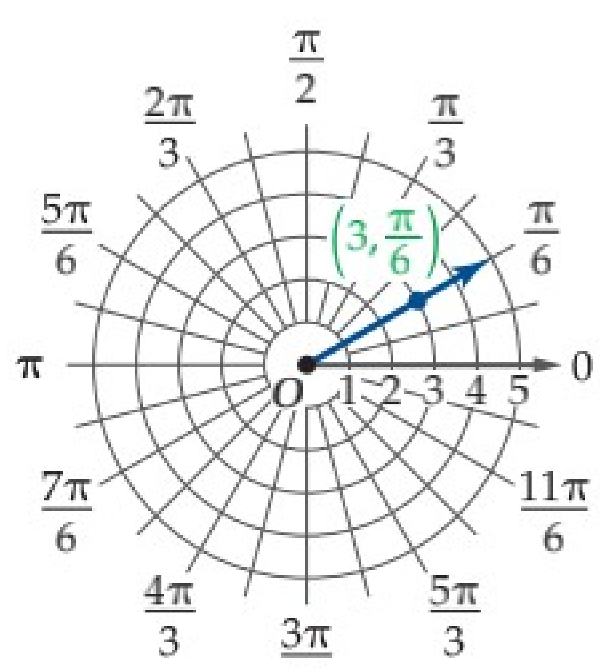
ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال (r, θ) كإحداثيات قطبية للعدد المركب. كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثّل العدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عَيّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بَسِّط.

$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$	الصورة القطبية
$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$	بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام
$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$	خاصية التوزيع

فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تحقق من فهمك

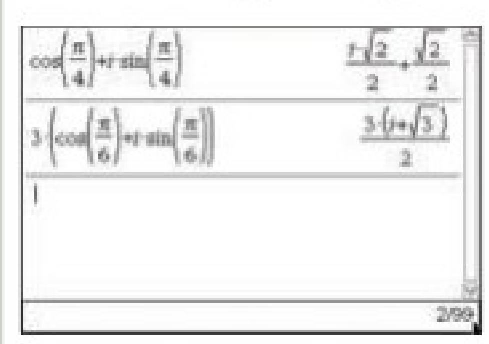
مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

3A) $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

3B) $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right)$

إرشاد تقني

تحويل الأعداد المركبة: يمكن تحويل عدد مركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية باستعمال الحاسبة البيانية من تطبيق الحاسبة، بفتح صفحة تطبيق الحاسبة وإدخال العبارة على الصورة القطبية، ثم اختيار enter. مع مراعاة إعدادات الآلة الحاسبة بحيث تُعطي الصورة القطبية



ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2

$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$ فك الأقواس

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$ جمّع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$ أخرج i عاملًا مشتركًا

$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

مفهوم أساسي **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها**

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

سوف تبرهن صيغة القسمة في التمرين 51

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.

مثال 4 **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية**

أوجد ناتج $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ بسّط

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$ أوجد قيم الجيب وجيب التمام

$= 4\sqrt{3} - 4i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ ، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3} - 4i$.

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(4B $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

كما تقدم في فقرة "لماذا؟"، فإنه يمكن استعمال قسمة الأعداد المركبة للتعبير عن العلاقات في الكهرباء.

مثال 5 من واقع الحياة قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي $150\ V$، وكانت معاوقتها Z تساوي Ω $(3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)])$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

اكتب العدد 150 على الصورة القطبية.

$$150 = 150\ (\cos 0 + j \sin 0) \qquad r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \text{Tan}^{-1} \frac{0}{150} = 0$$

حُلّ $I \cdot Z = V$ بالنسبة لـ I.

$$I \cdot Z = V \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

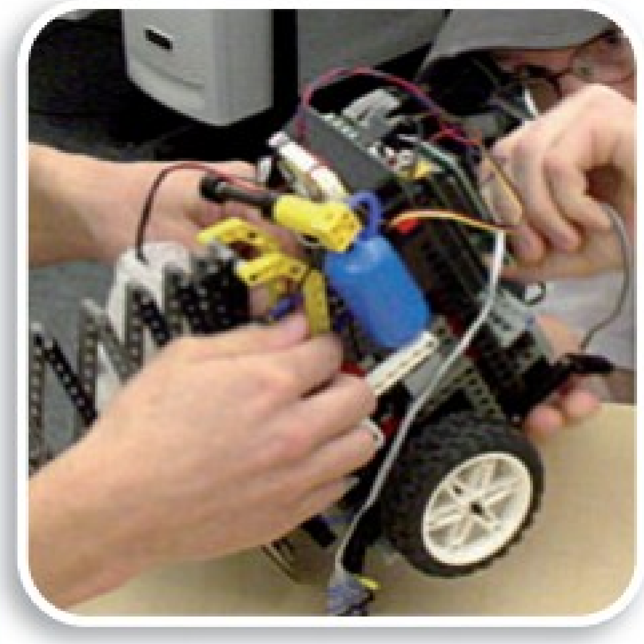
$$I = \frac{V}{Z} \qquad \text{اقسم كل طرف على } Z$$

$$I = \frac{150\ (\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]} \qquad V = 150 (\cos 0 + j \sin 0),\ Z = 3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$$

$$I = \frac{150}{3\sqrt{5}} \{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\} \qquad \text{صيغة القسمة}$$

$$I = 10\sqrt{5} (\cos 0.46 + j \sin 0.46) \qquad \text{بسّط}$$

أي أن شدة التيار تساوي $10\sqrt{5} (\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ أمبير تقريبًا.



الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.

✓ تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120\ V$، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية.

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

$$z \cdot z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta) \qquad \text{اضرب}$$

$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)] \qquad \text{صيغة الضرب}$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \qquad \text{بسّط}$$

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta) \qquad \text{اضرب}$$

$$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)] \qquad \text{صيغة الضرب}$$

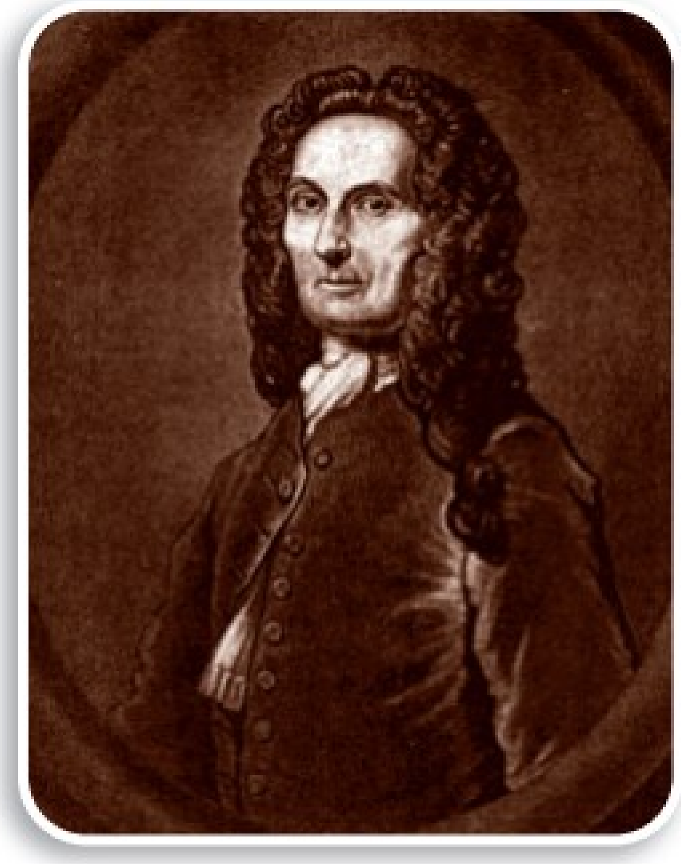
$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \qquad \text{بسّط}$$

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n.

ويمكن تلخيص ذلك على النحو الآتي:

نظرية — نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن: $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.



تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر

(1667 م - 1754 م)

رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances* . ويُعدّ ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.

مثال 6 نظرية ديموافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا: اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = 4\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1} \frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بسّط	$= \text{Tan}^{-1} \sqrt{3}$
$= 8$	بسّط	$= \frac{\pi}{3}$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^6 \quad \text{الصورة القطبية}$$

$$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \text{نظرية ديموافر}$$

$$= 262144(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \quad \text{بسّط}$$

$$= 262144(1 + 0i) \quad \text{أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام}$$

$$= 262144 \quad \text{بسّط}$$

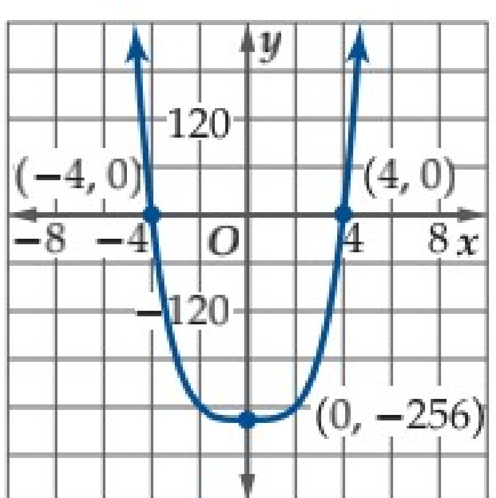
أي أن $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144$.

✓ تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

6A) $(1 + \sqrt{3}i)^4$ **6B)** $(2\sqrt{3} - 2i)^8$

يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما -4 ، 4. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4$ ، -4 ، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.



مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.

وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$ ، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$ وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

مثال 7 جذور العدد المركب

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4 - 4i$.

أولًا: اكتب $-4 - 4i$ على الصورة القطبية.

$$-4 - 4i = \sqrt{32}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$ $r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$, $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{-4}{-4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

والآن اكتب الصيغة للجذور الرباعية.

$$(\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)$$ $\theta = \frac{5\pi}{4}, n = 4, r^{\frac{1}{n}} = (\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}$

$$= \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right]$$ بسّط

ثانيًا: لإيجاد الجذور الرباعية، عوّض $k = 0, 1, 2, 3$.

$k = 0$
$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(0)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(0)\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) \approx 0.86 + 1.28i$$ الجذر الأول

$k = 1$
$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(1)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(1)\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right) \approx -1.28 + 0.86i$$ الجذر الثاني

$k = 2$
$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(2)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(2)\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) \approx -0.86 - 1.28i$$ الجذر الثالث

$k = 3$
$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(3)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{2(3)\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) \approx 1.28 - 0.86i$$ الجذر الرابع

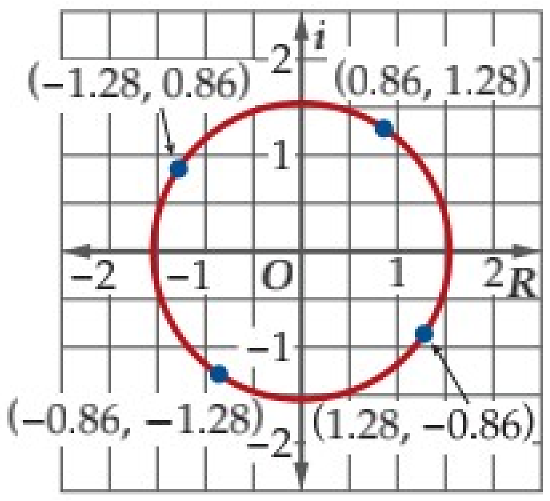
الجذور الرباعية للعدد $-4 - 4i$ هي $0.86 + 1.28i, -1.28 + 0.86i, -0.86 - 1.28i, 1.28 - 0.86i$

تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته ($\sqrt[8]{32} \approx 1.54$)، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.



تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

أولًا: اكتب 1 على الصورة القطبية.

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) \qquad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 , \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{1} = 0$$

والآن اكتب الصيغة للجذور الثمانيَّة.

$$1\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{8} + i \sin\frac{0 + 2k\pi}{8}\right) \qquad \theta = 0, n = 8, r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$$

$$= \cos\frac{k\pi}{4} + i \sin\frac{k\pi}{4} \qquad \text{بسِّط}$$

ثانيًا: افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1 .

$$k = 0 \qquad \cos\frac{(0)\pi}{4} + i \sin\frac{(0)\pi}{4}$$

$$= \cos 0 + i \sin 0 = 1 \qquad \text{الجذر الأول}$$

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1، ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.

$$\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{الجذر الثاني}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i \qquad \text{الجذر الثالث}$$

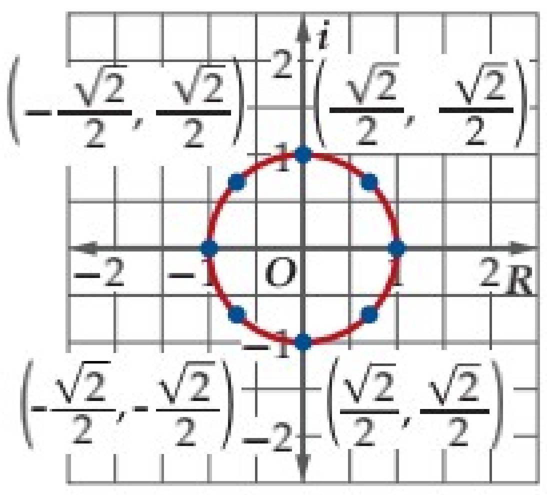
$$\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{الجذر الرابع}$$

$$\cos\pi + i \sin\pi = -1 \qquad \text{الجذر الخامس}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{الجذر السادس}$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i \qquad \text{الجذر السابع}$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{الجذر الثامن}$$



الجذور الثُّمانيَّة للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
كما هو موضح في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب
يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$. سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$ ، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

تدرب وحل المسائل

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة: (مثال 1)

1) $z = 4 + 4i$

2) $z = -3 + i$

3) $z = -4 - 6i$

4) $z = 2 - 5i$

5) $z = -7 + 5i$

6) $z = 8 - 2i$

7) **متجهات:** تُعطى القوة المؤثرة على جسم بالعلاقة $z = 10 + 15i$، حيث تُقاس كل مركبة للقوة بالنيوتن (N) . (مثال 1)

a) مَثِّل z كمتجه في المستوى المركب.

b) أوجد طول المتجه واتجاهه.

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (مثال 2)

8) $4 + 4i$

9) $-2 + i$

10) $4 - \sqrt{2}i$

11) $2 - 2i$

12) $4 + 5i$

13) $-1 - \sqrt{3}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3)

14) $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

15) $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$

16) $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

17) $\frac{3}{2}(\cos 360° + i \sin 360°)$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 5 , 4)

18) $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

19) $5(\cos 135° + i \sin 135°) \cdot 2(\cos 45° + i \sin 45°)$

20) $3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$

21) $2(\cos 90° + i \sin 90°) \cdot 2(\cos 270° + i \sin 270°)$

22) $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

23) $4\left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

24) $\frac{1}{2}(\cos 60° + i \sin 60°) \cdot 6(\cos 150° + i \sin 150°)$

25) $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

26) $5(\cos 180° + i \sin 180°) \cdot 2(\cos 135° + i \sin 135°)$

27) $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

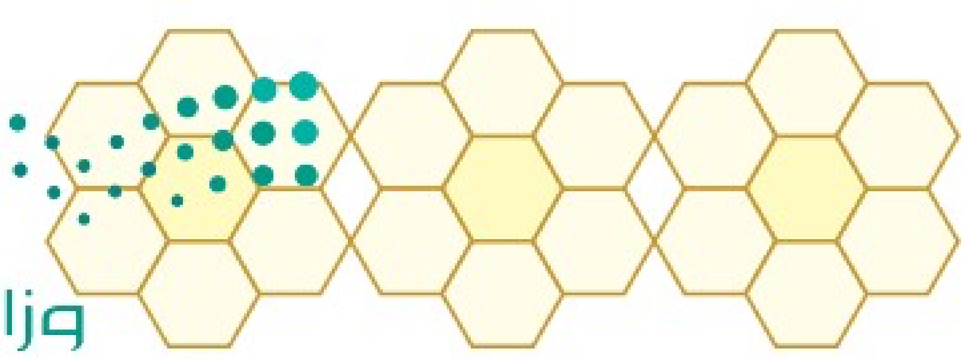
28) $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$

29) $\left[4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

30) $(2 + 3i)^{-2}$

31) $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

32) **تصميم:** يعمل سالم في وكالة للإعلانات. ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية منتظمة كما هو مبيّن أدناه. ويستطيع تعيين رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية. (مثال 7)



أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي: (المثالان 7, 8)

33) الجذور السداسية للعدد i

34) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$

35) الجذور التربيعية للعدد $-3 - 4i$

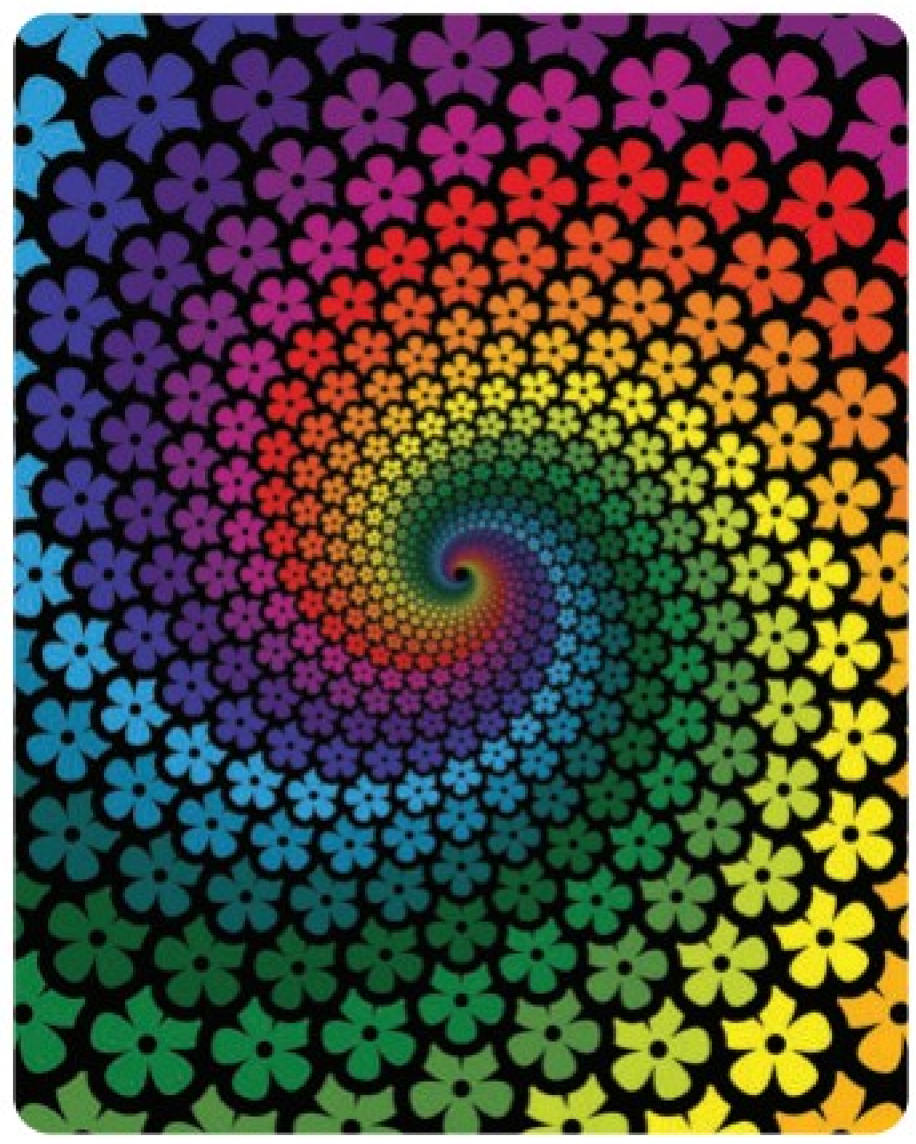
36) كهرباء: تُعطَى معاوقة أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي بالعبارة $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)\Omega$، وتُعطَى في الجزء الآخر من الدائرة بالعبارة $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)\Omega$.

a) حَوِّل كلًّا من العبارتين السابقتين إلى الصورة الديكارتية.

b) اجمع الناتجين في الفرع **a**؛ لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة.

c) حَوِّل المعاوقة الكلية إلى الصورة القطبية.

37) كسريات: الكسريات شكل هندسي يتكون من نمط مكرر بشكل مستمر، وتكون الكسريات ذاتية التشابه؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي، كما في الشكل أدناه.



في هذا السؤال سوف تنتج كسريات من خلال تكرار $f(z) = z^2$، حيث $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a) احسب $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$، حيث $z_1 = f(z_0)$، $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

b) مَثِّل كل عدد في المستوى المركب.

c) صِف النمط الناتج.

38) أوجد العدد المركب z إذا علمت أن $(-1-i)$ هو أحد جذوره الرباعية، ثم أوجد جذوره الرباعية الأخرى.

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:

39) $x^3 = i$

40) $x^4 = 81i$

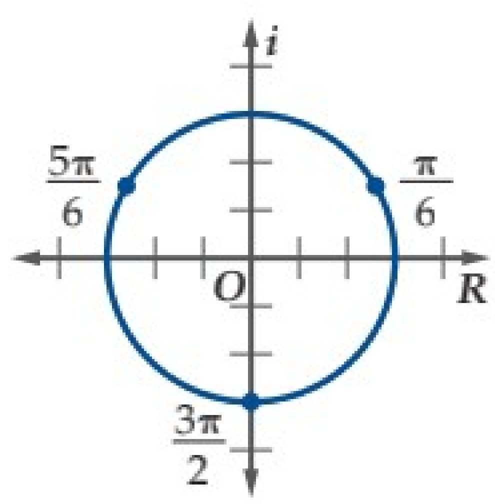
41) $x^3 + 1 = i$

مسائل مهارات التفكير العليا

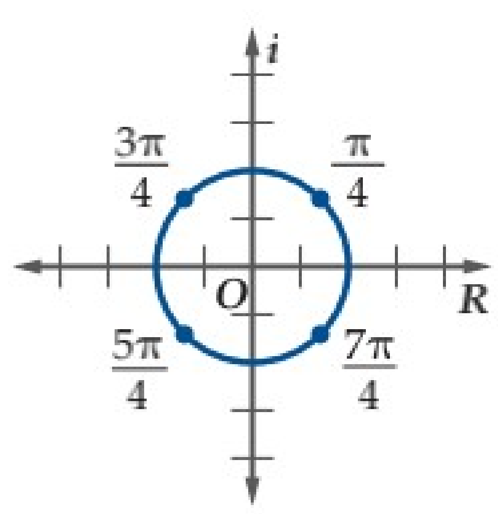
42) اكتشف الخطأ: يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمُ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك.

تحدٍّ: أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.

43)



44)



45) **برهان:** إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، حيث $r_2 \neq 0$ ، فأثبت أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$.

46) **تحدٍّ:** اكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$ مستعملًا نظرية ديموافر. إرشاد: أوجد قيمة $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ مرة باستعمال نظرية ديموافر، ومرة باستعمال مفكوك نظرية ذات الحدين.

47) **اكتب:** وضّح خطوات إيجاد الجذور النونية للعدد المركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث n عدد صحيح موجب.

مراجعة تراكمية

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: (الدرس 1-6)

48) $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

49) $P(4.5, -210°)$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (الدرس 2-6)

50) $(x-3)^2 + y^2 = 9$

51) $x^2 + y^2 = 2y$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي: (الدرس 1-6)

52) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$

53) $(1, -45°), (-5, 210°)$

حوّل الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي إلى إحداثيات ديكارتية: (الدرس 2-6)

54) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

55) $(4, 210°)$

تدريب على اختبار

56) أي مما يأتي يمثّل $\overrightarrow{AB}$ وطوله، إذا كان $A(3, 4, -2), B(-5, 2, 1)$ ؟

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ ؟

A 3.97

B 4.97

C 5.97

D 6.97

58) أي مما يأتي يمثّل تقريبًا الصورة القطبية للعدد المركب $20 - 21i$؟

A $29(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

B $29(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

C $32(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

D $32(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

دليل الدراسة والمراجعة

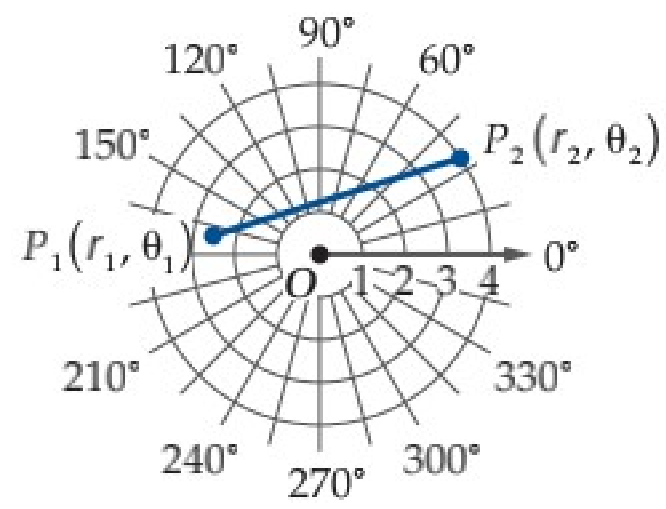
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 1-6)

- يُعَيِّن موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال المسافة المتجهة r والزاوية المتجهة θ.
- المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي هي:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الدرس 2-6)

- الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P(r, \theta)$ هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
- لتحويل إحداثيات نقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية استعمل المعادلات $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$، أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الدرس 3-6)

- الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- صيغة الضرب لعددين مركبين z_1، z_2 هي:
$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة القسمة لعددين مركبين z_1، z_2 هي:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)],\ r_2 \neq 0$
- تنص نظرية ديموافر على أنه إذا كانت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ هي الصورة القطبية لعدد مركب، فإن:
$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$،
حيث n عدد صحيح موجب.

الجذور المختلفة:

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

المفردات

- نظام الإحداثيات القطبية ص 268
- القطب ص 268
- المحور القطبي ص 268
- الإحداثيات القطبية ص 268
- المعادلة القطبية ص 270
- التمثيل القطبي ص 270
- المستوى المركب ص 284
- المحور الحقيقي ص 284
- المحور التخيلي ص 284
- القيمة المطلقة لعدد مركب ص 284
- الصورة القطبية ص 285
- الصورة المثلثيّة ص 285
- المقياس ص 285
- السعة ص 285
- الجذور النونيّة للعدد واحد ص 291

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) ________ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة.

2) المستوى الذي يحوي محوراً يمثِّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو ________ .

3) يُحدِّدُ موقع نقطة في ________ باستعمال المسافة المتجه من نقطة ثابتة إلى النقطة نفسها، وزاوية متجهة من محور ثابت.

4) ________ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب على الصورة: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ ________ .

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ ________ .

7) ________ هو اسم آخر للمستوى المركب.

8) ________ هو نصف مستقيم ممتد من القطب، ويكون أفقيًّا باتجاه اليمين.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

6-1 الإحداثيات القطبية (الصفحات 268 - 274)

مَثِّل كلّ نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

9) $W(-0.5, -210°)$

10) $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$

11) $Y(4, -120°)$

12) $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مَثِّل كلّ معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

13) $\theta = -60°$

14) $r = \frac{9}{2}$

15) $r = 7$

16) $\theta = \frac{11\pi}{6}$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

17) $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$

18) $(-3, 60°), (4, 240°)$

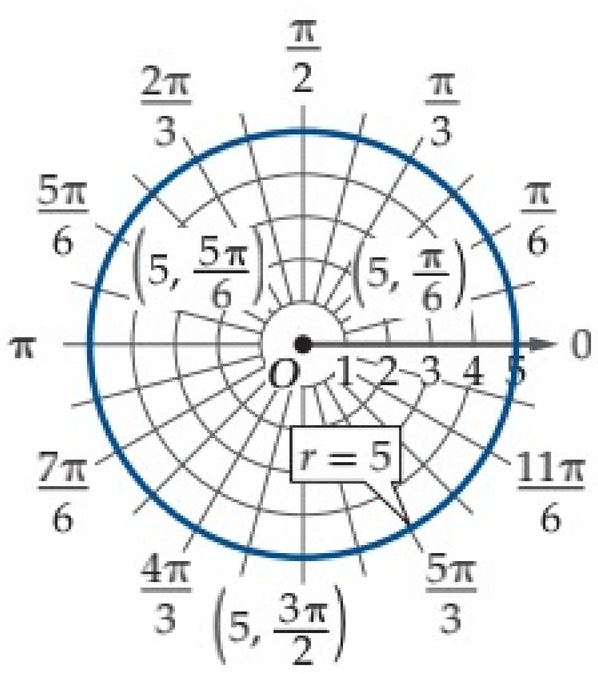
19) $(-1, -45°), (6, 270°)$

20) $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

مثال 1

مَثِّل المعادلة $r = 5$ بيانيًّا في المستوى القطبي.

حلول المعادلة $r = 5$ هي الأزواج المرتبة $(5, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي. ويتكون التمثيل من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب، لذا فإن التمثيل هو دائرة مركزها القطب، وطول نصف قطرها 5.



6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الصفحات 275 - 283)

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

21) $(-1, 5)$

22) $(3, 7)$

23) $(1, 2)$

اكتب كلّ معادلة على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني:

24) $r = 5$

25) $r = -4 \sin \theta$

26) $r = 6 \sec \theta$

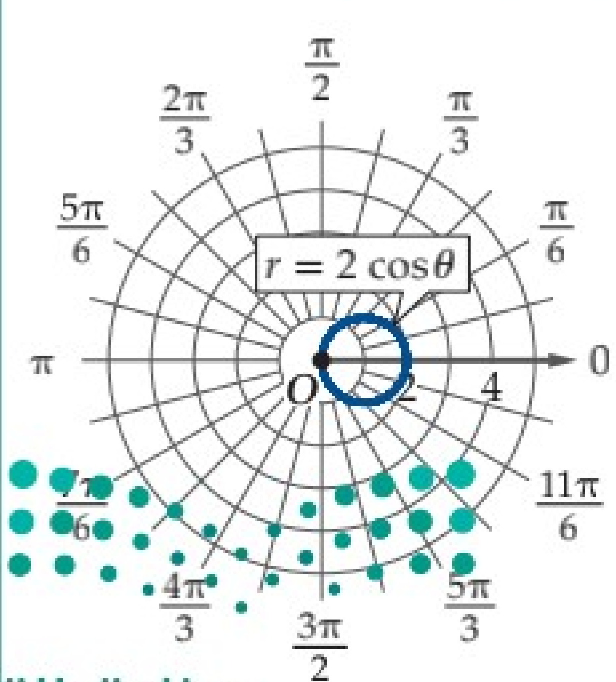
27) $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 2

اكتب المعادلة $r = 2 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية، ثم حدِّد نوع تمثيلها البياني.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = 2x$	$x = r \cos \theta$ ، $r^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من الطرفين

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-1)^2 + y^2 = 1$، وهي معادلة دائرة مركزها $(1, 0)$ وطول نصف قطرها 1.



مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمتهُ المطلقة:

(28 $z = 3 - i$ (29 $z = 4i$

(30 $z = -4 + 2i$ (31 $z = 6 - 3i$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

(32 $3 + \sqrt{2}i$ (33 $-5 + 8i$

(34 $-4 - \sqrt{3}i$ (35 $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

(36 $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(37 $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(38 $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(39 $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

(40 $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(41 $8(\cos 225° + i\sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i\sin 120°)$

(42 $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

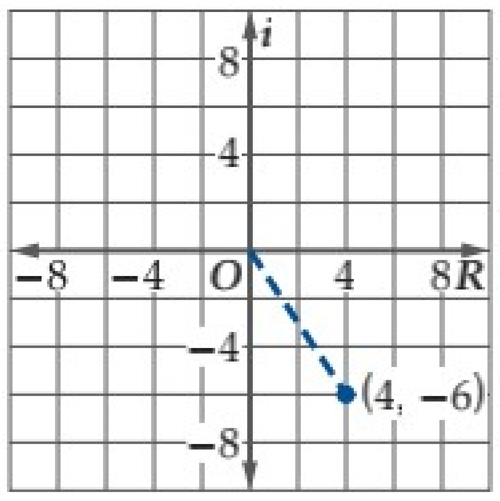
(43 $6(\cos 210° + i\sin 210°) \div 3(\cos 150° + i\sin 150°)$

(44 أوجد قيمة $(\sqrt{2} + 3i)^4$ بالصور القطبية، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.

(45 أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $1 + i$.

مثال 3

مَثِّل $4 - 6i$ في المستوى المركب، ثم عبِّر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المقياس.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة التحويل

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$ $a = 4, b = -6$

أوجد السعة.

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ صيغة التحويل

$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$ $a = 4, b = -6$

≈ -0.98 بسِّط

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 - 6i$ هي:

$2\sqrt{13}\,[(\cos(-0.98) + i\sin(-0.98))]$ تقريبًا.

مثال 4

أوجد ناتج $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم حوِّله إلى الصورة الديكارتية.

$3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= (3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= 15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ بسِّط

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

$15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ الصورة القطبية

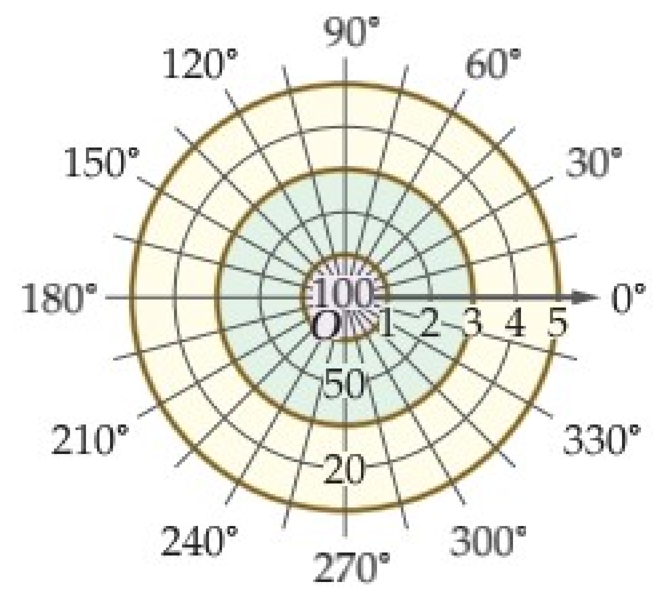
$= 15[-0.26 + i(-0.966)]$ أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام

$= -3.9 - 14.5i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة الديكارتية لناتج الضرب $-3.9 - 14.5i$ تقريبًا.

تطبيقات ومسائل

46) ألعاب: قُسّمت لوحة السهام إلى 3 مناطق كما هو موضّح في الشكل أدناه، بحيث يحصل اللاعب على 100 نقطة عند إصابته المنطقة القريبة من القطب، وعلى 50 نقطة عند إصابته المنطقة المتوسطة، و 20 نقطة عند إصابته المنطقة البعيدة. **(الدرس 6-1)**



a) إذا أصاب اللاعب النقطة $(3.5, 165°)$ ، فما عدد النقاط التي يحصل عليها؟

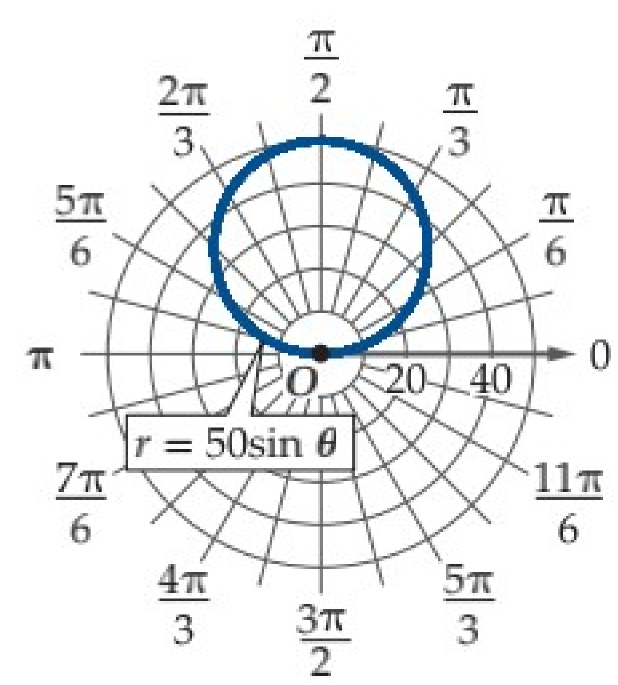
b) حدِّد موقعين، بحيث يحصل اللاعب على 50 نقطة عند إصابة أيٍ منهما؟

47) حدائق: تستعمل شركة عناية بالحدائق رشاشًا قابلًا للتعديل، ويستطيع الدوران $360°$ ، ويروي منطقة دائرية طول نصف قطرها 20 ft . **(الدرس 6-1)**

a) مثِّل المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها في المستوى القطبي.

b) أوجد مساحة المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها، إذا ضُبط ليدور في الفترة $-30° \leq \theta \leq 210°$.

48) عجلة دوّارة: يمكن تمثيل مسار العجلة الدوّارة في الشكل أدناه بالمعادلة $r = 50 \sin \theta$ ، حيث r بالقدم. **(الدرس 6-2)**



a) عيِّن الإحداثيين القطبيين لموقع راكب إذا علمت أنه يقع عند $\theta = \frac{\pi}{12}$. (قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر).

b) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين لموقع الراكب مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

c) إذا وقع القطب على سطح الأرض، فما ارتفاع ذلك الراكب مقرّبًا إلى أقرب قدم؟

49) كهرباء: تُصمَّم معظم الدوائر الكهربائية لتتحمل فرق جهدٍ قدره 220V.

للفرعين **a , b** استعمل المعادلة $V = I \cdot Z$ ، حيث فرق الجهد V بالفولت، والمعاوقة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). **(الدرس 6-3)**

a) إذا كانت شدة التيار المار بالدائرة $(2 + 5\boldsymbol{j})$ أمبير، فأوجد المعاوقة.

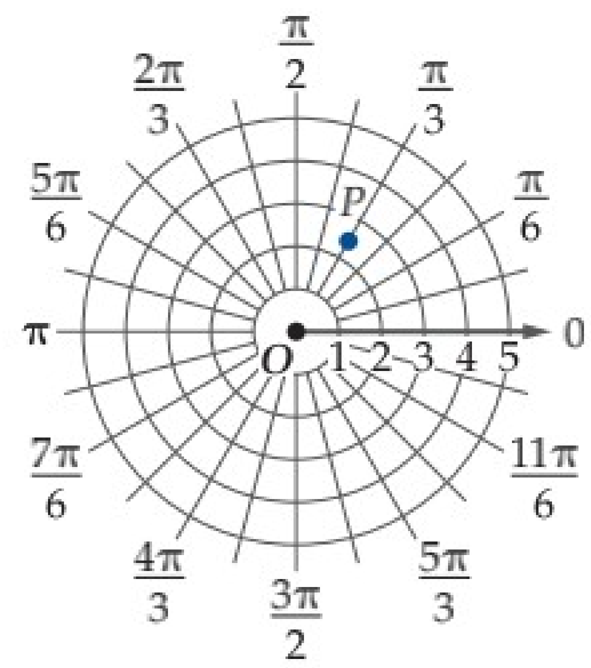
b) إذا كانت معاوقة الدائرة $\Omega(1 - 3\boldsymbol{j})$ ، فأوجد شدة التيار.

50) تحويل جوكوسكي (Jowkoski): يُعيِّن تحويل جوكوسكي لكل عدد مركب $z = r\,(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$ عددًا مركبًا w يُعطى بالصيغة $w = z + \frac{1}{z}$. أوجد صورة العدد المركب $z = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ وفق هذا التحويل. **(الدرس 6-3)**

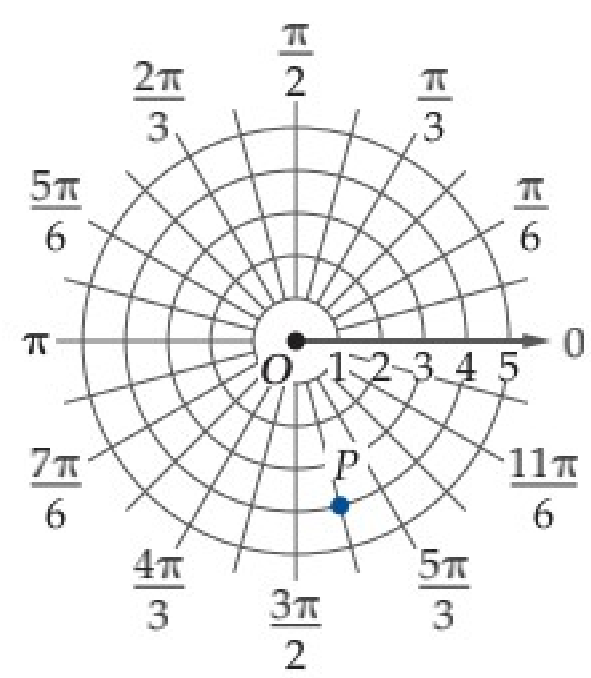
اختبار الفصل

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة يمثّل كل منها إحداثيات قطبية للنقطة P في كل من التمثيلين 2 ,1 ، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(1



(2



مَثِّل بيانيًّا في المستوى القطبي كلًّا من المعادلات الآتية:

3) $\theta = 30°$

4) $r = 1$

5) $r = 2.5$

6) $\theta = \frac{5\pi}{3}$

7) **رادار:** يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة $(66, 115°)$ ، حيث r بالأميال.

a) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل.

b) إذا وُجدت طائرة عند نقطة إحداثياتها الديكارتية $(-75, 50)$، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

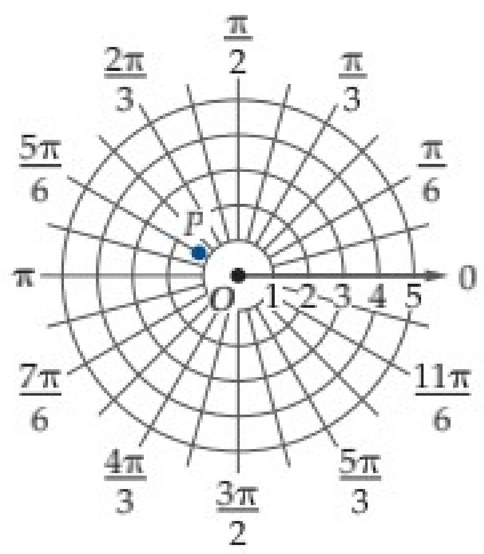
c) ما المسافة بين الطائرتين؟ قرِّب الناتج إلى أقرب ميل.

8) عبِّر عن المعادلة $(x - 7)^2 + y^2 = 49$ ، بالصورة القطبية.

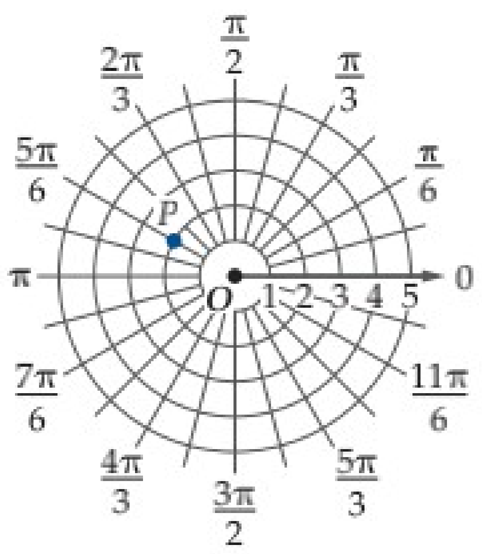
9) **كهرباء:** إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية 135V، وكانت شدة التيار المار بها I هو $(3 - 4j)$ أمبير، فأوجد معاوقة الدائرة z بالإحداثيات الديكارتية مستعملًا المعادلة $V = I \cdot Z$.

10) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يبين تمثيل العدد المركب الذي إحداثياته الديكارتية $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي؟

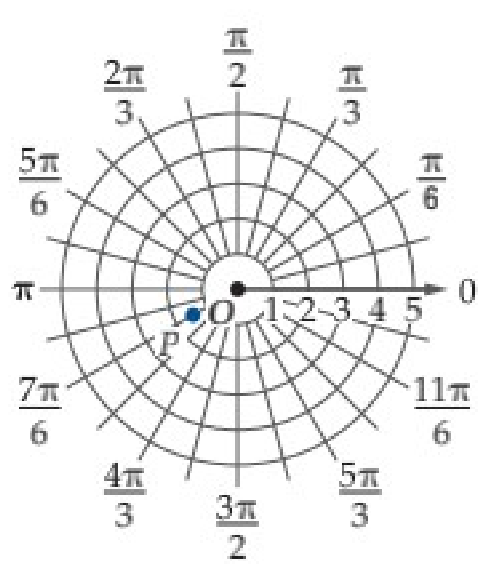
A



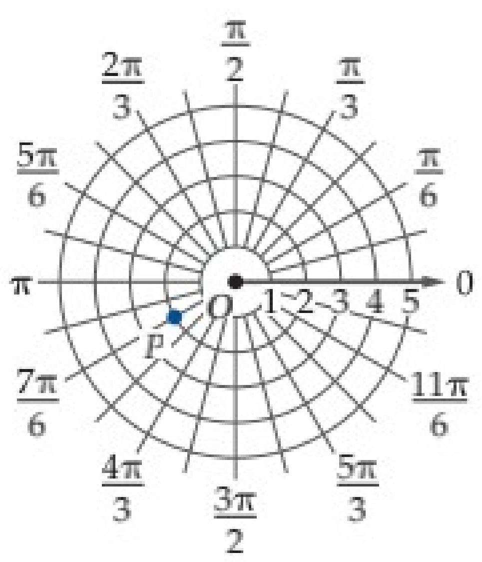
C



B



D



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرِّب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

11) $(-1 + 4i)^3$

12) $(6 + i)^4$

الفصل 7

الاحتمال والإحصاء
Probability and Statistics

فيما سبق:

درست إحصائيات العينة ومعالم المجتمع واحتمالات الحوادث المركبة.

والآن:

- أميّز المسوحات، والدراسات والتجارب.
- أكوّن التوزيعات الاحتمالية، وتمثيلاتها البيانية، وأستعملها في إيجاد الاحتمال.
- أستعمل القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.
- أميّز بين العينة الإحصائية، والمجتمع الإحصائي.

لماذا؟

التربية: يستعمل الاحتمال والإحصاء في دراسة الفرضيات التربوية واختبارها. حيث تُستعمل المسوحات، وتجرى التجارب؛ لتحديد الطرائق التعليمية التي تؤدي إلى تعلم أفضل. ويستعمل الإحصاء في تحديد الدرجات عند تمثيل درجات الفصول بيانيًا، أو عندما يريد المعلمون تقييم درجات الطلاب.

قراءة سابقة: كوّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الاحتمال والإحصاء، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 7

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

اختبار سريع

حدِّد ما إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة، أو غير مستقلة.

1) اختيار قصة وكتاب آخر لا يمثِّل قصة من مكتبة.

2) اختيار رئيس، ونائب رئيس، وسكرتير، ومحاسب في نادٍ، على افتراض أنّ الشخص الواحد لا يشغل سوى منصب واحد.

3) اختيار طالب ومعلم ومشرف اجتماعي للمشاركة في تنظيم الرحلات المدرسية.

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافيق في حلّها:

4) اصطفاف سبعة أشخاص في صف واحد عند المحاسب في أحد المتاجر.

5) ترتيب أحرف كلمة «مدرسة».

6) اختيار نكهتين مختلفتين لفطيرة من بين 6 نكهات.

اكتب مفكوك كل من العبارات الآتية:

7) $(a-2)^4$

8) $(2a+b)^6$

9) $(3x-2y)^5$

10) $\left(\frac{a}{2}+2\right)^5$

مراجعة المفردات

التباديل (Permutations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها مهمًّا.

التوافيق (Combinations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

الحادثتان المستقلتان (Independent Events):
تكون A و B حادثتين مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

الحادثتان غير المستقلتين (Dependent Events):
تكون A و B حادثتين غير مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A يغيِّر بطريقة ما احتمال حدوث B.

الحادثتان المتنافيتان (Mutually Exclusive Events):
تكون A و B حادثتين متنافيتين، إذا لم يكن وقوعهما ممكنًا في الوقت نفسه.

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem):
إذا كان n عددًا طبيعيًّا، فإن :

$$(a+b)^n$$
$$= {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

فضاء العينة (Sample Space):
هو مجموعة النواتج الممكنة لتجربةٍ ما.

الاحتمال (Probability):
هو النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معينة.

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة
Experiments, Surveys, and Observational Studies

فيما سبق:
درست تصميم دراسة مسحية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أميّز الدراسات المسحية، والدراسات القائمة على الملاحظة والدراسات التجريبية.
- أميّز بين الارتباط والسببية.

المفردات:
- الدراسة المسحية survey
- المجتمع population
- التعداد العام census
- العينة sample
- المتحيزة biased
- غير المتحيزة unbiased
- الدراسة القائمة على الملاحظة observational study
- المجموعة التجريبية treatment group
- المجموعة الضابطة control group
- الارتباط correlation
- السببية causation

لماذا؟

يرغب الطلاب في تشكيل فريق لكرة السلة في مدرستهم، وكي يجدوا دعمًا لمشروعهم، فقد نفّذوا دراسة مسحية شملت الطلاب وأولياء الأمور؛ لمعرفة الموافقين منهم والمعارضين.

الدراسات التجريبية والمسحية تُستعمل **الدراسات المسحية** في جمع البيانات، وإذا شملت عملية جمع البيانات جميع الطلاب في مدرسة ما، نقول: إن الدراسة شملت **المجتمع**، وفي هذه الحالة تُسمّى هذه العملية **تعدادًا عامًّا**. أمّا إذا تم اختيار عدد محدود من طلاب المدرسة مثل 100طالب، فتكون الدراسة المسحية قد اعتمدت على **العينة**.

وتكون العينة **متحيزة** عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام، فمثلًا: إذا شملت الدراسة المسحية الواردة في فقرة "لماذا؟" رأي لاعبي كرة السلة وأولياء أمورهم فقط، تكون العينة متحيزة. وتكون العينة **غير متحيزة** إذا تم اختيارها عشوائيًّا، أي إذا كان لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة، فإذا أُرسلت استبانة في دراسة مسحية لـ 100 طالب تم اختيارهم عشوائيًّا عندها تكون العينة غير متحيزة.

مثال 1 من واقع الحياة — العينات المتحيزة وغير المتحيزة

دراسات مسحية: حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

a) سؤال كل عاشر شخص يخرج من قاعة الندوات عن عدد مرات حضوره ندوات ثقافية؛ لتحديد مدى دعم سكان المدينة للندوات الثقافية.

متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تم سؤالهم قد يختلفون عن سكان المدينة، حيث إنهم ممن يحضرون الندوات الثقافية.

b) استطلاع آراء أفراد في سوق الماشية؛ لمعرفة ما إذا كان سكان المدينة يحبون تربية الماشية أو لا .

متحيزة؛ لأن المجموعة التي تم مسح رأيها لا تُمثّل بالضرورة رأي أهل المدينة؛ لأنهم غالبًا ممن يحبون تربية الماشية.

c) يحتوي صندوق على أسماء طلاب المدرسة جميعهم، سُحب من الصندوق 100 اسم عشوائيًّا، وسُئل أصحابها عن رأيهم في مقصف المدرسة.

غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة الذين استُطلِعت آراؤهم.

تحقق من فهمك

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًّا عن رياضتهم المفضلة.

لتجنُّب التحيّز في الدراسات المسحية المعتمدة على العينات لا بدّ من تحقّق أمرين هما: أن تكون العينة العشوائية مناسبة، وذلك بأن تكون غير متحيزة وحجمها كبير نسبيًّا، وألا تكون الأسئلة المطروحة متحيزة.

مثال 2 من واقع الحياة — تصميم الدراسات المسحية

دراسات مسحية في المدرسة: يريد خالد أن يُحدّد أفضل الأماكن للرحلة المدرسية. ما الأسئلة التي تعطيه الإجابة التي يبحث عنها دون تحيُّز؟

a) هل تحب الذهاب إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي؟

هذا سؤال متحيز لصالح مكان محدد.

b) هل تحب الذهاب إلى حديقة الحيوان، أم إلى متنزّه سلام؟

هذا سؤال متحيز؛ لأنه يحدد بديلين بالاسم.

c) أين تفضل أن تذهب في الرحلة؟

هذا سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها دون تحيّز.

تحقق من فهمك

أي مما يأتي يُحدّد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيُّز؟

2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟

2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟

2C) ما مادتك المفضلة؟

إرشادات للدراسة

العينة المتحيزة
تعدّ العينة متحيزة إذا وفقط إذا كانت غير عشوائية.

في **الدراسة القائمة على الملاحظة**، تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج. وفي **الدراسة التجريبية**، يتم إجراء معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة، وتجرى ملاحظة استجاباتهم.

دراسة قائمة على الملاحظة

- من 100 شخص، اختر 50 شخصًا خضعوا لمعالجة.
- اجمع البيانات، وحلّلها، وفسّرها.

دراسة تجريبية

- من 100 شخص، اختر من بينهم 50 شخصًا عشوائيًّا وأخضعهم للمعالجة المقصودة بالتجريب، بينما لا تخضع الآخرين لأي معالجة أو لمعالجة شكلية.
- اجمع البيانات، وحلّلها، وفسّرها.

في الدراسة التجريبية، يُسمّى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة **المجموعة التجريبية**. أمّا الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية، فيسمون **المجموعة الضابطة**. وتعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون، وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير متحيزة.

إرشادات للدراسة

المعالجة الشكلية
التي يخضع لها أفراد المجموعة الضابطة، والتي ليس لها أي تأثير في نتائج الدراسة، والهدف الأساسي منها هو التأكد من عدم معرفة الأفراد لأي المجموعتين التجريبية أو الضابطة ينتمون، لضبط محاولة تأثير بعضهم في نتائج الدراسة، وذلك ببذل المزيد من الجهد مثلًا أو العكس.

مثال 3 من واقع الحياة — الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

حدِّد ما إذا كان كل موقف ممّا يأتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة. وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

a) اختر 200 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معينة، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة.

هذه دراسة قائمة على الملاحظة.

b) اختر 200 طالب واقسمهم عشوائيًّا إلى نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي معيّن، أمّا الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي.

هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم تقسيم المجموعتين عشوائيًّا، وإحداهما خضعت للبرنامج التدريبي وهي المجموعة التجريبية، والأخرى لم تخضع لأي برنامج تدريبي وهي المجموعة الضابطة، وهي دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

تحقق من فهمك

حدِّد ما إذا كان الموقف الآتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة. وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

3) اختر 80 طالبًا جامعيًّا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعة.

كيف تعرف متى تُستعمل الدراسات المسحية أو الدراسات التجريبية أو الدراسات القائمة على الملاحظة؟ تستعمل الدراسات المسحية عند الرغبة في جمع بيانات، أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين، بينما تُستعمل الدراسات القائمة على الملاحظة عند الرغبة في دراسة أثر معالجة سابقة تعرض لها أفراد من المجتمع دون أي تأثير عليهم من الباحث، وتستعمل الدراسات التجريبية عند الرغبة في اختبار طريقة جديدة، أو في دراسة نتائج معالجة مقصودة يؤثر الباحث بها في مجموعة من الأفراد يتم تعيينهم عشوائيًّا.

مثال 4 الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة على الملاحظة

حدِّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك:

a) تريد أن تختبر طريقة معالجة لمرض ما.

يستدعي ذلك إجراء دراسة تجريبيّة يكون المستهدفون فيها مرضى يشكّلون المجموعة التجريبية، وتخضع هذه المجموعة للعلاج، بينما يخضع أفراد المجموعة الضابطة الآخرون وهم مرضى كذلك لعلاج شكلي.

b) تريد أن تجمع آراءً حول القواعد المعتمَدة في انتخاب رئيس الصف.

يستدعي هذا دراسة مسحية للآراء، حيث من الأفضل أن تختار أشخاصًا من الصف بصورة عشوائية؛ لتحصل على عينة غير متحيزة.

c) تريد أن تعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثّر في سعة الرئة أو لا.

يستدعي هذا إجراء دراسة قائمة على الملاحظة تقارن فيها سعة رئة المدخنين لمدة 10 سنوات، مع سعة الرئة لعدد مساوٍ لهم من غير المدخنين.

✓ تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، فسّر إجابتك.

4) تريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقًا) إلى 5 (أوافق بشدة).

التمييز بين الارتباط والسببية إن أي علاقة تظهر بين نتائج التجربة والمعالجة لا تعني بالضرورة أن المعالجة هي السبب في النتيجة.

فعندما يوجد **ارتباط** بين ظاهرتين، فإن كلًّا من الظاهرتين تؤثر في الأخرى فإن معرفتك بقيم الظاهرة الأولى يمكِّنك من التنبؤ بقيم الظاهرة الثانية، والعكس صحيح، فمثلًا: هناك ارتباط بين كتل الأشخاص وأطوالهم، فكلما زاد طول الشخص زادت كتلته بشكل عام، فإذا عرفت طول شخص يمكنك التنبؤ بكتلته. وعندما يوجد **سببية**، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى لذا فإن السببية تتضمن الترتيب الزمني، فوقوع الظاهرة الأولى أولًا يكون سببًا في وقوع الظاهرة الثانية لاحقًا كنتيجة لذلك، فمثلًا: دوران الأرض حول محورها هو السبب الوحيد في تعاقب الليل والنهار. وبينما يكون من السهل ملاحظة الارتباط بين ظاهرتين، فإنه من الصعب البرهنة على وجود سببية بين الظاهرتين.

إرشادات للدراسة

السببية

إذا لم يوجد أي سبب آخر يعطي النتيجة فإنك تفترض السببية.

مثال 5 الارتباط والسببية

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

a) أظهرت الدراسات أن الطلاب يكونون أقل نشاطًا بعد تناول الغداء .

العبارة تظهر ارتباطًا فقط، ولا تظهر سببية؛ لأن تناول الغداء ليس سببًا مباشرًا ولا كافيًا وحده لقلة النشاط لدى الطلاب، فهناك عوامل أخرى تشترك معه، مثل نوعية وكمية الغداء.

b) إذا رَفعتُ أثقالًا، أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم .

العبارة تظهر ارتباطًا؛ لأن رفع الأثقال وحده ليس سببًا مباشرًا للالتحاق بفريق كرة القدم، فقد تكون هناك متطلبات أخرى تشترك معه، مثل: المهارة واللياقة وغيرها.

c) عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع.

العبارة الواردة تظهر سببية؛ لأنه ليس هناك عوامل أخرى مع الشمس يلزم وجودها لسبب طلوع النهار.

المملكة العربية السعودية
اللجنة الوطنية لمكافحة المخدرات
الأمانة العامة

الربط مع الحياة

أشارت نتائج دراسات عالمية إلى أن هنالك علاقة بين تعاطي المخدرات ورفقة السوء.

✓ تحقق من فهمك

بيّن ما إذا كانت العبارة الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك.

5A) عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز. **5B)** إذا صاحبتَ شخصًا حسن السيرة، فإنك تقتدي بأخلاقه الحسنة.

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كلُّ دراسة مسحية فيما يأتي تتبنَّى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك: (مثال 1)

1) استطلاع رأي كل ثالث شخص يخرج من مطعم للمشويات؛ لمعرفة الوجبة المفضلة للناس.

2) الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم.

3) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبه 20 من كل 20 طالبًا يخرجون من مدرستك، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي.

4) **دراسة مسحية:** بيِّن ما إذا كانت الدراسة المسحية الآتية تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، فسِّر إجابتك.
استطلاع آراء طلاب في كلية الطب؛ لمعرفة المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب.

حدّد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل. (مثال 2)

5) يريد زاهر أن يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة.
   a) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في مدينة الرياض؟
   b) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في المملكة؟
   c) ما مدى تقديرك لفرق كرة القدم في المملكة؟

6) يريد سليمان أن يحدد الرغبة في تكوين أول نادٍ للشطرنج في المدرسة.
   a) في أي يوم ترغب في أن تتأخر في المدرسة؟
   b) هل تحب الشطرنج؟
   c) هل تحب أن تنضم إلى نادي الشطرنج في المدرسة؟

7) يريد هاني أن يتعرف إلى الطالب المثالي في المدرسة.
   a) من ترى أنه الطالب المثالي في المدرسة؟
   b) هل تُفضّل الطالب الذي لا يبادر بالمساعدة، أم الذي يبادر بها؟
   c) إذا طُلِب إليك إبداء الرأي، فهل تفعل؟

حدّد ما إذا كان كل موقف من المواقف الآتية يمثّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا: (مثال 3)

8) قبل الاختبار، قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى. ثم قام بمقارنة نتائج الاختبار لهما.

9) وجد عادل 100 شخص، نصفهم متطوعون في مأوى الفقراء، وقارن بين متوسطي الدخل السنوي لأفراد المجموعتين.

10) اختر 300 شخص، واقسِّمهم عشوائيًّا إلى مجموعتين: إحداهما تقرأ القرآن لمدة ساعة قبل النوم، والأخرى لا تفعل شيئًا، ثم قارن بين كيفية نوم كل من المجموعتين.

11) اختر 250 شخصًا نصفهم في الفِرق الرياضية، وقارن بين كمية الوقت الذي يمضونه في حل الواجبات.

12) اختر 100 طالب نصفهم في نادي اللغة الإنجليزية، وقارن بين درجاتهم في اللغة الإنجليزية.

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك: (مثال 4)

13) تريد اختبار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال.

14) تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة لشركة.

15) تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثّر في حركة الركبة أو لا.

16) تريد معرفة ما إذا كانت المشروبات الغازية تؤثّر في جدار المعدة أو لا.

17) تريد اختبار معالجة معيّنة تبعد الحيوانات عن البساتين التي تحوي غزلانًا.

بيّن ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطًا، أو سببية، وفسّر إجابتك: (مثال 5)

18) عندما أمارس الرياضة، أكون في وضع نفسي أفضل.

19) عندما يكون الجو باردًا وممطرًا بغزارة، لا نذهب إلى المدرسة.

20) عندما يكون الطقس حارًّا في فصل الصيف، يكثر بيع المشروبات الباردة.

21) كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.

22) دلَّت الأبحاث على أن من يتقن أكثر من لغة، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض.

23) النوم بحذائك يؤدي إلى شعورك بالصداع.

24) **استبانات:** توزّع شركة استبانات على العاملين الذين تركوا العمل في الشركة، وكان أحد أسئلة الاستبانة هو كيف يوظف العامل خبرته التي اكتسبها في الشركة؟ هل هذه دراسة مسحية متحيزة؟ فسّر السبب.

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير متحيزة. هل وفّق أي منهما في ذلك؟ فسّر إجابتك.

سامي
- خذ مجموعة من 20 شخصًا بطريقة عشوائية.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًا الالتزام بحمية تعتمد على الفواكه بالكامل لمدة 3 أسابيع.
- قارن بين أوزانهم بعد الأسابيع الثلاثة.

هشام
- خذ 20 لاعبًا لكرة القدم.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًا أن يقفزوا 500 قفزة إلى أعلى في اليوم.
- قارن عدد مرات القفز إلى أعلى التي تستطيع كل مجموعة تنفيذها بعد الأسابيع الثلاثة.

26) **تحدٍّ:** كيف تظهر الدراسة المسحية عبر الهاتف تحيّزًا للعينة؟

27) **اكتب:** قارن من خلال ذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين العينة العشوائية في اختيار الأفراد من المجتمع، وبيِّن الاختيار العشوائي لأفراد المجموعة الضابطة في الدراسة التجريبية.

28) **مسألة مفتوحة:** اذكر مثالًا من واقع الحياة لكل دراسة ممّا يأتي، وحدِّد عدد أفراد العينة، وكيفية اختيارها.

a) مسحية

b) قائمة على االملاحظة

c) تجريبية

29) **تبرير:** كيف يحدث التحيّز في الدراسة التجريبية؟ وكيف يؤثّر في النتيجة؟ أعطِ مثالًا على ذلك.

مراجعة تراكمية

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 1, 6\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

30) $2\mathbf{u}$

31) $\mathbf{v} + \mathbf{u}$

32) $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

33) $A(2, 2, 7), B(1, 3, -4)$

34) $A(4, 5, 10), B(7, 1, 8)$

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلِّ نقطة مما يأتي: (الدرس 6-2)

35) $(3, 90°)$

36) $(2, 210°)$

37) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (الدرس 6-3)

38) $6 + 8i$

39) $-1 - i$

تدريب على اختبار

حدِّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثِّل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدِّد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كانت متحيزة أو لا.

40) اختر 220 شخصًا عشوائيًّا، وقسمهم عشوائيًّا إلى مجموعتين. إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية مدة ساعةً واحدة يوميًّا، والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات، ثم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين.

41) اختر 200 طالب، نصفهم يمارس كرة القدم، وقارن فترة النوم بين المجموعتين.

42) اختر 100 طالب جامعي، نصفهم لديه وظيفة بدوام جزئي، وقارن معدلاتهم التراكمية.

توسع

7-1

معمل الحاسبة البيانية: تقويم البيانات المنشورة
Evaluating Published Data

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، مع تطبيق القوائم وجداول البيانات لتقويم البيانات التي يمكن الحصول عليها في الواقع.

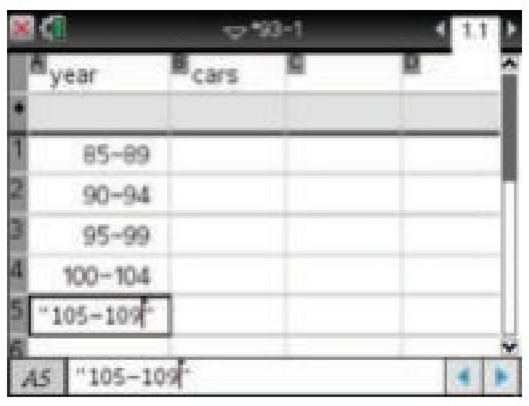
يبين الجدول أدناه عدد السيارات التي باعها معرض للسيارات خلال الفترة 2009–1985، وقد قام المعرض بتمثيل هذه البيانات بالأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور؛ وعرضها في إحدى الصحف، وذلك لدعم المقولة بأن مبيعات المعرض تزداد بشكل كبير جدًّا. هل هذا صحيح؟

السنوات	1985–1989	1990–1994	1995–1999	2000–2004	2005–2009
عدد السيارات المبيعة	316	451	561	704	823

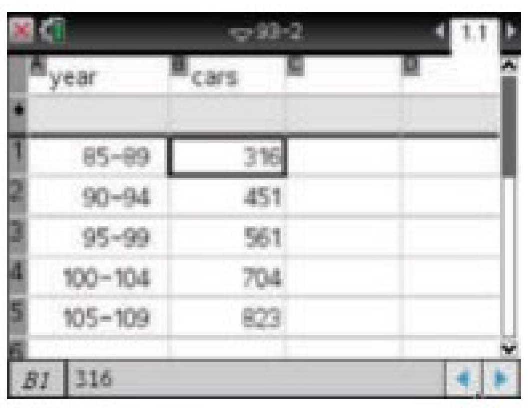
نشاط

تقويم التمثيل البياني للبيانات.

الخطوة 1 أدخل البيانات في صفحة من تطبيق القوائم وجداول البيانات.

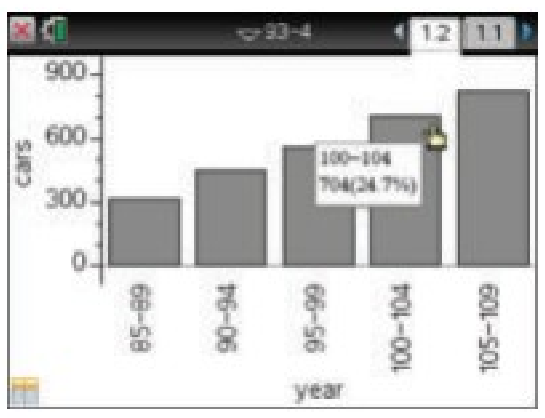


- اضغط on ومنها اختر .
- اكتب عنوان البيانات (years) في أعلى العمود (A) وَ (cars) في أعلى العمود (B).
- لإدخال فئات السنوات في كل خلية بالضغط على ctrl ثم اختيار " "، فمثلًا لإدخال الفئة الأولى من السنوات في الخلية A_1 اكتب "89-85" ثم اضغط enter، وكرّر ذلك لبقية فئات السنوات.
- استعمل الأسهم لإظهار الخلية B_1، ثم أدخل البيانات لكل فئة من السنوات.



الخطوة 2 مثِّل البيانات التي تم إدخالها بالأعمدة.

- اضغط menu ثم اختر 3:البيانات ومنها 8:التمثيل البياني المختصر
- اختر years في القائمة X: year ، وَ cars في قائمة موجزة: cars ، وَ صفحة جديدة من عرض في: صفحة جديدة لإظهار التمثيل البياني على صفحة جديدة، ثم اضغط موافق .
- لمشاهدة المعلومات عن أي عمود في التمثيل البياني، قم بالإشارة إلى ذلك العمود فتظهر معلوماته كما هو موضح في الشكل المجاور.



حلّل النتائج

قارن تمثيلك البياني بتمثيل الصحيفة.

1) هل يعرض التمثيلان البيانات نفسها؟
2) أي التمثيلين يُظهر أن مبيعات المعرض تزداد بشكل أكبر؟ ولماذا؟
3) لماذا اختار المعرَض أن يعرض بياناته بهذه الطريقة؟ هل هي مقبولة؟ ولماذا؟

7-2 التحليل الإحصائي
Statistical Analysis

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت. (مهارة سابقة)

والآن:
- أختار مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات.
- أجد هامش خطأ المعاينة وأستعمله.
- أستعمل مقاييس التشتت لمقارنة مجموعات من البيانات.

المفردات:
- التحليل الإحصائي statistical analysis
- المتغير variable
- بيانات في متغير واحد univariate data
- مقاييس النزعة المركزية measure of central tendency
- المَعْلَمة parameter
- الإحصائي Statistic
- هامش خطأ المعاينة margin of sampling error
- مقياس التشتت measure of variation
- التباين variance
- الانحراف المعياري standard deviation

لماذا؟

7:20	6:59	7:29	6:49	7:03	6:51
6:48	6:52	6:50	7:01	6:49	6:57
6:53	7:07	6:54	6:56	7:09	7:02

شارك أمجد في 18 سباقًا جبليًا للدراجات خلال العام الماضي، ويُمثّل الجدول المجاور الزمن بالدقائق والثواني الذي استغرقه للوصول إلى خط النهاية في كل منها. أي من مقاييس النزعة المركزية يفضل أن يستعمله أمجد لوصف هذه الأزمنة؟

إن إيجاد أحد مقاييس النزعة المركزية لوصف البيانات وتلخيصها، والوصول إلى الاستنتاجات المتعلقة بالدراسة يُسمى **التحليل الإحصائي** لها.

التحليل الإحصائي البيانات الموجودة في الجدول أعلاه تشتمل على **متغير**؛ لذا تُسمى **بيانات في متغير واحد**. ولوصف مثل هذه البيانات، يُستعمل أحد **مقاييس النزعة المركزية**، الذي يشير إلى متوسط البيانات أو منتصفها (مركزها)، وأبرز هذه المقاييس هو المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

والآن: اختار مقياس لوصف البيانات يمكن استعمال الجدول أدناه:

مفهوم أساسي — مقاييس النزعة المركزية

المقياس	التعريف	أكثر فائدة عندما
المتوسط الحسابي	مجموع القيم مقسومًا على عددها	لا توجد في البيانات قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم تنازليًا أو تصاعديًا في مجموعة بيانات عددها فرديٌ، أو هو المتوسط للعددين الموجودين في المنتصف، في مجموعة بيانات عددها زوجي ومرتبة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا.	توجد في البيانات قيم متطرفة، ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
المنوال	القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم.	تحوي البيانات قيمًا متكررة.

مثال 1 من واقع الحياة — مقاييس النزعة المركزية

a) **زمن السباق:** إشارة إلى البيانات في سباق الدراجات أعلاه، أيّ مقاييس النزعة المركزية يصف البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

بما أن البيانات تنتشر ولا يظهر فيها قيم متطرفة، يكون المتوسط هو الأفضل.

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

b) أيّ من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور؟ ولماذا؟

بما أنه توجد قيم متطرفة ولا يوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات، فإن الوسيط أفضل من غيره لتمثيل البيانات.

تحقق من فهمك

1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال، و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة من البيانات، هما **المَعْلَمة** وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع. و**الإحصائي** وهو مقياس يصف خاصية في العينة. فمتوسط دخل الفرد في المملكة هو مثال على المَعْلَمة، أما دخل الفرد في مدينتك التي تسكنها، فهو مثال على الإحصائي. ويتم تحديد مجتمع الدراسة في ضوء الهدف من الدراسة، فإذا أراد باحث مثلًا تعرف مدى رضا معلِّمي الرياضيات عن المناهج الجديدة في المملكة، فإن مجتمع الدراسة يكون جميع معلِّمي الرياضيات الذين يدرِّسون المناهج الجديدة في المملكة، ولصعوبة إجراء الدراسة على جميع المعلمين، فإنه يتم اختيار مجموعة صغيرة والتي تمثل عينة الدراسة.

إرشادات للدراسة
القيمة المتطرفة
هي واحدة من البيانات أكبر أو أصغر كثيرًا من بقية البيانات.

وعند سحب عينة من مجتمع فهنالك خطورة من وجود خطأ في المعاينة ناتج عن إجراء الدراسة على عينة من المجتمع وليس على المجتمع بأكمله يسمى **هامش خطأ المعاينة**. وكلما زاد حجم العينة قلَّ هامش خطأ المعاينة، ويُحَدِّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع، وهذا يعني أنه يصف المدى الذي تقع فيه نسبة المجتمع فيما إذا أجريت الدراسة على المجتمع بأكمله.

مفهوم أساسي — هامش خطأ المعاينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال 2 — هامش خطأ المعاينة

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصًا، أفاد 58% منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضّلة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} \approx \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$ قانون هامش خطأ المعاينة

$$\approx \pm \frac{1}{\sqrt{2148}}$$ $n = 2148$

$$\approx \pm 0.0216$$ بسّط

إذن هامش الخطأ للمعاينة ±2.16% تقريبًا.

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمّن نسبة المجتمع الذين أفادوا أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة؟

$58\% + 2.16\% = 60.16\%$ $58\% - 2.16\% = 55.84\%$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة تقع بين 55.84% و 60.16% أي تقع في الفترة (55.84% , 60.16%).

تحقق من فهمك

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصًا، قال 41% منهم: إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

2A) ما هامش خطأ المعاينة؟

2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟

> **إرشادات للدراسة**
> **كتابة هامش خطأ المعاينة**
> نكتب هامش خطأ المعاينة عادة على صورة نسبة مئوية.

مقاييس التشتت تصف **مقاييس التشتت** مقدار تباعد البيانات أو تقاربها، ومن أشهر مقاييس التشتت **التباين**، و**الانحراف المعياري**. ويصف هذان المقياسان مدى بعد مجموعة البيانات عن المتوسط أو قربها منه.

يُمثّل الرمز $\overline{x}$ المتوسط للعينة ويُقرأ «x بار»، ويمثّل الرمز μ المتوسط للمجتمع ويُقرأ «ميو». ويحسب كل من المتوسط للعينة والمتوسط للمجتمع بالطريقة ذاتها، أمّا طريقة حساب الانحراف المعياري لكل من بيانات العينة وبيانات المجتمع، فتختلف، وفيما يأتي توضيح لطريقة حساب كل من الانحراف المعياري للعينة)ويُرمز له بالرمز s، والانحراف المعياري للمجتمع (ويرمز له بالرمز σ ويقرأ «سيجما»).

> **إرشادات للدراسة**
> **مقاييس التشتت**
> درست سابقًا مقاييس التشتت (المدى، الربيعات، المدى الربيعي، الانحراف المتوسط.

مفهوم أساسي — قانونا الانحراف المعياري

العينة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة وَ $\overline{x}$ المتوسط الحسابي للعينة وَ x_k قيم العينة.

المجتمع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

حيث n عدد قيم المجتمع وَ μ المتوسط الحسابي للمجتمع وَ x_k قيم المجتمع.

مثال 3 من واقع الحياة — الانحراف المعياري

الربط مع الحياة

يستعمل المعلمون الأنواع المختلفة من الأسئلة الموضوعية والمقالية لتقدير درجات طلابهم.

درجات اختبار: حصل طلاب المعلم صالح في اختبارين متتاليين على المتوسط نفسه في اختبار الرياضيات وهو 75. إذا علمت أن درجات الاختبارين كما يأتي:

الاختبار A	الاختبار B
85, 80, 75, 75, 70, 75, 75, 65, 75, 75, 75, 80, 75, 75, 70, 80, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 75	100, 100, 90, 10, 100, 95, 10, 95, 100, 100, 85, 15, 95, 20, 95, 90, 100, 100, 90, 10, 100, 100, 25

a) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الاختبار A.

الخطوة 1 بما أن المتوسط 75 للاختبار كاملًا ، فهو يمثل متوسط المجتمع. ومن هنا فإن: $\mu = 75$.

الخطوة 2 أوجد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}} \qquad \text{قانون الانحراف المعياري}$$

$$= \sqrt{\frac{(85-75)^2 + (80-75)^2 + \ldots + (75-75)^2 + (75-75)^2}{23}}$$

$$\approx 3.9$$

المتوسط لدرجات الاختبار A يساوي 75، والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 3.9

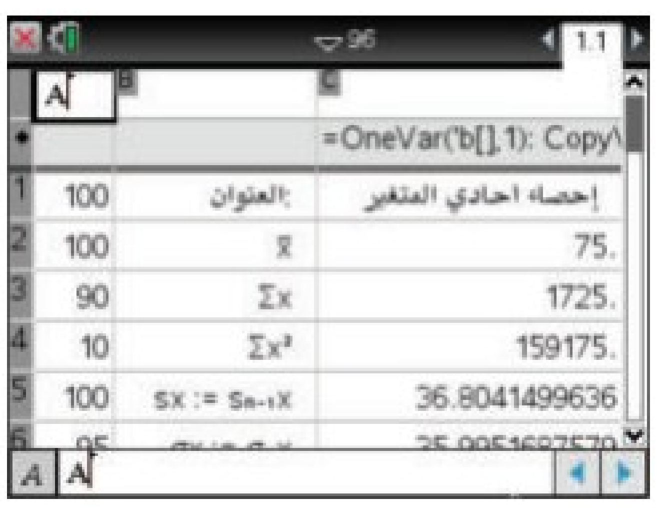
b) استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد الانحراف المعياري للاختبار B.

اضغط on ثم ▦ وأدخل القيم (الدرجات) في العمود A.

ولمشاهدة الإحصائيات اضغط menu ثم اختر 4: الإحصاء

ومنها 1: الحسابات الإحصائية ثم 1: إحصاء أحادي المتغير ...

ثم اضغط موافق موافق موافق



المتوسط لدرجات الاختبار B يساوي 75
والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 36

c) قارن الانحراف المعياري في كلا الاختبارين. وماذا تستنتج؟

الانحراف المعياري للاختبار B أكبر كثيرًا من الانحراف المعياري للاختبار A؛ لذا فدرجات الطلاب في الاختبار A أكثر تجانسًا، أي أن درجات بعضهم قريبة من بعضٍ، مقارنةً بالاختبار B الذي يبيِّن درجات عالية جدًّا، ودرجات لآخرين دون المتوسط كثيرًا.

إرشادات للدراسة

المتوسط للمجتمع
عندما يكون المتوسط للمجتمع μ معلومًا، يمكنه أن يحلّ مكان المتوسط للعينة $\bar{x}$.

إرشادات للدراسة

المتوسط والانحراف المعياري للعينة
إذا قارن المعلم صالح درجات طلابه بدرجات طلاب آخرين في اختبار وطني مثلًا، فإن درجات طلابه تُعدُّ عينةً من درجات كل الطلاب الذين تقدموا للاختبار، وعليه أن يحسب $\bar{x}$ ، s في هذه الحالة.

✓ تحقق من فهمك

3A) احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحدّدة في الجدول المجاور.

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

3B) ضع 70 مكان 30 في الجدول المجاور. ماذا تتوقع أن يحدث لكلٍّ من المتوسط والانحراف المعياري؟ أعد الحسابات للتحقّق.

3C) اختير (5) طلاب عشوائيًّا من فصل دراسي، وقيست أطوالهم فكانت: 175 سم، 170 سم، 168 سم، 167سم، 170 سم. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب.

تدرب وحل المسائل

أي مقاييس النزعة المركزية يصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (مثال 1)

1) 833, 796, 781, 776, 758

2) 37.2, 36.8, 40.4, 19.2

3) 65, 70, 17, 60, 55, 65, 63, 58, 60, 69

4) 53, 61, 46, 59, 61, 55, 49

5) **تغذية:** يوضح الجدول أدناه عدد السعرات لكل طبق خضار.

الخضار	السعرات	الخضار	السعرات	الخضار	السعرات
زهرة	10	بركلي	25	باذنجان	14
بندورة	17	ملفوف	17	فاصوليا	30
حبوب	66	جزر	28	فلفل	20
كوسا	17	سبانخ	9	خس	9

6) **طقس:** يبيّن الجدول أدناه، درجات الحرارة في أثناء النهار ولمدة أسبوع بالدرجات الفهرنهايتية:

اليوم	درجة الحرارة
السبت	64°F
الأحد	73°F
الإثنين	69°F
الثلاثاء	70°F
الأربعاء	71°F
الخميس	75°F
الجمعة	74°F

7) **ألعاب أولمبية:** في دراسة مسحية عشوائية شملت 5824 شخصًا، أفاد 29% منهم أنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز. (مثال 2)

a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز ؟

8) **رياضة:** في دراسة مسحية عشوائية شارك فيها 5669 شخصًا، وجد أن 31% منهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًا.

a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًا؟

9) **تمارين رياضية:** في دراسة مسحية شملت 4213 شخصًا اختيروا بطريقة عشوائية، أفاد 78% منهم أنهم يمارسون الرياضة لمدة ساعة أسبوعيًا على الأقل.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

b) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الذين يمارسون الرياضة ساعة واحدة على الأقل أسبوعيًا؟

10) **قيادة:** تُحدّد عادة السرعات القصوى على الطرقات تفاديًا للحوادث.

a) فيما يأتي السرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في إحدى الدول بين مدنها وقراها. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للسرعات في الجدول أدناه. (مثال 3)

السرعات القصوى للطرقات جميعها (mi/h)									
70	70	65	65	75	70	70	75	65	70

b) إذا كان الانحراف المعياري للسرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في دولة أخرى (24) . قارن الانحراف المعياري للسرعات في كلا الدولتين. وماذا تستنتج؟

11) **تدريب:** في أثناء التمرين سجَّل سلطان الأزمنة التي ركض فيها مسافة 40 m. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات في الجدول أدناه.

12) **اختبارات:** فيما يأتي درجات صف مكوّن من 10 طلاب في اختبار من 25 درجة.

درجات 10 طلاب في اختبار من 25 درجة									
20	17	21	22	20	21	20	21	21	23

a) قارن بين المتوسط والوسيط للدرجات.

b) أوجد الانحراف المعياري للبيانات، وقرِّبه إلى أقرب جزء من مئة.

c) على افتراض أن الدرجة 20 كانت خطأً، وتم تعديلها إلى 25، كيف يتأثر كلٌّ من المتوسط والوسيط بهذا التغيير؟

13) **مدارس:** يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب لكل معلم في مدارس إحدى المناطق التعليمية:

عدد الطلاب لكل معلم				
27	22	26	26	25
24	25	28	22	24
24	26	24	22	20
27	23	22	29	23
24	24	26	29	28
28	29	25	25	23

a) ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لهذه البيانات؟ ولماذا؟

b) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات، علمًا بأن المتوسط الحسابي لها يساوي 25، وقرِّبه إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا

14) **مسألة مفتوحة:** اجمع بيانات في متغيّر واحد، ثم صف مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت المناسبة لهذه البيانات.

15) **تحدٍّ:** إذا أيّد 67% من المستهدفين موضوع دراسة مسحية، وكانت الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المؤيدة هي 64.8%-69.2%، فكم شخصًا تناولت الدراسة المسحية رأيهم؟

16) **تبرير:** حذفت قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات، كيف يؤثّر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟ وضّح ذلك.

17) **تبرير:** إذا زيدت كل قيمة في مجموعة بيانات بمقدار 10، فكيف يؤثّر ذلك في المتوسط والوسيط والانحراف المعياري؟ فسّر إجابتك.

18) **اكتب:** قارن بذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتوسط والوسيط لمجموعة بيانات في متغيّر واحد.

مراجعة تراكمية

حدِّد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7)

19) قام باحث بإرسال استبانة إلى كل شخص تنتهي بطاقة الهوية الخاصة به برقم معيّن.

20) إيجاد أطوال أعضاء فريق كرة السلة لتحديد المتوسط الحسابي لأطوال طلاب المدرسة.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أو لا. (مهارة سابقة)

21) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 1, 1 \rangle$

22) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 3, 4 \rangle$

23) $\mathbf{u} = \langle 3, 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -3, -5 \rangle$

24) $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 2-6)

25) $(6, 11)$

26) $(-9, 2)$

27) $(3, 1)$

تدريب على اختبار

28) **إحصاء:** في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة، أي ممّا يأتي لا يؤثّر في الوسيط؟

A مضاعفة كل عدد

B زيادة كل عدد بمقدار 10

C زيادة القيمة الصغرى فقط

D زيادة القيمة الكبرى فقط

29) **درجات اختبار:** كانت درجات 5 طلاب اختيروا عشوائيًّا في فصل دراسي كما يلي 70, 50, 30, 45, 55. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح.

A 40

B 15

C 14

D 13

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-3 الاحتمال المشروط
Conditional Probability

فيما سبق:
درست مفهوم الاحتمال وكيفية حسابه. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد احتمال وقوع حادثة إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت.
- أستعمل الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.

المفردات:
الاحتمال المشروط
conditional probability

الجدول التوافقي
contingency table

التكرار النسبي
relative frequency

لماذا؟
يختبر هيثم دواءً يقي من بعض الأمراض. وتوجد مجموعتان من الأشخاص إحداهما تجريبية تمّ إعطاء الدواء الحقيقي لأفرادها، بينما تمّ إعطاء دواء شكلي (غير فعّال) للمجموعة الأخرى (المجموعة الضابطة). وبعد الحصول على النتائج، يريد هيثم أن يجد احتمال بقاء المستهدفين أصحاء نتيجة الدواء.
وهذا المثال يُفسّر مفهوم الاحتمال المشروط.

الاحتمال المشروط يُسمّى احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A، **احتمالًا مشروطًا**. ويرمز له بالرمز $P(B \mid A)$ ، ويقرأ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A .

مفهوم أساسي: الاحتمال المشروط
إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B، إذا عُلِم أن الحادثة A قد وقعت يعرّف على النحو:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)} , P(A) \neq 0$$

مثال 1 الاحتمال المشروط
ألقت عبير مكعب أرقام مرةً واحدةً. ما احتمال ظهور العدد 3 ، علمًا بأن العدد الظاهر فردي؟

توجد 6 نواتج ممكنة من إلقاء مكعب الأرقام مرةً واحدةً.

لتكن A الحادثة التي يكون فيها العدد الظاهر عددًا فرديًا.
ولتكن B الحادثة التي يظهر فيها العدد 3.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 3 نواتج ذات عدد فردي من بين 6 نواتج

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ واحد من النواتج الستة فردي ويُمثّل العدد 3

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ احتمال وقوع الحادثة B علمًا بأن الحادثة A قد وقعت

$= \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ $P(A) = \frac{1}{2} , P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

احتمال ظهور العدد 3 علمًا بأن العدد الظاهر فردي هو $\frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك
1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقّمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علمًا بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13؟

الجداول التوافقية **الجداول التوافقية** هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى **تكرارًا نسبيًّا**، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط.

مثال 2 من واقع الحياة — الجداول التوافقية

مشي: أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه يمارس المشي.

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (w)	لا يمارس المشي (Nw)
مريض(S)	1600	1200
معافى(H)	800	400

عدد الأشخاص الكلي في الدراسة $400 + 1200 + 800 + 1600$ ويساوي 4000 شخص، ويراد إيجاد احتمال H علمًا بأن W قد وقع.

$$P(H \mid W) = \frac{P(H \text{ و } W)}{P(W)}$$ قانون الاحتمال المشروط

$$= \frac{800}{4000} \div \frac{2400}{4000}$$ $P(H \text{ و } W) = \frac{800}{4000}$, $P(W) = \frac{1600 + 800}{4000}$

$$= \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$ بسّط

احتمال أن يكون الشخص معافى، بشرط أنه يمارس المشي هو $\frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه لا يمارس المشي.

إرشادات للدراسة

حل مختصر
يمكن اختصار الحل في المثال 2 باستعمال الجداول التوافقية وفضاء العينة المختصر على النحو الآتي: احتمال أن يكون الشخص معافى بشرط أنه يمارس المشي هو
$P(H \mid W) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$

يمكن استعمال الجداول التوافقية لتمثيل أي عدد من الحالات الممكنة.

مثال 3 على اختبار

يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم، إذا اختير طالب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي، علمًا بأنه في السنة الثالثة.

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الجامعي(K)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الجامعي(S)	269	262	276	257

A 11.5% تقريبًا
B 16.6% تقريبًا
C 13.0% تقريبًا
D 19.8% تقريبًا

إرشادات للدراسة

كتابة الاحتمال
تذكر أن الاحتمال يُعبَّر عنه بكسر اعتيادي أو بكسر عشري أو بنسبة مئوية.

اقرأ فقرة الاختبار

تريد معرفة احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي (K) علمًا بأنه في السنة الثالثة (T). مجموع الطلاب هو 1180 طالبًا.

حُلّ فقرة الاختبار

$$P(K \mid T) = P(K \cap T) \_ P(T)$$ قانون الاحتمال المشروط

$$= \frac{36}{1180} \div \frac{312}{1180}$$ $P(K \cap T) = 36 \_ 1180$, $P(T) = \frac{36 + 276}{1180}$

$$\approx 0.115\% \approx 11.5\%$$

الجواب الصحيح A.

تحقق من فهمك

3) أوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي، علمًا بأنه في السنة الأولى.

A 2.6% تقريبًا **B** 2.5% تقريبًا **C** 8.4% تقريبًا **D** 7.7% تقريبًا

تدرب وحل المسائل

يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10 كرات صفراء، و 6 كرات بيضاء، و 5 كرات خضراء. إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا، فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي: **(مثال 1)**

1) أن تكون الكرة خضراء، إذا عُلم أنها ليست زرقاء.

2) أن تكون حمراء، إذا عُلم أنها ليست خضراء.

3) أن تكون صفراء، إذا عُلم أنها ليست حمراء وليست زرقاء.

4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا عُلم أنها ليست حمراء.

5) أن تكون زرقاء، إذا عُلم أنها بيضاء.

6) **قطاعات دائرية:** رقمّت قطاعات دائرية متطابقة في قرص من 1 إلى 8، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 8 إذا عُلِم أنه استقر عند عدد زوجي؟

7) **فحص القيادة:** يوضّح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ. إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل مما يأتي: **(مثال 2)**

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

a) الشخص ناجح علمًا بأنه أخذ حصصًا.

b) الشخص راسب علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا.

c) لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح.

8) **دروس التقوية:** سجّلت مدرسة أعداد طلاب الصفين الثاني المتوسط والثالث المتوسط المشتركين وغير المشتركين في دروس التقوية. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل ممّا يأتي:

	مشارك	غير مشارك
الثاني المتوسط	156	242
الثالث المتوسط	312	108

a) الطالب مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثاني المتوسط.

b) الطالب غير مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثالث المتوسط.

c) الطالب في الصف الثاني المتوسط علمًا بأنه غير مشارك.

9) **اختيار من متعدد:** يُبيّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة قدم، والذين تغيَّبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون قد حضر المباراة علمًا بأنه من السنة الثالثة. **(مثال 3)**

	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
الحضور	48	90	224	254
الغياب	182	141	36	8

A 48.6% تقريبًا

B 77.6% تقريبًا

C 86.2% تقريبًا

D 91.6% تقريبًا

10) **اختيار من متعدد:** يقارن عادل وإبراهيم وسعود مجموعة أمثال شعبية جمعوها. وتم تمثيل ذلك وفق الجدول أدناه . إذا اختير مثل شعبي مما جمعوه عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون المثل اجتماعيًّا، علمًا بأنه ليس مما جمعه عادل.

	فكاهي	اجتماعي	خليط
عادل	521	316	44
إبراهيم	119	145	302
سعود	244	4	182

A 35.9% تقريبًا

B 24.8% تقريبًا

C 17.2% تقريبًا

D 15% تقريبًا

إذا ألقيت أربع قطع نقد متمايزة مرةً واحدة، فأجب عمّا يأتي :

11) ما احتمال ظهور شعارين، علمًا بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل؟

12) ما احتمال ظهور 3 كتابات علمًا بوجود شعار واحد على الأقل؟

13) ما احتمال عدم ظهور أي شعار علمًا بأنه توجد كتابة واحدة على الأقل؟

14) ما احتمال عدم ظهور أي كتابة علمًا بأنه يوجد 3 شعارات على الأقل؟

15) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسَّمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورُقِّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. إذا سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل البطاقة الرقم 9 علمًا بأنها حمراء اللون؟

16) يبين الجدول أدناه أعداد الألعاب الإلكترونية الموجودة لدى شخص. إذا اختيرت لعبة عشوائيًّا فأوجد كلًّا من الاحتمالين الآتيين:

اللعبة	العدد
كرة قدم	5
كرة سلة	2
مصارعة	6
سباق سيارات	4
أخرى	3

a) أن تكون من ألعاب المصارعة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم.

b) أن تكون من ألعاب سباق السيارات علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة السلة وليست من ألعاب المصارعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

17) **تحدٍّ:** ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية. ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علمًا بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاث الأولى؟

18) **اكتب:** فسّر الاختلاف بين الاحتمال المشروط لحوادث غير مستقلة، والاحتمال المشروط لحوادث مستقلة. أعطِ مثالًا لكل نوع.

19) **تبرير:** إذا مُثِّل احتمال حادثة مركبة من حادثتين بالرسم الشجري (شجرة الاحتمال)، فأي فروع الرسم الشجري يمثِّل الاحتمال المشروط. أعط مثالًا لموقف يمكن تمثيله بشجرة احتمال ثم مثِّله.

20) **تبرير:** إذا رُميت قطعة نقد بشكل حر 21 مرة متتالية، فما احتمال أن تظهر الصورة في الرمية 21، إذا علمت أن الصورة ظهرت في الرميات العشرين الأولى؟ وضِّح تبريرك.

21) **مسألة مفتوحة:** كوِّن جدولًا توافقيًّا، واحسب احتمالًا مشروطًا يرتبط بالجدول.

مراجعة تراكمية

22) استعمل مسطرة ومنقلة، لرسم متجه يمثِّل $v = 20\,km/h$، باتجاه $60°$ مع الأفقي. (مهارة سابقة)

23) **ثقافة مالية:** يوضّح الجدول أدناه دخل 12 شركة في الأسبوع الأول من شهر محرم عام 1439هـ بالريال. (الدرس 2-7)

الدخل لكل شركة بالريال

25200	25698	25778
27828	25580	23858
32903	22861	29173
23995	27124	27870

a) أوجد كلًّا من المتوسط الحسابي والوسيط.

b) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات وقرّبه إلى أقرب جزءٍ من مئة.

c) لنفترض أن تقريرًا عن الشركات المذكورة ذكر أن القيمة 22861 ريالًا كانت خطأً، وهي في الحقيقة 24861. فكيف يتأثر كل من المتوسط والوسيط بهذا التعديل؟

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي، تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة. وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7)

24) دراسة مسحية تتناول موظفي مطعم، لتقرر أكثر الأطباق شعبية.

25) دراسة مسحية تتناول رأي مرتادي مكاتب البريد، لمعرفة أكثر ألوان السيارات شيوعًا.

تدريب على اختبار

26) إذا كانت A, B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.4$، فما قيمة $P(A \mid B)$؟

A 0.5

B 0.6

C 0.7

D 0.8

27) سحبت كرة بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و3 زرقاء دون إرجاع وكانت زرقاء. ما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية؟

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-7 إلى 3-7

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7)

1) يتم اختيار كل ثاني شخص يخرج من مجمع تجاري يبيع بالجملة؛ لمعرفة عدد الأطفال في الأُسَر في تلك المدينة.

2) يتم اختيار كل عاشر موظف يخرج من شركة؛ لمعرفة رأي الموظفين في عملهم.

3) سؤال كل خامس طالب يدخل المدرسة عن مواصفات المعلم المثالي.

4) **اختيار من متعدد:** حدّد أيًّا من العبارات الآتية توضح السببية: (الدرس 1-7)

A إذا تدرّبت كل يوم، فستصبح لاعبًا محترفًا في كرة السلة.

B إذا قرأت كتابك المقرر، فستنجح في الاختبار.

C إذا تقدّمت لعشر وظائف مختلفة، فستتلقى عرضًا من واحدة على الأقل.

D إذا وقفت بالخارج تحت المطر من دون مظلة، فستبتل. حدد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تمثّل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة. وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة. (الدرس 1-7)

5) اختر 250 طالبًا في المرحلة المتوسطة نصفهم من المدارس الأهلية، وقارن بين عاداتهم الدراسية.

6) خَصِّص لنصف الموظفين الذين اختيروا بطريقة عشوائية ساعة لتناول الغداء، وقارن اتجاهاتهم نحو العمل مع بقية زملائهم.

7) أي مقاييس النزعة المركزية تصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (الدرس 2-7)

عدد سنوات الخبرة						
2	2	3	2	4	1	2
2	3	1	3	4	2	1
3	2	3	2	3	1	4
2	3	4	1	1	1	0
1	2	1	2	2	2	3

8) يحاول باحث أن يحدد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح الكهربائية على أزهار للزينة المنزلية، حيث قام بتعريض مجموعة من الأزهار لإضاءة المصابيح الجديدة، ومجموعة أخرى لإضاءة المصابيح العادية. ويبيّن الجدول أدناه أعداد الأزهار التي عاشت أو ماتت في المجموعتين.

	إضاءة جديدة	إضاءة عادية
عاشت	24	17
ماتت	6	13

إذا اختيرت زهرة منها عشوائيًّا، فما احتمال: (الدرس 3-7)

a) أن تكون من الأزهار التي تعرضت لإضاءة المصابيح الجديدة علمًا بأنها عاشت؟

b) أن تكون من الأزهار التي عاشت علمًا بأنها تعرضت لإضاءة المصابيح العادية؟

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال كل مما يأتي: (الدرس 3-7)

9) ظهور عدد فردي علمًا بأن العدد الظاهر أكبر من 3.

10) ظهور العدد 4 علمًا بأن العدد الظاهر كان زوجيًا.

11) **اختيار من متعدد:** في القرص ذي المؤشر الدوار المقسم إلى (16) قطاعًا متطابقًا، ومرقمة بالأعداد 16–1، ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردي، إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من 3؟ (الدرس 3-7)

A $\frac{13}{16}$

B $\frac{8}{16}$

C $\frac{8}{13}$

D $\frac{6}{13}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية
Probability and Probability Distributions

فيما سبق:

درست إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت. (الدرس 3–7)

والآن:

- أجد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.
- أمثّل بيانيًا التوزيعات الاحتمالية وأستعملها.

المفردات:

النجاح
success

الفشل
failure

المتغير العشوائي
random variable

المتغير العشوائي المنفصل
discrete random variable

التوزيع الاحتمالي
probability distribution

التوزيع الاحتمالي المنفصل
discrete probability distribution

الاحتمال النظري
theoretical probability

الاحتمال التجريبي
experimental probability

القيمة المتوقعة
expected value

لماذا؟

افترض أن شركة لديها 4 شواغر، وتشترط لتعيين الموظفين لديها اجتيازهم لمقابلة شخصية. إذا تقدم للشركة 8 أشخاص من المنطقة A، و 10 أشخاص من المنطقة B، وتمت مقابلة المتقدمين، واختير 4 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالوظائف 3 أشخاص من المنطقة A وشخص واحد من المنطقة B؟

الاحتمال تسمى النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معيَّنة احتمالًا. ووقوع الشيء المرغوب فيه يُسمّى **نجاحًا**، وعدم وقوعه يُسمّى **فشلًا**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمّى فضاء العينة. وكلما اقترب احتمال وقوع حادثة من 1، كانت فرصة أو إمكانية وقوعها أكبر.

مفهوم أساسي — **احتمال النجاح والفشل**

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثة s من المرات، وعدد مرات فشل وقوع الحادثة نفسها f من المرات، فإن احتمال النجاح يُكتب على النحو $P(S)$، كما يُكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويُعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالصيغتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{s}{s+f} \quad , \quad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

لاحظ أن الصيغة: $P(S) = \frac{s}{s+f}$ لا تختلف في مضمونها عن الصيغة: $P(\text{الحادثة}) = \frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$

مثال 1 الاحتمال باستعمال التوافيق

رشّحت مدرسة 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالبًا من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي؟

الخطوة 1 حدّد عدد مرات النجاح s

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الثاني هو $_{12}C_3$

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الأول هو $_{16}C_3$

استعمل التوافيق، ومبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات s.

$$S = {}_{12}C_3 \cdot {}_{16}C_3 = \frac{12!}{9!\,3!} \cdot \frac{16!}{13!\,3!} = 123200$$

الخطوة 2 حدّد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s+f$.

$$s+f = {}_{28}C_6 = \frac{28!}{22!\,6!} = 376740$$

الخطوة 3 أوجد الاحتمال

$$P(\text{فوز 3 من الأول و3 من الثاني}) = \frac{s}{s+f}$$ احتمال النجاح

$$= \frac{123200}{376740}$$ $s = 123200,\ s+f = 376740$

$$\approx 0.327016$$ استعمل الآلة الحاسبة

احتمال فوز 3 طلاب من الصف الأول و3 من الصف الثاني هو تقريبًا 0.33 أو 33%.

تنبيه!

احتمال النجاح والفشل

لاحظ أن الحرف الصغير s يدل على عدد مرات النجاح في وقوع حادثة، بينما الحرف الكبير S يدل على حادثة النجاح، وكذلك الأمر بالنسبة للحرفين f وَ F.

تحقق من فهمك

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رُشِّحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رُشِّحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟

مثال 2 من واقع الحياة — الاحتمال باستعمال التباديل

لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماؤهم بالأحرف A , B , C , D , E , F ، ويتوقع من كل منهم اتصالًا هاتفيًا للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولًا ثم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E , F أخيرًا.

الخطوة 1 حدِّد عدد مرات النجاح s.

عدد طرق اتصال A أولًا ثم B ثانيًا هو 1

عدد طرق اتصال كل من D , E , F في الأخير هو ${}_3P_3$

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s.

$$s = 1 \cdot {}_3P_3 = 1 \cdot 3! = 6$$

الخطوة 2 أوجد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s + f$.

$s + f = {}_6P_6 = 6! = 720$ ، وتمثل عدد الترتيبات الممكنة لاتصالات الأصدقاء الستة.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$$P(S) = \frac{s}{s+f}$$ احتمال النجاح

$$= \frac{6}{720}$$ $s = 6 , s + f = 720$

$$\approx 0.0083$$ استعمل الآلة الحاسبة

الاحتمال المطلوب هو تقريبًا 0.008 أو 0.8% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) **سباق:** اشترك صلاح، وعبد اللّه، وسليم في سباق 400m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يُسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة **متغيرًا عشوائيًا**. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى **متغيرًا عشوائيًا منفصلاً**.

التوزيع الاحتمالي هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، مع احتمال وقوعها، ويعبر عنه بجدول أو معادلة، أو تمثيل بياني. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1 ، أي أن $\sum P(X) = 1$.

و**التوزيع الاحتمالي المنفصل** هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل.

فعند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرَّةً واحدة، فإن فضاء العينة هو {TT , TL, LT, LL} ، حيث يُمثّل L الوجه الذي يحمل الشعار، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فإن X يأخذ القيم 2 ,1 ,0 . ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على شعار، أو الحصول على شعار واحد، أو الحصول على شعارين، ثم تكوين جدول يمثّل التوزيع الاحتمالي، كما يمكنك تمثيله بيانيًا كما يأتي:

مراجعة المفردات

التباديل والتوافيق
عند اختيار مجموعة من الأشخاص أو الأشياء بترتيب معيَّن، فإن الاختيار يُسمَّى تبديلًا، وعندما لا نهتم بعملية ترتيب الأشخاص أو الأشياء، فإن الاختيار يُسمَّى توفيقًا.

إرشادات للدراسة

البيانات المنفصلة والبيانات المتصلة
تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عدّ البيانات مثل عدد الأرانب في مزرعة. وتكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، فمثلاً أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

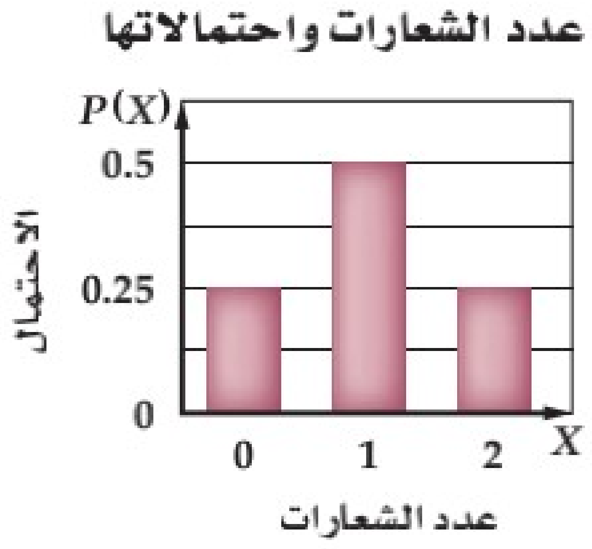
قراءة الرياضيات

احتمالات المتغيرات العشوائية
يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساويًا لـ 1 .

$P(0) = \frac{1}{4}$, $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{4}$

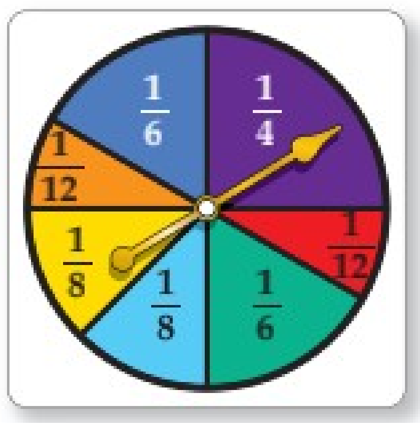
يُبيّن الجدول أدناه والتمثيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

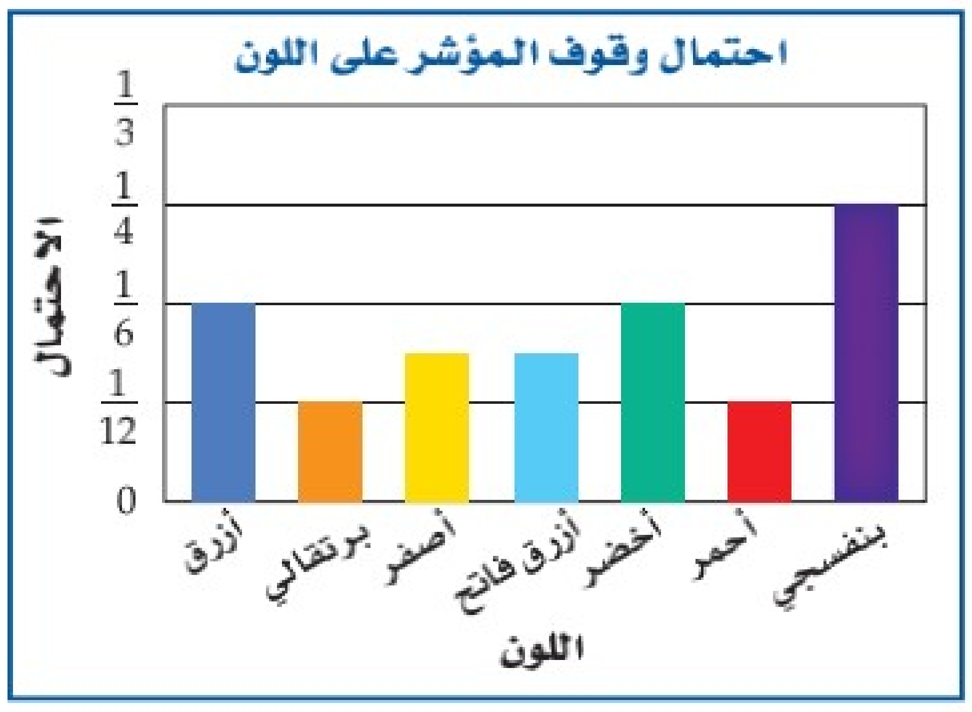


مثال 3 التوزيع الاحتمالي المنفصل

يوضّح القرص ذو المؤشر الدوّار توزيعًا احتماليًّا، حيث يمكن أن يتوقّف المؤشر على أيٍّ من القطاعات الملونة، وقد كتب على كل قطاع احتمال ظهوره (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).



a) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



b) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدّد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده، ثم أوجد احتماله.

أكثر الألوان إمكانية لوقوف المؤشر عنده هو اللون البنفسجي، واحتماله يساوي $\frac{1}{4}$.

c) أوجد P (أخضر أو أزرق) .

احتمال التوقّف عند اللون الأزرق أو الأخضر هو $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

إرشادات للدراسة

البيانات الوصفية
يمكننا أن نتعامل مع البيانات الوصفية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.

تنبيه!

احتمال الحوادث المتنافية
تذكر أنه إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين، فإن P(A أو B) = P(A) + P(B) .

تحقق من فهمك

يوضح الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا، حيث أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، وسُجّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كلٍّ منها.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

3A) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

3B) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتماله.

3C) أوجد P (5 أو 11) .

إن الاحتمالات التي تمت دراستها هنا هي **احتمالات نظرية**؛ لأنها مبنية على افتراضات يتوقّع الحصول عليها، بينما **الاحتمالات التجريبية** يتم تقديرها من عدد من التجارب. **والقيمة المتوقعة أو التوقع** $E(X)$ هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل؛ أي أن القيمة المتوقعة $E(x)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $P(X)$، ويمكن إيجادها باستعمال القانون $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} Xi.P(Xi)$، وتنتج هذه القيمة من خلال اعتماد الاحتمال النظري كوزن للمتغير العشوائي. ويخبرك بما يمكن حدوثه على المدى البعيد، وذلك بعد محاولات كثيرة.

إرشادات للدراسة

قانون الأعداد الكبيرة
ينص قانون الأعداد الكبيرة على أنه كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة، اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة من القيمة المتوقعة.

مثال 4 القيمة المتوقَّعة

أوجد القيمة المتوقَّعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كلٍّ منها $P(X)$.

$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$ عوّض في قانون المتوسط الموزون

$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$ اضرب

$= \frac{21}{6} = 3.5$ اجمع

تحقق من فهمك

4) أوجد القيمة المتوقَّعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

تدرب وحل المسائل

1) صندوق فيه 10 كرات، منها 6 حمراء، إذا سحبت منه كرتان معًا عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟ (مثال 1)

2) **فن:** اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة؛ لعرضها في أحد المعارض. ما احتمال أن تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف؟ (مثال 1)

3) دخل 8 لاعبين A, B, C, D, E, F, G, H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًا، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A, C, E, G على الترتيب؟ (مثال 2)

4) **مختبر:** دخلت طالبات صف وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة. إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عشوائيًا لتشكل مجموعات للعمل، فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات ذُكرت أسماؤهن جميلة، وآمنة، وخديجة على الترتيب؟ (مثال 2)

5) أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6، وسجل العدد الأكبر بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين إذا اختلفا، وأحدهما إذا تساويا. (مثال 3)

a) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

b) ما الناتج الأقل إمكانية للوقوع؟ وما احتماله؟

c) أوجد P(1 أو 2)؟

6) **أخبار:** أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبيّن نتائج هذا المسح. (مثال 3)

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
المذياع	0.31
الأصدقاء	0.02
الصحف	0.11
الإنترنت	0.19
مصادر أخرى	0.02

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًا.

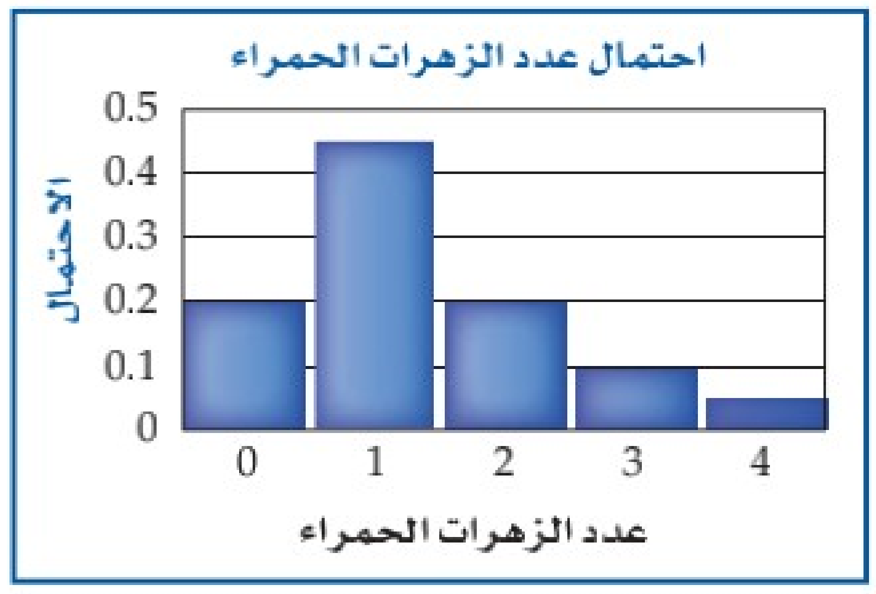
b) إذا اختير أحد الذين شملهم هذا المسح عشوائيًا، فما احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت؟

c) مثّل البيانات بالأعمدة.

7) أوجد القيمة المتوقعة عند سحب قصاصة ورق عشوائيًا من بين 5 قصاصات كتب على كل منها أحد الأرقام 5–1 دون تكرار.

8) **جوائز:** باع أحد النوادي 500 تذكرة دخول لحضور إحدى مبارياته ثمن الواحدة 10 ريالات، وأُجري سحب عشوائي على أرقام التذاكر خُصصت فيه ثلاث جوائز للأرقام الرابحة، بحيث تربح تذكرة واحدة الجائزة الأولى وقيمتها 1000 ريال، وتربح تذكرتان الجائزة الثانية وقيمتها 100 ريال، وتربح 5 تذاكر الجائزة الثالثة وقيمتها 50 ريالًا. إذا اشترى شخص تذكرة، فما القيمة المتوقعة للربح في هذا الموقف؟ (مثال 4)

9) **أزهار:** يوضّح التمثيل البياني أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور.



a) أوجد $P(0)$.

b) ما احتمال أن تكون زهرتان على الأقل حمراوين؟

10) **تبرُّعات:** قام طلاب الصف الثالث المتوسط في مدرسة بجمع بعض الأطعمة في طرود للتبرع بها للأسر الفقيرة. ولقد أحصى الطلاب أنواع المواد المقدمة كما في الجدول أدناه.

التبرع بالأطعمة	
النوع	عدد الطرود
وجبات طعام	36
أرز	22
سكر	12
قمح	45

a) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًّا على القمح.

b) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًّا على وجبة طعام أو أرز.

11) **جوائز:** تنافس 50 متسابقًا منهم جاسم وجلال وعلي في سحب عشوائي على أربع جوائز. ما احتمال أن يربح اثنان من الأسماء الثلاثة؟

12) **ألعاب رياضية:** اختار معلم التربية الرياضية 5 طلاب عشوائيًّا من بين الطلاب البالغ عددهم 124 طالبًا ليساعدوه على تطبيق بعض الألعاب. ما احتمال أن يختار واحدًا على الأقل من بين عشرة أقارب له يجلسون مع الطلاب؟

13) **درجات:** أُجري اختبار في الرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي، والجدول أدناه يُبين نتائج هذا الاختبار.

نتائج اختبار الرياضيات	
التقدير	الاحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًّا.

b) إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال ألا يقل تقديره عن B؟

c) مثّل البيانات بالأعمدة.

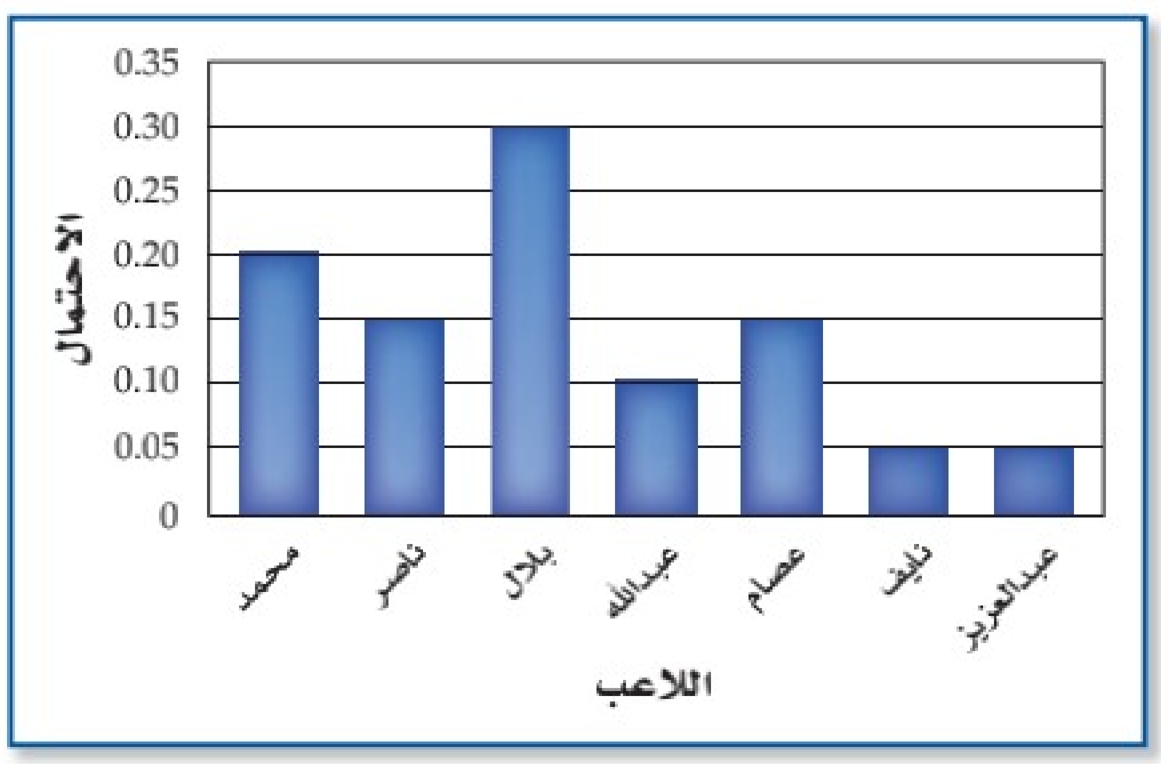
14) **كرات زجاجية:** لدى زيد 35 كرة زجاجية؛ 8 منها سوداء، و 12 حمراء، و 9 خضراء، والبقية بيضاء. فإذا سحب كرتين معًا عشوائيًّا.

a) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي؟

b) ما الناتج ذو الإمكانية الأقل للوقوع؟

c) أوجد P (إحداهما سوداء والأخرى خضراء).

15) **مسابقات:** يُبيّن التمثيل بالأعمدة احتمال أن يربح كل طالب جائزة.



a) بيِّن أن هذه البيات تمثّل توزيعًا احتماليًّا؟

b) أوجد P (ربح محمد أو بلال).

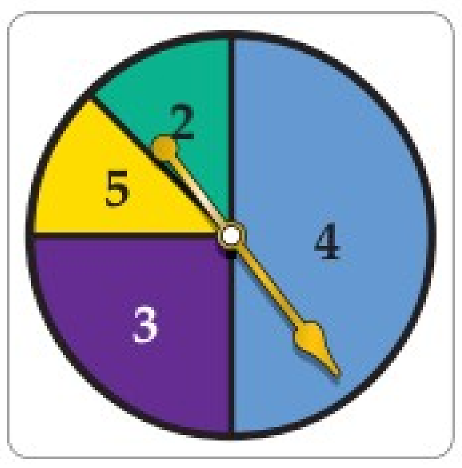
16) أمطار: التوزيع الاحتمالي أدناه يوضّح عدد الأيام الممطرة في السنة في إحدى الدول. أوجد القيمة المتوقّعة لعدد الأيام الممطرة.

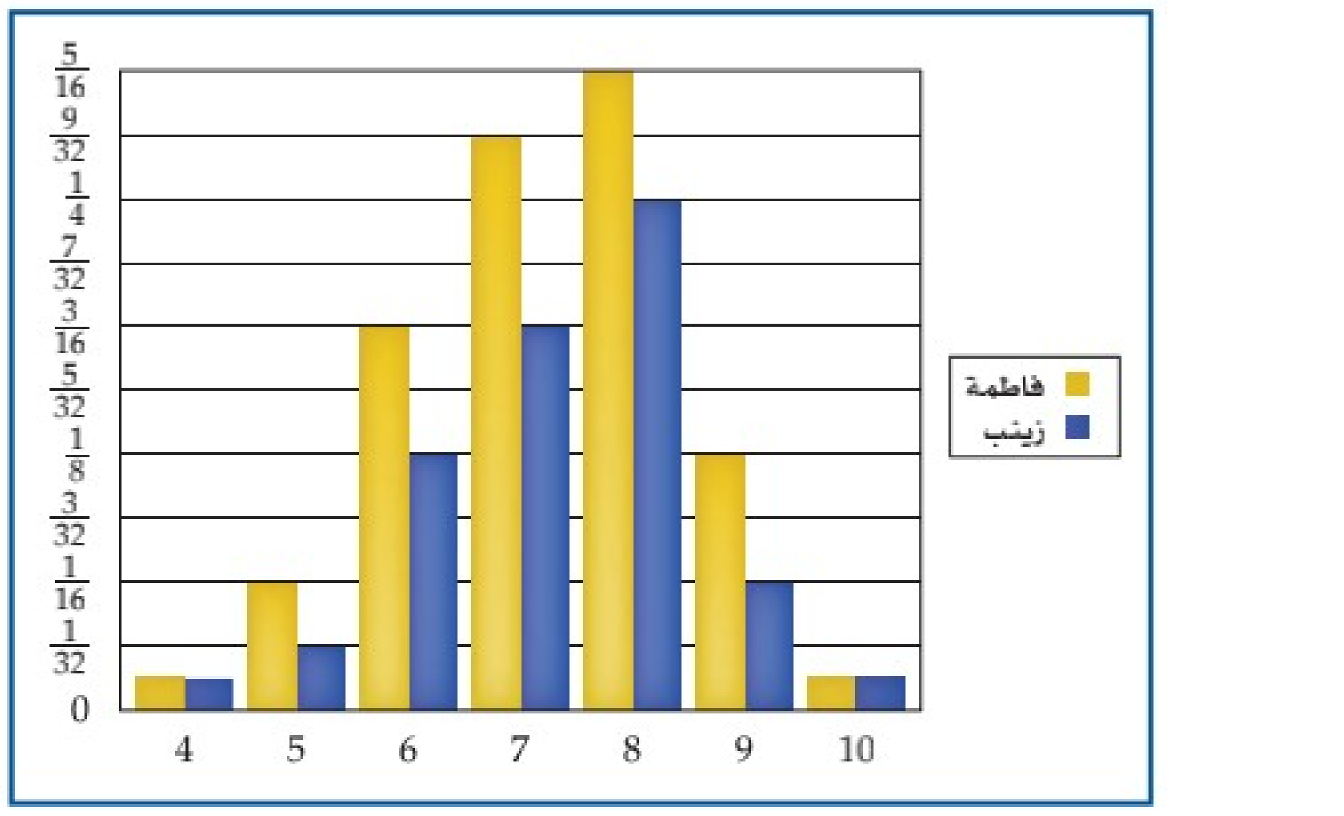
عدد الأيام الممطرة في السنة									
عدد الأيام	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.1	0.1	0.15	0.15	0.25	0.1	0.08	0.05	0.02

17) بطاقات: رُقِّمت مجموعة بطاقات على النحو الآتي: 3 بطاقات تم ترقيم كل منها بالرقم 8، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منهما بالعدد 10، و 4 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 6، و3 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 5، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منها بالرقم 2، وبطاقة تمّ ترقيمها بالرقم 3. إذا سُحبت من هذه البطاقات واحدة عشوائيًّا، فما القيمة المتوقعة لهذه البطاقة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

18) اكتشف الخطأ: كوَّنت كلٌّ من فاطمة، وزينب توزيعًا احتماليًّا باستعمال التمثيل بالأعمدة لمجموع العددين الناتجين عن دوران مؤشر القرص المجاور مرتين. أيهما يعدُّ تمثيلها صحيحًا؟ فسرِّ إجابتك.



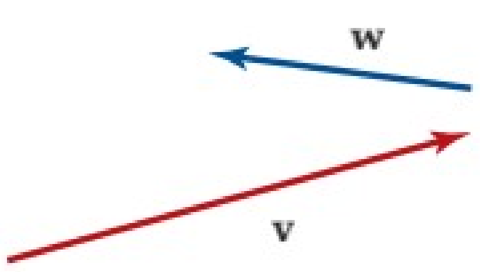


19) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا: «يُبنى الاحتمال النظري على نتائج التجارب». برِّر إجابتك.

20) مسألة مفتوحة: كوِّن توزيعًا احتماليًّا منفصلًا فيه 5 نواتج مع تحديد احتمال كل منها.

مراجعة تراكمية

21) أوجد محصلة المتجهين أدناه مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهه بالنسبة للأفقي. **(مهارة سابقة)**



22) اكتب المعادلة $r = 12\cos\theta$ على الصورة الديكارتية. **(الدرس 2-6)**

23) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء. سُحبت كرتان على التوالي دون إرجاع. ما احتمال أن تكون الثانية بيضاء إذا كانت الأولى حمراء؟ **(الدرس 3-7)**

تدريب على اختبار

24) يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء، و 4 كرات خضراء، وكرتين زرقاوين. سُحبت 3 كرات معًا عشوائيًّا. إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فما جميع القيم الممكنة لـ X؟

A 1, 2

B 0, 1, 2

C 1, 2, 3

D 0, 1, 2, 3

25) ما القيمة المتوقَّعة للتوزيع الاحتمالي المبيَّن في الجدول أدناه؟

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

A 0.1

B 2

C 0.56

D 1

7-5

التوزيع الطبيعي
The Normal Distribution

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست التوزيعات الاحتمالية. (الدرس 4−7)

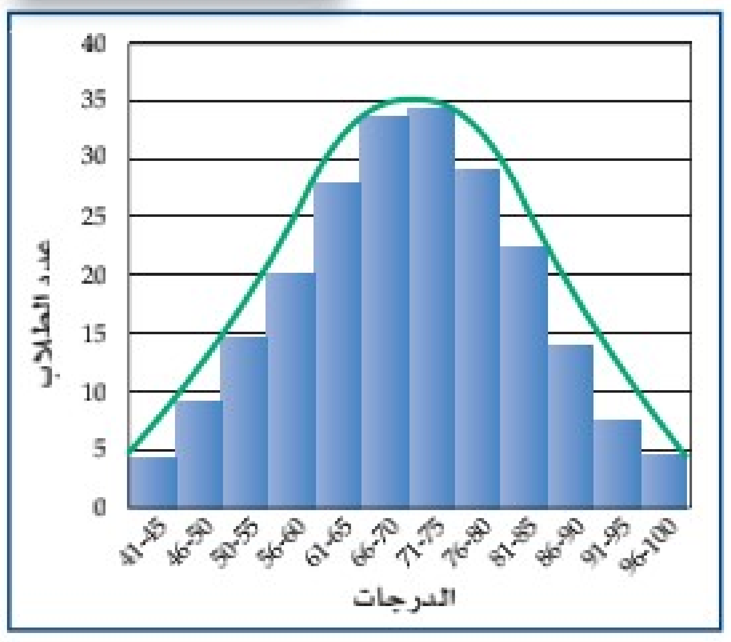
والآن:
- أحدِّد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة طبيعيًا أو ملتوية .
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات.

المفردات:
التوزيع الاحتمالي المتصل
continuous probability distribution

التوزيع الطبيعي
normal distribution

التوزيع الملتوي
skewed distribution

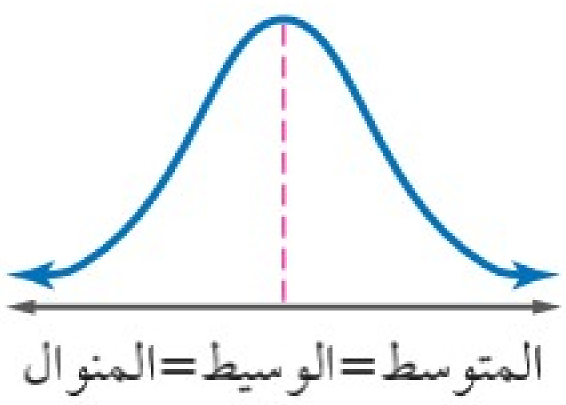
لماذا؟
مثَّل المعلم عبدالعزيز درجات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانيًا كما هو مبيَّن في الشكل المجاور. لاحظ أن هناك تجمعًا لدرجات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع الدرجات يشبه الجرس تقريبًا. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعًا طبيعيًا.



التوزيعات الطبيعية والملتوية في **التوزيع الاحتمالي المتصل** والذي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهنيات عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو **التوزيع الطبيعي**.

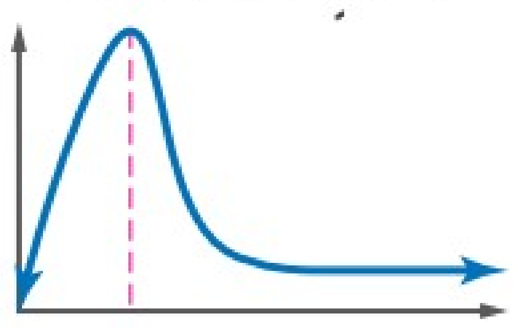
مفهوم أساسي — خصائص التوزيع الطبيعي

- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.



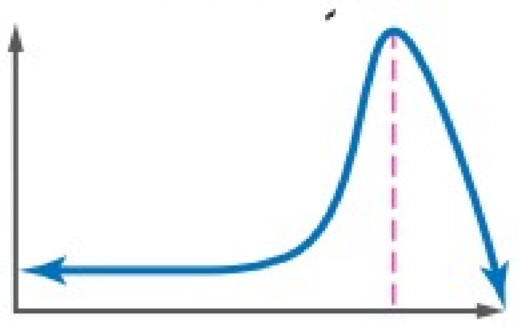
على الرغم من أن التوزيع الطبيعي متصل، فإن التوزيعات المنفصلة أيضًا يمكن أن يكون لها شكل التوزيع الطبيعي. ويمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمّى **توزيعات ملتوية**.

التواء موجب
(ملتوٍ إلى اليمين)



معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين.

التواء سالب
(ملتوٍ إلى اليسار)



معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.

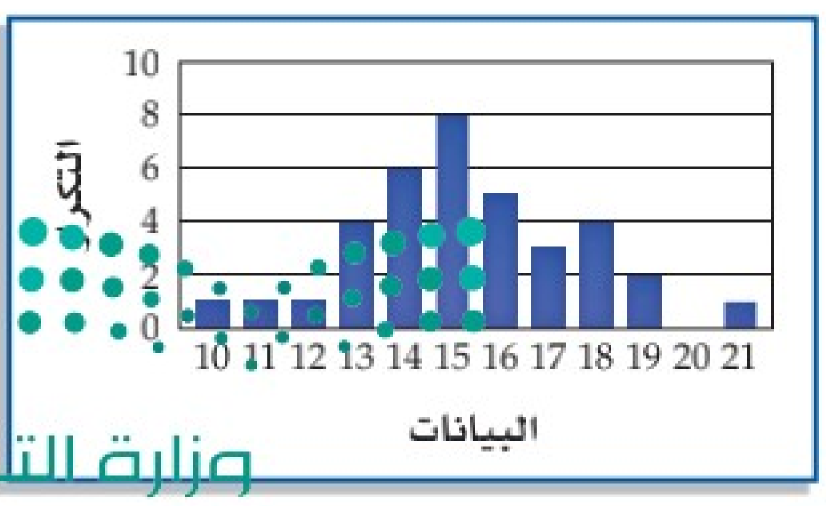
مثال 1 تصنيف بيانات التوزيع

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًا:

a)

البيانات	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
التكرار	1	1	1	4	6	8	5	3	4	2	1

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في الوسط، ويبدو كأنه إلى حد ما متماثل حول المتوسط، فإن البيانات تُعتبر موزَّعة توزيعًا طبيعيًا.

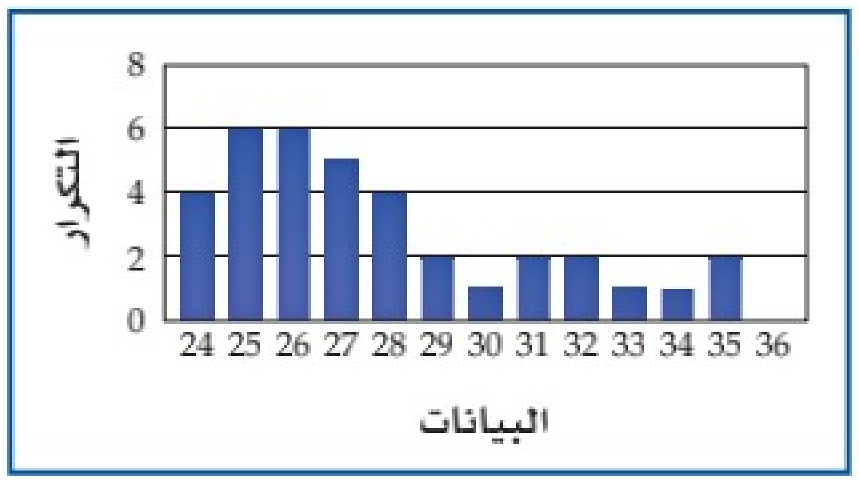


حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

(b

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في جهة اليسار ومنخفض في كل من الوسط وعلى اليمين، فإن التوزيع يبدو كأنه ملتوٍ إلى اليمين (التواء موجب).



تحقق من فهمك

1) حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

إرشادات للدراسة

«منفصل» مقابل «متصل»
يأخذ التوزيع الاحتمالي المنفصل عددًا محدودًا من القيم، وغالبًا ما تكون أعدادًا صحيحة. أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيأخذ عددًا غير محدد من القيم تنتمي إلى فترة متصلة. وفي حالة التوزيع الاحتمالي المتصل يكون احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة واحدة فقط مساويًا للصفر.

القانون التجريبي إن المساحة بين قيمتين من البيانات تمثِّل نسبة البيانات التي تقع بين هاتين القيمتين. ويمكن أن يستعمل القانون التجريبي لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، والتي تقع ضمن انحراف أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط.

مفهوم أساسي — القانون التجريبي

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

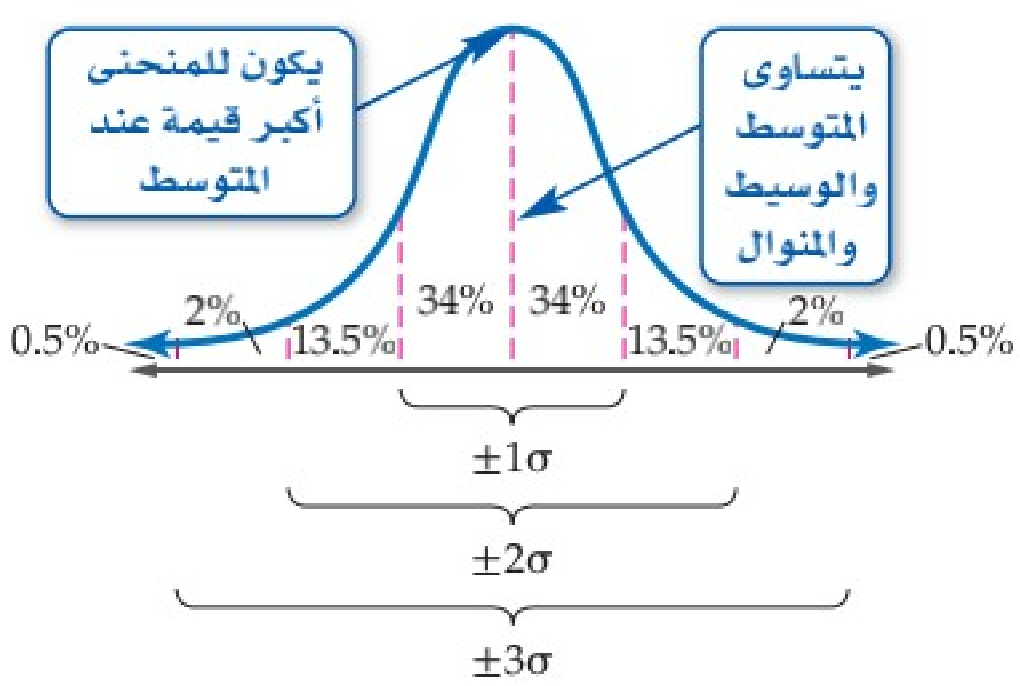
وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريبًا (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.



مثال 2 — التوزيع الطبيعي

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X تم اختيارها عشوائيًّا في هذا التوزيع عن 24، (أي أوجد $P(X > 24)$).

$\mu = 34, \sigma = 5$

الخطوة 1 أوجد القيم $\mu \pm \sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$ (وهي المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه المضاعفات الثلاثة الأولى للانحراف المعياري).

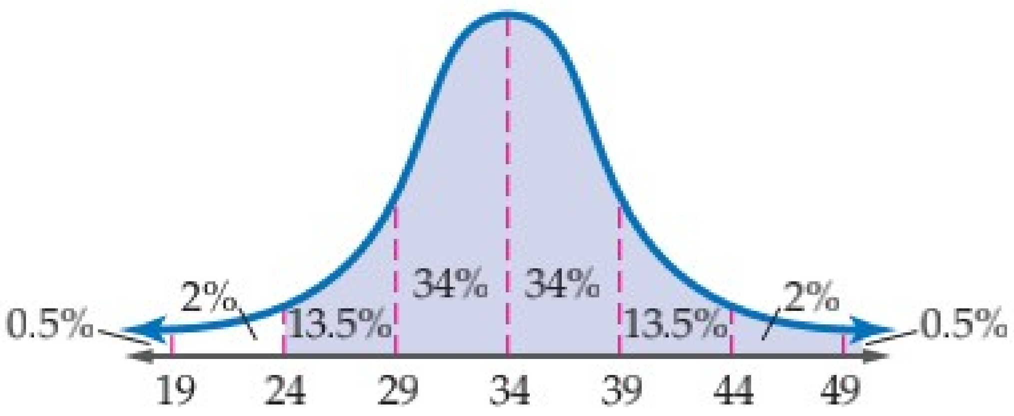
$\mu \pm \sigma = 34 \pm 5 = 29, 39$

$\mu \pm 2\sigma = 34 \pm 10 = 24, 44$

$\mu \pm 3\sigma = 34 \pm 15 = 19, 49$

إرشادات للدراسة

التوزيع الطبيعي
في الحالات جميعها يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا ليكون التوزيع طبيعيًّا تقريبًا.



الخطوة 2 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، وحدِّد عليه المتوسط $\mu = 34$ والقيم السابقة.

الخطوة 3 ظلل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب.

الخطوة 4 احسب الاحتمال المطلوب:

$$P(X > 24) = (13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\% = 97.5\%$$

إذن: $P(X > 24) \approx 97.5\%$

تحقق من فهمك

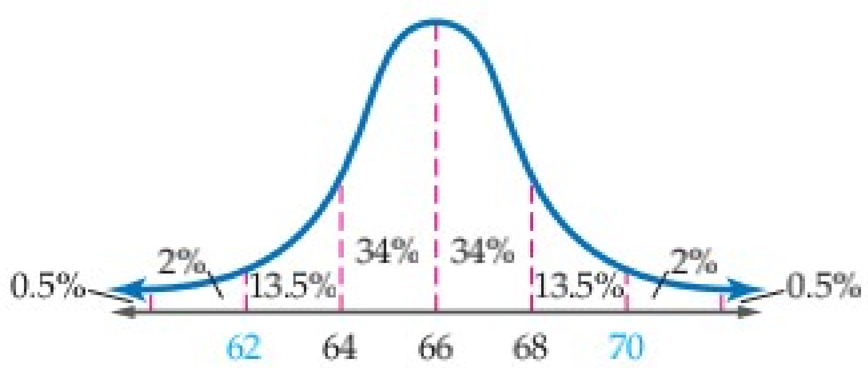
2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا في التوزيع الوارد في المثال **2** أقل من 49.

تُمَثَّل العينة التي يكون توزيعها توزيعًا طبيعيًّا بمنحنى طبيعي، وكأنها مجتمعًا.

مثال 3 من واقع الحياة — عينة موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا

أطوال: **توزّع أطوال 1800 يافع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66 in ، وانحراف معياري يساوي 2 in.**

a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

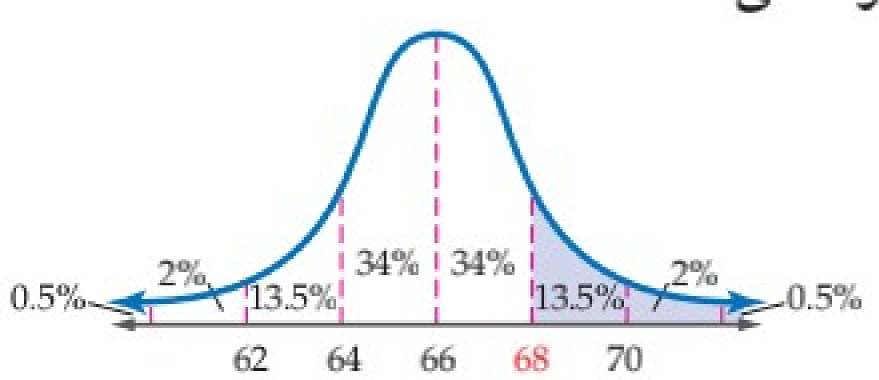


ارسم منحنى التوزيع الطبيعي.

تبعد كل من 70 , 62 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 62 , 70.

ولأن $1800 \times 95\% = 1710$، لذا يوجد 1710 يافعين تقريبًا تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in.

b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائيًّا، بحيث يزيد طوله على 68 in؟



من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزّع الأطوال على النحو الآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$$

إذن الاحتمال المطلوب يساوي 16% تقريبًا

تحقق من فهمك

درجات: **إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزَّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجرامًا، وانحراف معياري 10 كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :**

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجرامًا؟

3B) ما احتمال أن يتمّ اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟

تدرب وحل المسائل

1) **درجات:** يوضّح الجدول أدناه نتائج أحد الاختبارات (النهاية العظمى للاختبار 40). حدّد ما إذا كانت البيانات تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزّعة توزيعًا طبيعيًّا. (مثال 1)

فئات الدرجات	عدد الطلاب
13–15	12
16–18	27
19–21	29
22–24	19
25–27	8
28–31	1
32–35	1

2) حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول أدناه تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزعة توزيعًا طبيعيًّا:

عدد زوار المتنزهات	
عدد الزوار بالآلاف	عدد المتنزهات
3–4	10
5–6	2
7–8	2
9–10	1
11–12	1
13 فأكثر	4

3) تتوزّع مجموعة بيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 161، وانحراف معياري 12، أوجد أن يتم اختيار قيمة لـ X عشوائيًّا من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من149، أي أوجد $P(X < 149)$.
(مثال 2)

إذا توزّعت البيانات في الأسئلة 7-4 توزيعًا طبيعيًّا، وكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل منها كما هو موضّح، فأوجد الاحتمال المطلوب.

4) $\mu = 74 , \sigma = 6 , P(X > 86)$

5) $\mu = 13 , \sigma = 0.4 , P(X < 12.6)$

6) $\mu = 63 , \sigma = 4 , P(59 < X < 71)$

7) $\mu = 91 , \sigma = 6 , P(73 < X < 103)$

8) **مدارس:** أعطى عمران اختبارًا قصيرًا لطلبته البالغ عددهم (50) طالبًا، وكانت الدرجات موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 21، وانحراف معياري 2. (مثال 3)

a) ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 23 , 19؟

b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و25 ؟

9) **بطاريات السيارة:** إذا حُدِّد عمْرُ بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها باستعمال هذه البطارية، وعلمت أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 100000 km، وانحراف معياري 10000 km. وتنتج إحدى الشركات 20000 بطارية في الشهر، فأجب عما يأتي:

a) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يتراوح عمرها بين 90000 km – 110000 km؟

b) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يزيد عمرها على 120000 km؟

c) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يقلُّ عمرها عن 90000 km؟

d) ما احتمال أن تشتري بطارية عشوائيًّا، ويتراوح عمرها بين 80000 km – 110000 km؟

10) **صحة:** يتوزّع مستوى الدهنيات (الكولسترول) في فئة الشباب الذكور في إحدى الدول توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 158.3، وانحراف معياري 6.6

a) ما احتمال أن تقل نسبة الكولسترول عند الشباب الذكور عن 151.7؟

b) كم شخصًا تقريبًا من بين 900 شخص شملتهم الدراسة يتراوح مستوى الكولسترول عندهم بين 171.5 – 145.1؟

11) **طعام:** تتوزّع مدة صلاحية نوع معين من البطاطس توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 180 يومًا، وانحراف معياري 30 يومًا.

a) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 150 يومًا، 210 أيام؟

b) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 180 يومًا، 210 أيام؟

c) ما احتمال أن تقل مدة صلاحية المنتج عن 90 يومًا؟

d) ما احتمال أن تزيد مدة صلاحية المنتج على 210 أيام؟

12) **طول:** تتوزّع أطوال 880 طالبًا في إحدى الجامعات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 67 in، وانحرافٍ معياري مقداره 2.5 in

a) كم طالبًا تقريبًا يزيد طوله على 72 in ؟

b) ما احتمال أن تقع أطوال الطلاب بين 59.5 in و 69.5 in؟

13) **صناعة:** تُستعمل آلة لتعبئة عبوات بالمياه المعدنية، وتختلف كمية الماء اختلافًا ضئيلًا بين العبوات. إذا كان حجم الماء في 120 عبوة يتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 1.1 L، وانحراف معياري 0.02 L، فأجب عما يأتي:

a) كم عبوة تقريبًا يكون حجم الماء فيها أقل من 1.06 L؟

b) ما احتمال أن يكون حجم الماء في العبوات بين 1.08 L و 1.14 L؟

مسائل مهارات التفكير العليا

14) اكتشف الخطأ: تتوزّع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط مقداره 11.5 cm، وانحراف معياري مقداره 2.5 cm ومدى من 3.6 cm إلى 19.8 cm، وقد حاولت كل من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

مريم	أمينة
مدى البيانات 16.2cm، 68% من المدى يساوي تقريبًا 11cm، ويتوزّع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5cm، أي أن مدى 68% سيكون من 6cm إلى 17cm	تمتد النسبة 68% من $\mu-\sigma$ إلى $\mu+\sigma$ أي أن مدى 68% سيكون من 9cm إلى 14cm

15) تحدٍّ: في مستودع للأدوات الكهربائية عدد من المسجلات التي تعمل على البطارية. إذا كانت أعمار البطاريات تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي $8.0h$، وانحراف معياري $0.7\,h$، فما العدد التقريبي للمسجلات في المستودع إذا علمت أن هناك 8 مسجّلات يزيد عمر بطارياتها على $10.1h$؟

16) اكتب: اشرح الفرق بين التوزيعات الموجبة الالتواء، والتوزيعات السالبة الالتواء، والتوزيعات الطبيعية لمجموعة بيانات. أعطِ مثالًا على كل منها.

17) تبرير: بحسب القانون التجريبي، فإن معظم البيانات في التوزيع الطبيعي تقع ضمن الفترة $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$. هل هذا صحيح أم خاطئ؟ برِّر إجابتك.

18) مسألة مفتوحة: أوجد بيانات واقعية تبدو كأنها تتوزَّع توزيعًا طبيعيًّا، أعطِ خصائص هذا التوزيع فيما يتعلق بالمتوسط الحسابي، والانحراف المعياري. ومثِّل البيانات بيانيًّا.

19) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على توزيع احتمالي منفصل، وآخر متصل. وصف الفرق بينهما.

مراجعة تراكمية

20) طلاب: رُشِّح 3 طلاب من الصف الأول الثانوي، و11 طالبًا من الصف الثاني الثانوي لتوزيع بعض الطرود على الفقراء. إذا اختير من بينهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن تتضمّن العينة طالبين من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ (الدرس 4-7)

21) مسابقات: يبيِّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين شاركوا في المسابقات الثقافية، والذين لم يشاركوا من الصفوف: الأول والثاني والثالث الثانوي في مدرسة ما. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون قد شارك في المسابقات الثقافية علمًا بأنه من الصف الثالث الثانوي؟ (الدرس 3-7)

	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
المشاركون	7	9	6
غير المشاركين	23	20	22

22) جسور: جسر لعبور المشاة فوق مسطح مائي على شكل قطع مكافئ فتحته إلى أسفل، أوجد معادلة الجسر، مفترضًا أن نقطة الأصل على سطح الماء تحت رأس القطع. (مهارة سابقة)

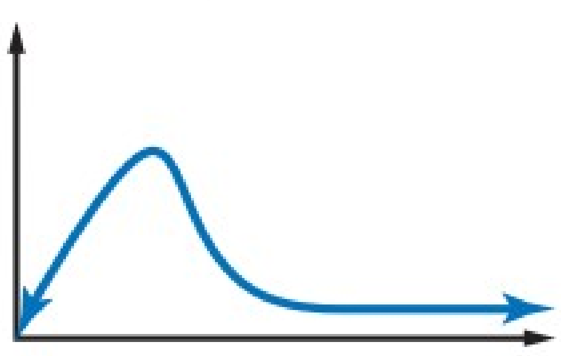
تدريب على اختبار

23) يتوزّع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 300 يوم، وانحراف معياري 40 يومًا. كم مصباحًا يقع عمره بين 260 يومًا، 340 يومًا؟

A 2500　　**C** 5000

B 3400　　**D** 6800

24) ما الوصف الأفضل لمنحنى التوزيع الاحتمالي الممثّل أدناه؟



A توزيع سالب الالتواء　　**C** توزيع طبيعي

B توزيع متماثل　　**D** توزيع موجب الالتواء

25) صناعة: تتوزَّع قياسات أقطار مجموعة من الأقراص المدمجة التي تصنعها إحدى الشركات توزيعًا طبيعيًّا بانحراف معياري مقداره 1 mm، وبمتوسط حسابي 120 mm.

a) ما احتمال أن يزيد طول قطر قرص اختير عشوائيًّا على 120 mm؟

b) إذا كانت الشركة تصنع 1000 قرص في الساعة، فما العدد التقريبي للأقراص المصنوعة في الساعة الواحدة، والتي يتراوح قطر كل منها بين 119 mm, 122 mm؟

معمل الجبر: القانون التجريبي والمئينات
The Empirical Rule and Percentiles

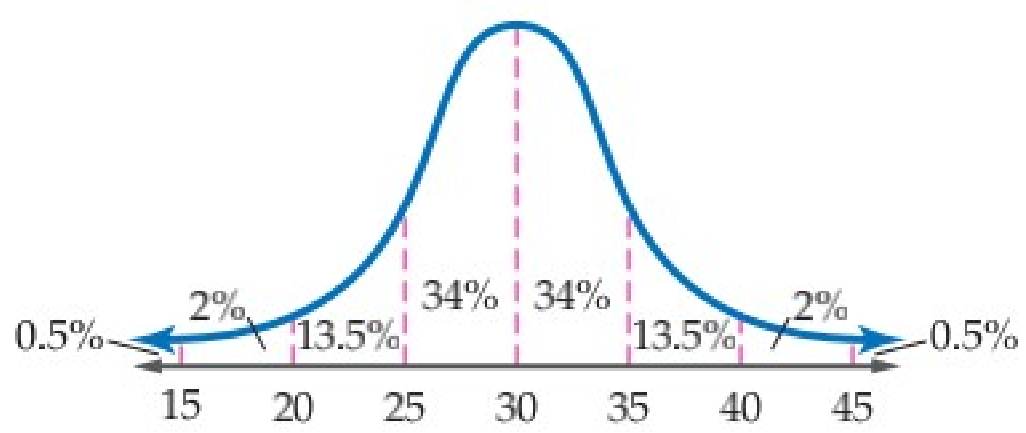
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

عند معرفة المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع طبيعي، تستنتج أن %68 ,%95 ,%99 من البيانات ستكون ضمن انحراف معياري واحد، أو انحرافين معياريين أو ثلاثة انحرافات معيارية عن المتوسط على الترتيب، وهذا ما يُسمّى القانون التجريبي. ويمكنك استعمال القانون التجريبي لتجد المئينات. والمئين n يقابل القيمة التي يقل عنها أو يساويها n % من قيم البيانات.

نشاط

في اختبار للرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي وُجد أن درجات الطلاب تتوزَّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 30 ، وانحراف معياري 5

الخطوة 1 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي لدرجات الطلاب المشابه للشكل المجاور، و عيّن عليه المتوسط وأيضًا المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه مضاعفات الانحراف المعياري كما هو موضح في الشكل.



الخطوة 2 الدرجة 30 هي المتوسط، وبالرجوع إلى الشكل يمكن أن ترى أن %50 من الدرجات أقل من الدرجة 30 أو تساويها؛ لذا يمكنك القول: إن الدرجة 30 تقابل المئين 50 .

ما المئين الذي يقابل الدرجة 35؟

الخطوة 3 ما المئين الذي يقابل الدرجة 40؟

الخطوة 4 ما الدرجة التي تقابل المئين 99.5؟

تمارين:

في كلٍّ من السؤالين التاليين، ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، ثم أجب عن المطلوب.

1) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الفيزياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 15، وانحراف معياري 2 ، فأوجد المئينات التي تقابل الدرجات 21 , 15 , 13 .

2) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الكيمياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 40 ، وانحراف معياري 4 ، فأوجد الدرجات التي تقابل المئينات 84 , 50 , 99.5 .

7-6

التوزيعات ذات الحدين
Binomial Distributions

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست استعمال نظرية ذات الحدين. (مهارة سابقة)

والآن:

- أميّز تجربة ذات الحدين.
- أجد الاحتمالات باستعمال التوزيع ذي الحدين ومفكوكه.

المفردات:

تجربة ذات الحدين
binomial experiment

التوزيع ذو الحدين
binomial distribution

لماذا؟

في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصده الخصم في 36% من محاولاته، وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.

التوزيع ذو الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل أو يمكن جعلها كذلك. فمثلًا في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة إلى صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعّال أو غير فعّال.

مفهوم أساسي — تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- **يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة (المرات).**
- **كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S، أو فشل F.**
- **$P(S)$ "ويرمز له بالحرف p" هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ "ويرمز له بالحرف q" هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1-p$.**

ويُمثّل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

مثال 1 — تمييز التجربة ذات الحدين

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

a) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائيًّا، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الطلاب الذين يملكون الحاسبة البيانية، فإن:

هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين وهي:

- كل طالب تم اختياره يُمثّل محاولة، وعملية اختيار الطلاب الستة تتكون من محاولات مستقلة.
- للتجربة نتيجتان متوقعتان: الطالب يملك الحاسبة البيانية S، أو لا يملكها F.
- احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S) = 0.68$.

وفي هذه التجربة $n = 6, p = P(S) = 0.68$. احتمال الفشل $q = 1 - p$، أي أن: $q = 1 - 0.68 = 0.32$. ويُمثّل X عدد الطلاب الذين يملكون حاسبة بيانية من الّذين تم اختيارهم، أي أن:

$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخُصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض. سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

في هذه التجربة، كل بطاقة يتم سحبها تُمثّل محاولة، وبما أنه يتم الاحتفاظ بالبطاقة التي تم اختيارها (السحب دون إرجاع)، فإن المحاولات غير مستقلة، واحتمال النجاح في كل محاولة يختلف عن الأخرى؛ لذا فإن هذه التجربة ليست ذات حدين.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحَّد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمَّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

1B) أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.

يُسمى توزيع النتائج المتوقَّعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة $_nC_X p^X q^{n-X}$ التي تمثل حدًّا في مفكوك $(p+q)^n$.

مفهوم أساسي — صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {_nC_X}\, p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!\,X!}\, p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

مثال 2 من واقع الحياة — التوزيع ذو الحدين

اختبار: **في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال ، فكوِّن جدولًا للتوزيع ذي الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.**

هذه تجربة ذات حدين فيها: $n = 5, p = 0.35, q = 1 - 0.35 = 0.65$. استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحساب احتمال كل قيمة ممكنة من قيم X مستعملًا صيغة احتمال ذات الحدين.

$$P(0) = {_5C_0} \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$

$$P(1) = {_5C_1} \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$

$$P(2) = {_5C_2} \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$

$$P(3) = {_5C_3} \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$

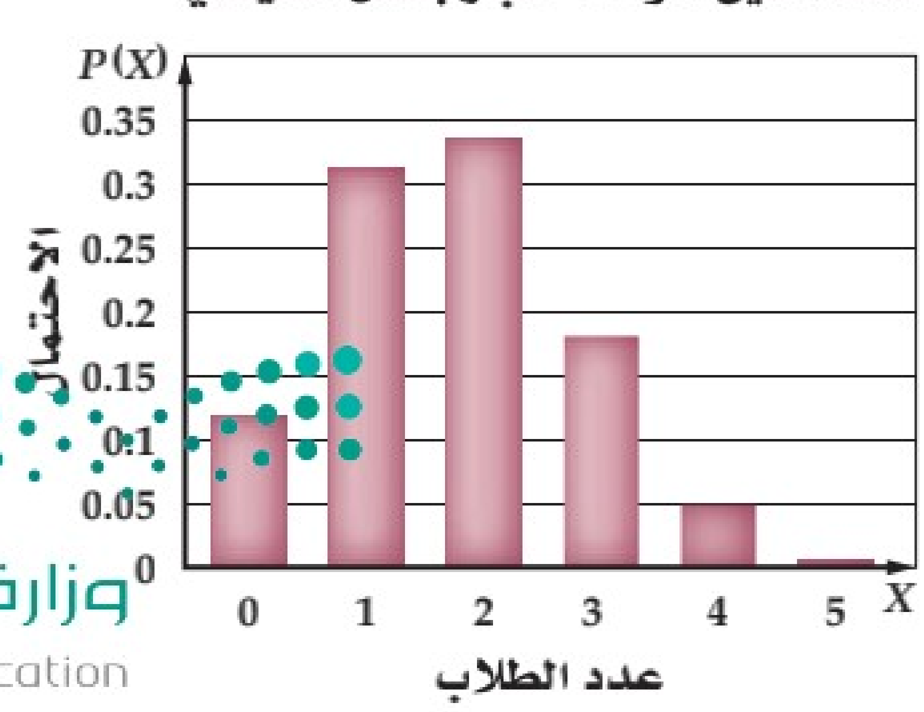
$$P(4) = {_5C_4} \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$

$$P(5) = {_5C_5} \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

وفيما يأتي جدول التوزيع ذي الحدين للمتغير X ، وتمثيله بالأعمدة.

X	P(X)
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005

عدد الذين أدُّوا الاختبار بشكل اعتيادي



إرشاد تقني

حساب احتمال ذات الحدين

لإيجاد كل احتمال لذات الحدين على الحاسبة البيانية؛ استعمل الأمر binomPdf(n, p, x) من قائمة تطبيق الحاسبة .

مثال: لإيجاد p (1) اكتب binomPdf (5, 0.35, 1) ثم اضغط Enter فتحصل على 0.312386 كما يمكن إيجادها باستعمال الآلة الحاسبة العلمية كما يأتي:

اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين:

5 SHIFT ÷ 1 × 0.35 x■ 1 ▸ × (1 − 0.35) x■ (5 − 1) =

فتظهر الشاشة 0.3123859375

إرشادات للدراسة

اختيار الاحتمالات
أحيانًا يكون من الأسهل أن تجد احتمال الفشل وتطرح هذه النتيجة من 1 لتجد احتمال النجاح، لأنهما احتمالان متتامان.

لإيجاد احتمال أن 3 طلاب على الأقل أجابوا بنعم، أوجد $P(3) + P(4) + P(5)$.

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$ احتمال 3 طلاب على الأقل

$= 0.181 + 0.049 + 0.005$ $P(3) = 0.181, P(4) = 0.049, P(5) = 0.005$

$= 0.235 = 23.5\%$ بسِّط

تحقق من فهمك

2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائيًّا، وتم سؤالهم عمَّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكوِّن التوزيع ذا الحدين، ومثِّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم.

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي **المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين**

يحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي X في التوزيع ذي الحدين بالصيغ الآتية:

المتوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

مثال 3 المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

اختبار: **بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال 2 . أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، ثُمَّ فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.**

استعمل صيغ المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين. في هذه التجربة ذات الحدين $n = 5, p = 0.35, q = 0.65$.

$$\mu = np$$
$$= 5(0.35) = 1.75$$
$$\sigma^2 = npq$$
$$= 5(0.35)(0.65) = 1.1375$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1375} \simeq 1.0665$$

متوسط التوزيع يساوي 1.8 تقريبًا، ويعني أن خريجَين تقريبًا من أصل 5 أجابوا بنعم. كل من التباين والانحراف المعياري يساوي 1.1 تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2 ، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة ذات الحدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي **تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي**

في التوزيع ذي الحدين عندما تُمثّل n عدد المحاولات ، واحتمال النجاح p ، واحتمال الفشل q ، ويكون $n\,p \geq 5$, $n\,q \geq 5$ ، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = n\,p$ ، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{n\,p\,q}$.

إرشادات للدراسة

التقريب إلى التوزيع الطبيعي

يُستعمل التقريب إلى التوزيع الطبيعي؛ لأنه مع زيادة n يصبح استعمال التوزيع ذي الحدين لإيجاد الاحتمال عملية معقدة وصعبة.

مثال 4 تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفّذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟

في الدراسة المسحية التي نفَّذها بلال، عدد الخريجين الذين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة يتبع التوزيع ذا الحدين، حيث:

$$n = 300\,,\ p = 0.64\,,\ q = 0.36$$

وحيث إن:

$$n\,p = 300\,(0.64) = 192 > 5$$

$$n\,q = 300\,(0.36) = 108 > 5$$

يمكنك استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:

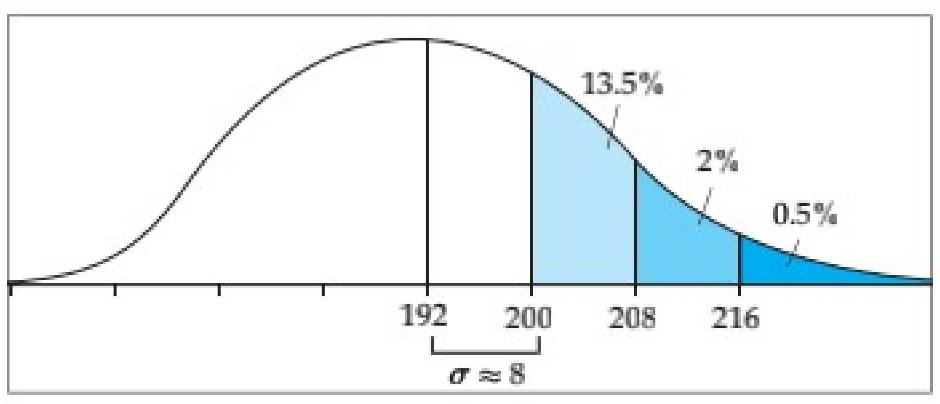
$\mu = n\,p$ المتوسط للتوزيع الطبيعي

$= 300(0.64) = 192$ $\quad n = 300\,,\ p = 0.64$

$\sigma = \sqrt{n\,p\,q}$ الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي

$= \sqrt{300(0.64)(0.36)}$ $\quad n = 300,\ p = 0.64,\ q = 0.36$

≈ 8.31 استعمل الآلة الحاسبة



العدد 200 أكبر من المتوسط بمقدار انحراف معياري واحد تقريبًا كما هو مبين في الرسم أعلاه؛ لذا يكون احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل يساوي 16% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألَّا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليلِ عدد أيام الإجازة الصيفية؟

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيِّن السبب. (مثال 1)

1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

2) أُلقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

3) سألت 15 شخصًا عن أعمارهم، والمتغير العشوائي X يدل على أعمار هؤلاء الأشخاص.

4) صندوق به 52 كرة، منها 13 كرة حمراء، و13 كرة زرقاء، و13 كرة بيضاء، و13 كرة صفراء. سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع. والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

كوّن التوزيع ذا الحدين لكلِّ متغير عشوائي مما يأتي، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد المتوسط، وفسّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري. (المثالان 2, 3)

5) إذا كان % 89 من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائيًّا من هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني.

6) بيّنت دراسة أن % 26 من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم. إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًّا، وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم.

7) أفادت دراسة إحصائية أن % 65 من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم. إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا ممن يمتلكون سيارات، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان في أثناء قيادة سياراتهم.

8) **أعمال صيفية:** تبيَّن في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية، لكن منذرًا قدّر أن النسبة أقل من ذلك؛ لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائيًّا. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟ (مثال 4)

9) **رخصة قيادة:** اعتمادًا على إحدى الدراسات المسحية السابقة، إذا علمت أن 85% من طلاب إحدى الجامعات لديهم رخص قيادة سيارة، فما احتمال أن يكون 6 طلاب على الأقل من بين 10 تم اختيارهم عشوائيًّا لديهم رخص قيادة سيارة؟

10) **كرة قدم:** كسب فريق لكرة القدم 75.7% من مبارياته. أوجد احتمال أن يكسب 7 مباريات على الأقل من بين مبارياته العشر القادمة.

11) **رياضيون:** وفق بعض الدراسات الحديثة، إذا علمت أن 80% من طلاب المدارس الثانوية يمارسون رياضة واحدة على الأقل في مدرستهم، إذا اختير 6 طلاب عشوائيًّا، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الذين يمارسون رياضة على الأقل.

a) فأوجد الاحتمالات المرتبطة بعدد الطلاب الذي يمارسون رياضة واحدة على الأقل.

b) ما احتمال ألا يزيد عدد الذين يمارسون الرياضة عن طالبين؟

12) **غسيل سيارات:** يقوم بعض الأشخاص بغسيل السيارات لزبائن بعض المجمعات التجارية مقابل أجر معين. وقد أفادت دراسة مسحية أن 65% من الزبائن يدفعون أكثر من الحد الأدنى لأجرة غسيل سياراتهم. ما احتمال أن يدفع أربعة على الأقل من خمسة زبائن مبلغًا أكثر من الحد الأدنى للأجر.

13) **حوافز دعائية:** تضع شركة للعصائر حوافز بحيث إن 30% من علب العصير تربح علبة مجانية، وقد اشترت سعاد 10 علب. مثّل بالأعمدة البيانية التوزيع الاحتمالي للتوزيع ذي الحدين إذا كان المتغير العشوائي يدل على عدد علب العصير الرابحة.

14) **برامج دينية:** بناءً على دراسة مسحية سابقة، إذا علمت أن 70% من الأشخاص تحت سن العشرين يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل في التلفاز. إذا استطلع خليل رأي 200 شخص تحت سن 20 سنة، فما احتمال أن 146 شخصًا منهم على الأقل يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل؟

إذا علمت أن نسبة النجاح في توزيع ذي حدين 60%، ويوجد 18 محاولة، فأجب.

15) ما احتمال ألا توجد أي محاولة ناجحة؟

16) ما احتمال أن توجد 12 محاولة فاشلة؟

17) **تنس طاولة:** كسب لاعب 85% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية. أوجد الاحتمالات الآتية:

a) أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة.

b) أن يكسب مباراتين على الأقل من بين المباريات الخمس القادمة.

c) أن يخسر مباراة واحدة على الأقل في مبارياته الخمس القادمة.

لكل من التوزيعات ذات الحدين الآتية، يدلّ الرمز n على عدد المحاولات، ويدلّ الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة. أوجد احتمال الحصول على X من النجاحات.

18) $n = 8, p = 0.3, X \geq 2$

19) $n = 10, p = 0.2, X > 2$

20) $n = 6, p = 0.6, X \leq 4$

21) $n = 9, p = 0.25, X \leq 5$

22) $n = 10, p = 0.75, X \geq 8$

23) $n = 12, p = 0.1, X < 3$

مسائل مهارات التفكير العليا

24) **تحدٍّ:** في تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي، إذا علمت أن احتمال وجود 66 – 60 نجاحًا يساوي 34%، وكان $\overline{x} = 60$ ، واحتمال النجاح 36%، فكم كان عدد المحاولات؟

25) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك. « من الأفضل أن تجد احتمال الفشل وتطرحه من 1 لتجد احتمال النجاح ».

26) **مسألة مفتوحة:** صف حالة من أنشطة المدرسة أو المجتمع ينطبق عليها التوزيع ذو الحدين، وحدّد عدد المحاولات المستقلة (n) ، وكلًّا من: احتمال النجاح واحتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

27) **اكتب:** فسّر العلاقة بين التجربة ذات الحدين والتوزيع ذي الحدين.

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت المعادلة في كلٍّ ممايأتي تمثّل دائرة، أو قطعًا مكافئًا، أو قطعًا ناقصًا، أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية. وبرِّر إجابتك: (مهارة سابقة)

28) $x^2 + 4y^2 = 100$

29) $5y^2 - 10x = 0$

30) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 16 = 0$

31) **سرعة:** وضع نظام لمراقبة سرعة السيارات وتسجيلها في شارع قريب من إحدى المدارس، إذا توزّعت هذه السرعات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 37 mi/h، وانحراف معياري 4 mi/h، فكم سيارة كانت تسير بسرعة تقل عن 33 mi/h في عينة حجمها 425 سيارة؟ (الدرس 5-7)

32) **دراسة جامعيَّة:** أوضح استطلاع في إحدى المدارس الثانوية أن 88% من الطلاب يريدون إكمال دراستهم الجامعية. وقد قام نواف باستطلاع آراء 150 طالبًا تم اختيارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون في العينة 132 طالبًا على الأقل يرغبون في استكمال دراستهم الجامعية؟ (الدرس 5-7)

تدريب على اختبار

33) **اختبار:** تقدّمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع)، ما احتمال أن تحصل على:

a) 7 أسئلة صحيحة الإجابة؟

b) 9 أسئلة صحيحة الإجابة؟

c) 0 سؤال صحيح الإجابة؟

d) 3 أسئلة صحيحة الإجابة؟

34) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أُجريت العملية ثلاث مرات؟

A) 0.001　　B) 0.1

C) 0.9　　D) 0.999

الفصل 7

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العينة والمجتمع (الدرسان 7-1, 7-2)

- تكون العينة متحيزة إذا صُمِّمت لصالح نواتج معينة .
- تكون العينة غير متحيزة إذا كانت عشوائية.

الارتباط والسببية

- عندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين فإن كلًّا منهما تؤثر في الأخرى، وعندما يوجد سببية، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى.

هامش خطأ المعاينة

- عند سحب عينة حجمها n من مجتمع، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.

الانحراف المعياري	
المجتمع	العينة
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2}{n-1}}$

الاحتمال المشروط (الدرس 7-3)

- الاحتمال المشروط: هو احتمال وقوع حادثة معينة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.
- الجداول التوافقية : هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى تكرارًا نسبيًّا، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط .

التوزيعات الاحتمالية (الدروس 7-4, 7-5, 7-6)

المفهوم	الوصف
منفصل	عدد محدَّد من النواتج الممكنة
متصل	عدد غير محدَّد من النواتج الممكنة
طبيعي	منحنيات متماثلة
ملتوي	منحنيات غير متماثلة
تجربة ذات الحدين	تجربة احتمالية يكون لها نتيجتان فقط

المفردات

الدراسة المسحية ص 44
المجتمع ص 44
تعداد عام ص 44
العينة ص 44
المتحيزة ص 44
غير المتحيزة ص 44
الدراسة القائمة على الملاحظة ص 45
الدراسة التجريبية ص 45
المجموعة التجريبية ص 45
المجموعة الضابطة ص 45
الارتباط ص 46
السببية ص 46
التحليل الإحصائي ص 50
المتغير ص 50
بيانات في متغير واحد ص 50
مقياس النزعة المركزية ص 50
المَعْلَمة ص 50
الإحصائي ص 50
هامش خطأ المعاينة ص 51
مقاييس التشتت ص 51
التباين ص 51
الانحراف المعياري ص 51
الاحتمال المشروط ص 55
الجدول التوافقي ص 56
التكرار النسبي ص 56
النجاح ص 60
الفشل ص 60
المتغير العشوائي ص 61
المتغير العشوائي المنفصل ص 61
التوزيع الاحتمالي ص 61
التوزيع الاحتمالي المنفصل ص 61
الاحتمال النظري ص 62
الاحتمال التجريبي ص 62
القيمة المتوقعة ص 62
التوزيع الاحتمالي المتصل ص 66
التوزيع الطبيعي ص 66
التوزيع الملتوي ص 66
تجربة ذات حدين ص 72
التوزيع ذو الحدين ص 73

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) ________ لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط فضاء العينة باحتمالات نواتج فضاء العينة .

2) عندما توجد علاقة بين حادثتين، فإنه يوجد ________ بينهما.

3) الدراسة المسحية تكون ________ إذا صُمّمت لصالح نواتج معينة.

4) إذا أُعطيت مجموعة معالجة شكلية لا أثر لها في النتيجة، فإن هذه المجموعة تُسمّى ________ .

5) يُحدّد ________ الفترة التي تبين الفرق في الاستجابة بين العينة والمجتمع .

الفصل

7 دليل الدراسة والمراجعة

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة (الصفحات 44 - 49)

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك:

6) يتم اختيار كل عاشر متسوّق يخرج من مجمع تجاري؛ لمعرفة إن كان مرتاحًا أو مطمئنًا لشرائه من المجمع.

7) يتم اختيار كل عاشر طالب يخرج من المدرسة؛ لمعرفة أحب المواد الدراسية إليه في المدرسة.

8) يطلب أحد مطاعم الوجبات السريعة إلى زبائنه أن يكملوا استبانة حول أفضل مطعم للوجبات السريعة.

حدِّد ما إذا كانت كل حالة تحتاج إلى دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية.

9) اختر 100 طالب نصفهم يعمل جزئيًّا بعد الدراسة، وقارن بين الأوساط لدرجاتهم.

10) اختر 100 شخص، وقسّمهم إلى نصفين عشوائيًّا، ودع إحدى المجموعتين تتناول وجبات قليلة الدسم، بينما تتناول الأخرى وجبات اعتيادية. وقارن النتائج؛ لمعرفة أثر الوجبات القليلة الدسم على صحة الجسم.

مثال 1

اختار صاحب وكالة للسيارات 100 زبون عشوائيًّا قاموا بإجراء الصيانة الدورية لسياراتهم في الوكالة حديثًا، وطرح سؤالًا عليهم حول نوعية الخدمة التي تُقدّمها الوكالة. هل يُمثّل الزبائن الذين تم اختيارهم عينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

غير متحيزة ؛ لأنّ لكل شخص من زبائن الوكالة الفرصة نفسها لأن يكون من بين العينة.

مثال 2

وزّع معلم الرياضيات طلابه مجموعتين عشوائيًّا، وطبّق عليهم اختبارًا، حيث طلب من المجموعة الأولى أداء تمارين رياضية قبل الاختبار، بينما أعطى المجموعة الثانية الاختبار دون أن يطلب منهم تأدية أي تمارين رياضية، وقارن نتائجهم في الاختبار. هل هذه الدراسة دراسة مسحية أم دراسة قائمة على الملاحظة أم دراسة تجريبية؟ وإذا كانت تجريبية، فاذكر كلًّا من المجموعتين الضابطة والتجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة متحيزة أم لا.

دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي الأولى، والضابطة هي الثانية، والدراسة التجريبية متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

7-2 التحليل الإحصائي (الصفحات 50 - 54)

11) **فصول السنة :** في دراسة مسحية عشوائية شملت 3446 شخصًا، ذكر 34% منهم أن الربيع هو أفضل فصول السنة لديهم. ما هامش الخطأ في المعاينة؟

12) **سباحة :** في أثناء تمرين السباحة، قاس خالد الأزمنة التي استغرقها في كل مرة لقطع مسافة 400m ، وسجل النتائج الممثلة في الجدول أدناه. أوجد الانحراف المعياري للأزمنة التي حققها.

الزمن بالثواني					
307	312	308	320	311	301
302	304	308	309	315	313
306	314	316	313	313	311
309	306	310	319	326	329
309	314	318	315	318	320

مثال 3

قال 12% من عينة حجمها 2645 شخصًا: إن كرة القدم هي الأكثر تفضيلًا لديهم. ما هامش خطأ المعاينة ؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2645}}$$

$$\approx \pm 0.019$$

هامش خطأ المعاينة ±1.9% تقريبًا.

دليل الدراسة والمراجعة

7-3 الاحتمال المشروط (الصفحات 55 - 58)

13) **كرة طائرة:** يحصل طارق على نقطة في 65% من مرات قيامه بضربة الإرسال، ما احتمال ألا يحصل على نقطة في ضربة الإرسال الثانية علمًا بأنه حصل على نقطة في ضربة الإرسال الأولى؟

14) في الجدول أدناه إذا اختير طالب عشوائيًا فأجب عما يأتي:

	يلبس نظارات	لا يلبس نظارات
الأول الثانوي	6	15
الثاني الثانوي	5	22

a) ما احتمال أن يكون الطالب من الأول الثانوي علمًا بأنه يلبس نظارات؟

b) ما احتمال أن يكون من الذين لا يلبسون النظارات علمًا بأنه من الثاني الثانوي؟

مثال 4

دراسة: أوجد احتمال أن يأخذ طالب اختير عشوائيًا حصة إضافية علمًا بأنه طالب جديد.

	يأخذ حصصًا إضافية (E)	لا يأخذ حصصًا إضافية (X)
طالب جديد (N)	126	84
طالب قديم (O)	98	72

$$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$$ قانون الاحتمال المشروط

$$= \frac{126}{380} \div \frac{210}{380}$$ $P(E \cap N) = \frac{126}{380}, P(N) = \frac{210}{380}$

$$= \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$$ بسّط

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية (الصفحات 60 - 65)

قرعة الألعاب: خلط يوسف بطاقات الألعاب جميعها في صندوق، حيث تشكّلت البطاقات من 12 بطاقة لكرة القدم، 8 بطاقات لكرة الطائرة، 5 بطاقات لكرة السلة وجميعها متماثلة. إذا تم اختيار 3 بطاقات بصورة عشوائية، فأوجد احتمال كل من:

15) P(3 بطاقات للكرة الطائرة)

16) P(3 بطاقات لكرة القدم)

17) P(بطاقة لكرة السلة وبطاقتان للكرة الطائرة)

18) P(بطاقتان لكرة السلة وبطاقة لكرة القدم)

19) **بطاقات:** مجموعة بطاقات مرقّمة مكوّنة من 3 بطاقات عليها الرقم 9، 4 عليها العدد 10، 5 عليها الرقم 6، 4 عليها الرقم 5، وبطاقتين على كلٍّ منهما الرقم 2، وبطاقة عليها الرقم 3. إذا سحبت بطاقة عشوائيًّا من مجموعة البطاقات، فما القيمة المتوقّعة لهذه البطاقة؟

مثال 5

لدى حمزة 5 كتب في حقيبته، هي الرياضيات والكيمياء واللغة الإنجليزية واللغة العربية والتاريخ. إذا قام بترتيبها على رفّ في صف واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن تأتي كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار ؟

الخطوة 1 حدّد عدد النجاحات.

$_3P_3$ مكان الكتب الثلاثة إلى اليسار

$_2P_2$ أمكنة الكتابين الآخرين

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s .

$$s = {}_3P_3 \cdot {}_2P_2 = 3! \cdot 2! = 12$$

الخطوة 2 أوجد عدد عناصر فضاء العينة $s + f$.

$$_5P_5 = 5! = 120$$ $s + f = 120$

وتمثل عدد الترتيبات الممكنة للكتب الخمسة على الرف.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$$P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{12}{120} = 0.1$$ احتمال النجاح

احتمال وضع كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار يساوي 0.1 أو 10%.

دليل الدراسة والمراجعة

7-5 التوزيع الطبيعي (الصفحات 66 - 71)

في كلٍّ من السؤالين الآتيين توزيع طبيعي بمتوسط وانحراف معياري.
أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما.

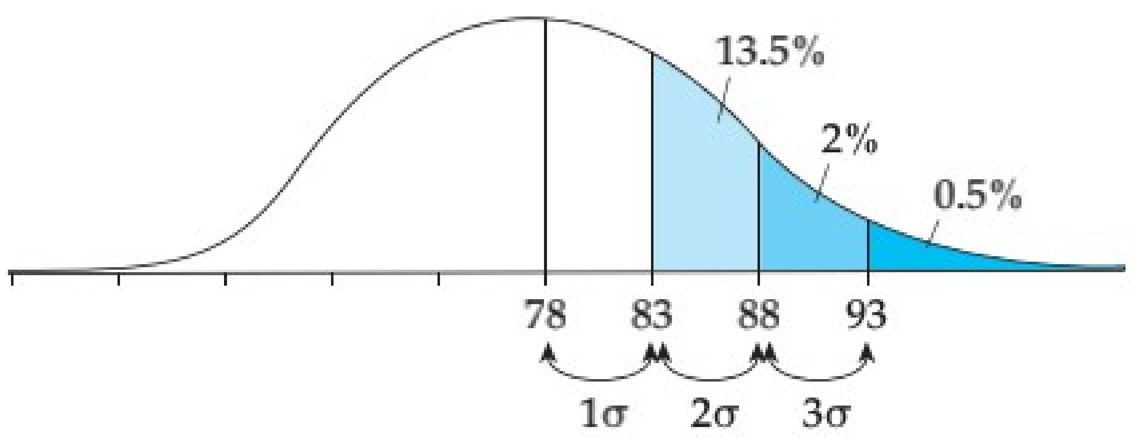
20) $\mu = 121, \sigma = 9, P(X > 103)$

21) $\mu = 181, \sigma = 12, P(X > 169)$

22) **زمن الركض:** أزمنة الركض لمسافة 40 m لفريق كرة القدم المدرسي تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 4.7s، وانحراف معياري 0.15s . ما نسبة اللاعبين الذين يقل زمن قطعهم المسافة عن 4.4s؟

مثال 6

تتوزّع مجموعة من البيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 78، وانحراف معياري 5 . أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X اختيرت عشوائيًّا عن 83 .



بما أن $\mu + \sigma = 78 + 5 = 83$ ؛ لذا فإن الاحتمال المطلوب يكون مساويًا $13.5\% + 2\% + 0.5\% = 16\%$

7-6 التوزيعات ذات الحدين (الصفحات 72 - 77)

23) **أشخاص مشهورون:** في إحدى الدراسات تَبيّن أن 63% من الشباب يفضلون أداء أحد الرياضيين المشهورين. إذا اختير 5 من الشباب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يفضلون أداء هذا الرياضي أو لا.

a) إذا مثَّل المتغير العشوائي X عدد الشباب الذين يفضِّلون أداء هذا الرياضي، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثِّله بالأعمدة.

b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من 2 من الشباب يفضِّلون أداء هذا الرياضي.

24) **ساعات:** أشارت دراسة مسحية للبالغين أن ما نسبته 74% من البالغين يلبسون ساعة يد. وقد قام بكر باستطلاع رأي 200 شخص من البالغين عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون 160 شخصًا على الأقل ممن شملهم الاستطلاع يلبسون ساعة يد؟

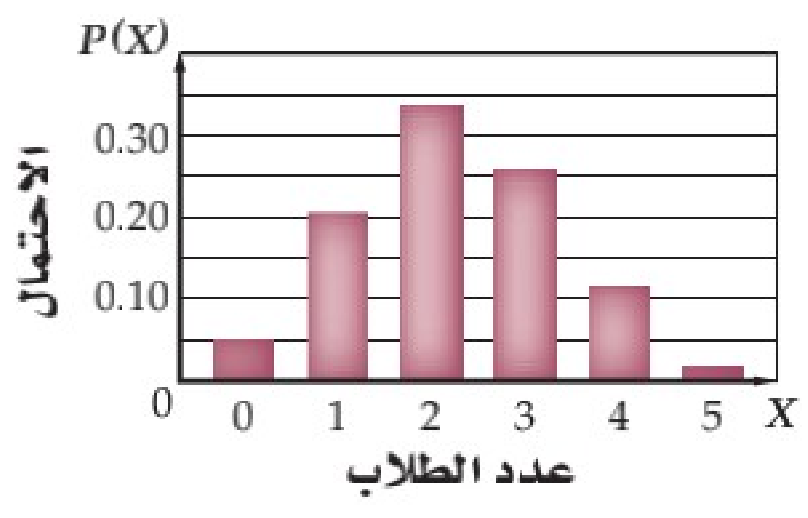
مثال 7

رسم هندسي: أُجريت دراسة في إحدى المدارس، فَتبيّن أن 45% من الطلاب يستطيعون رسم مخروط. إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي، ومثَّل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين لديهم مقدرة على رسم مخروط، فأجب عمّا يأتي:

a) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثِّله بالأعمدة.

في هذه المسألة $n = 5, p = 0.45, q = 1 - 0.45 = 0.55$.

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0.050	0.206	0.337	0.276	0.113	0.018



b) أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع.

$\mu = np = 5(0.45) = 2.25$

$\sigma^2 = npq = 5(0.45)(0.55) = 1.2375$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.2375} \simeq 1.1124$

تطبيقات ومسائل

25) حدِّد ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثِّل دراسة تجريبيّة، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبيّة، ثم بيّن إن وجد تحيز أو لا: (الدرس 1-7)

a) اختر 100 طالب نصفهم يأتي إلى المدرسة مبكرًا، وقارن بين تحصيلهم في مادة معينة.

b) اختر 100 موظف، واقسمهم نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى دورة في اللغة الإنجليزية، أما الأخرى فلا تخضعها لأي دورة تدريبية.

26) اختير 10 طلاب بصورة عشوائية من الصف الثالث الثانوي، وقيست أطوالهم بالسنتمترات فكانت كما يلي:

170, 165, 155, 168, 177, 180, 168, 167, 160, 161

بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم اوجد الانحراف المعياري لهذه الأطوال. (الدرس 2-7)

27) سجِّلت أعداد الطلاب ذوي العيون الزرقاء أو غير الزرقاء في أحد المعاهد.

	سنة أولى	سنة ثانية
عيون زرقاء	5	10
عيون ليست زرقاء	95	80

إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن تكون عيونه زرقاء علمًا بأنه في السنة الثانية. (الدرس 3-7)

28) رُميت 3 قطع نقد مرة واحدة. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، ثم مثِّله بالأعمدة. (الدرس 4-7)

29) **سكة حديد:** إذا كانت الفترات الزمنية للانتظار التي يقضيها 16000 مسافر في إحدى محطات سكك الحديد موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 72 min، وانحراف معياري 15 min، فأوجد نسبة المسافرين الّذين ينتظرون أكثر من 42 min. (الدرس 5-7)

30) **إجازات:** في دراسة مسحية سابقة وجد أن ما نسبته 70% من العاملين يأخذون إجازاتهم السنوية في الصيف، لكن محسنًا يعتقد أن هذا الرقم مبالغ فيه، فقام باستطلاع رأي 650 عاملًا عشوائيًّا. ما احتمال ألا يأخذ أكثر من 420 عاملًا إجازاتهم في الصيف؟ (الدرس 6-7)

اختبار الفصل

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية تصف ارتباطًا أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

1) عندما يرى محمود البرق، فإنه يسمع الرعد بعد ذلك.

2) عندما يركض نايف عند مدخل المدرسة، فإنه يكون متأخرًا عن المدرسة.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك:

3) استطلع صاحب مخزن يبيع من خلال الشبكة العنكبوتية زبائنه عن أهمية وجود الإنترنت في المنزل.

4) يختار معلم 5 أسماء لطلاب يدرسهم؛ لإلقاء كلمة الصباح بعد أن يقوم بوضع الأسماء جميعها في سلة ويخلطها .

أي مقاييس النزعة المركزية يصف كلًّا من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

5)

درجات اختبار				
4	4	3	3	3
4	5	5	4	4
3	3	3	3	4
3	3	3	4	4
4	5	3	4	3

6)

الطول بالبوصة				
61	64	62	61	64
63	65	61	66	83
84	63	62	65	61
61	62	66	63	61

فيما يأتي المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منها:

7) $\mu = 54, \sigma = 5, P(X > 44)$

8) $\mu = 35, \sigma = 2.4, P(X < 37.4)$

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية زرقاء، و8 كرات حمراء، و 12 خضراء، وجميعها متماثلة، سحبت كرتان واحدة تلو الأخرى، أوجد الاحتمال لكل من:

9) الكرة الثانية حمراء، علمًا بأن الكرة الأولى زرقاء دون إرجاع.

10) الكرة الثانية زرقاء، علمًا بأن الكرة الأولى خضراء مع الإرجاع.

11) **اختبارات:** أعطى المعلم أيمن طلابه الفرصة لإعادة أحد الاختبارات، كما عقد درس مراجعة اختياري يوم الخميس قبل إعادة الاختبار لمن يرغب. بعض الطلاب تحسَّن أداؤهم، والبعض الآخر لم يتحسن، والجدول أدناه يبين ذلك. إذا اختير طالب عشوائيًّا، فأوجد:

	تحسن	لم يتحسن
حضر المراجعة	12	3
لم يحضر المراجعة	4	6

a) احتمال أن يكون قد تحسّن علمًا بأنه حضر المراجعة.

b) احتمال أنه لم يحضر المراجعة علمًا بأنه لم يتحسّن.

12) **اختيار من متعدد:** شارك 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، وَ 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في السحب على 5 جوائز. إذا كان السحب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الرابحون 3 من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟

A 0.46% تقريبًا

B 0.25% تقريبًا

C 70% تقريبًا

D 30% تقريبًا

13) سُحبت كرتان معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات زرقاء، وكرتين حمراوين. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

14) **طقس:** أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام السبعة القادمة 40% . أوجد احتمال أن يسقط المطر في يومين من هذه الأيام على الأقل.

15) **حديقة:** يخطط يعقوب لزرع 24 شجرة أزهار، إذا علمت أن البذور التي أحضرها لأزهار من اللونين الأبيض والأزرق، وأنها لم تزهر بعد، ولكنه يعلم أن احتمال الحصول على زهرة زرقاء 75% ، فما احتمال حصوله على 20 زهرة زرقاء على الأقل؟

الفصل
8

النهايات والاشتقاق
Limits and Differentiation

فيما سبق:

درستُ النهايات ومُعدلات التغيّر.

والآن:

- أَحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أَجدُ مُعدلات التغيّر اللحظية.
- أَجدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود، وأحسب قيمها.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمالِ التكامل المحدد.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

لماذا؟

الأفعوانية: يُعد الاشتقاق وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيّر غير الثابتة، فإذا ركبت الأفعوانية يومًا، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.

قراءة سابقة: استعمل أسئلة اختبار منتصف الفصل؛ لتساعدك على توقّع محتوى النصف الأول من الفصل.

التهيئة للفصل 8

رابط الدرس الرقمي

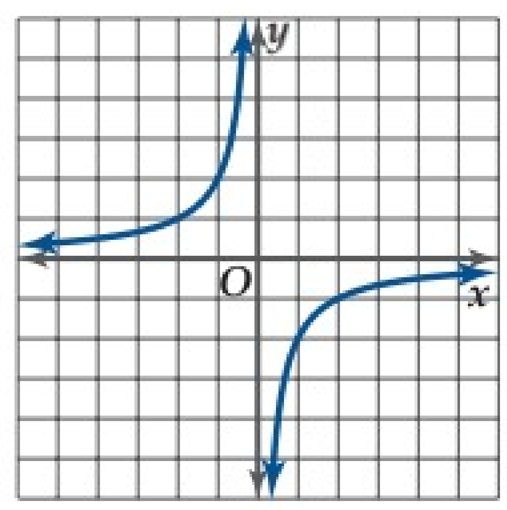
www.ien.edu.sa

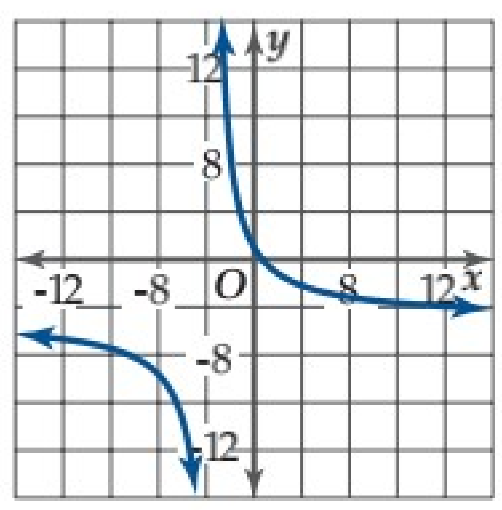
اختبار سريع

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

1) $q(x) = -\frac{2}{x}$

2) $m(x) = \frac{7 - 10x}{2x + 7}$





3) **صناعة :** يمكن تقدير معدل التكلفة بالريال لإنتاج x قطعة من منتج ما باستعمال الدالة $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. صف سلوك الدالة باستعمال التمثيل البياني للحاسبة البيانية عندما تقترب x من موجب مالانهاية.

4) أوجد متوسط مُعدّل تغيّر الدالة $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6$ ، على الفترة $[-4, -1]$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

5) $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2 + 1}$

6) $h(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 10}$

7) $f(x) = \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x + 2)(x - 4)}$

8) $g(x) = \frac{x^2 - 16}{(x - 2)(x + 4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي:

9) $8, 3, -2, -7, \ldots$

10) $5, -1, -7, -13, \ldots$

11) $5, -10, 20, -40, \ldots$

12) $-28, -21, -14, -7, \ldots$

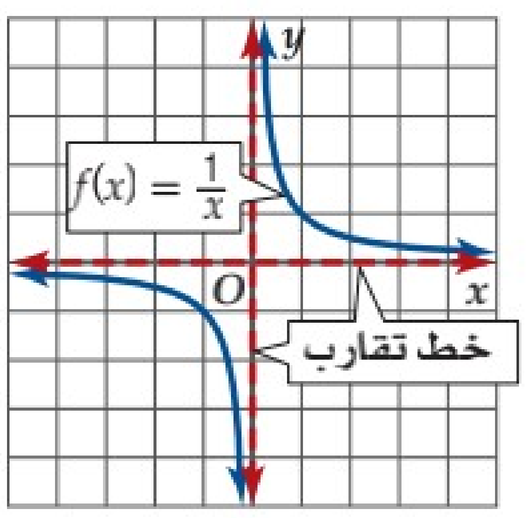
مراجعة المفردات

النهاية (limit)

الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.

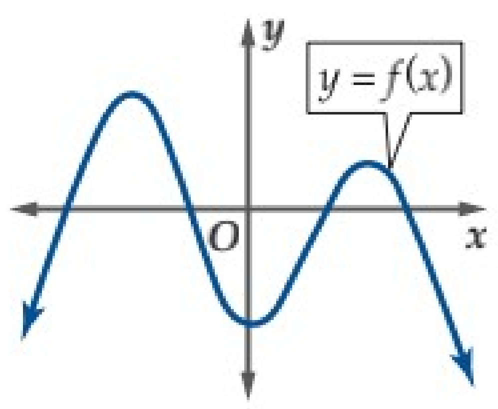
خطوط التقارب (asymptotes)

خط يقترب من منحنى الدالة دون أن يصله.



الدالة المتصلة (continuous function)

تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.



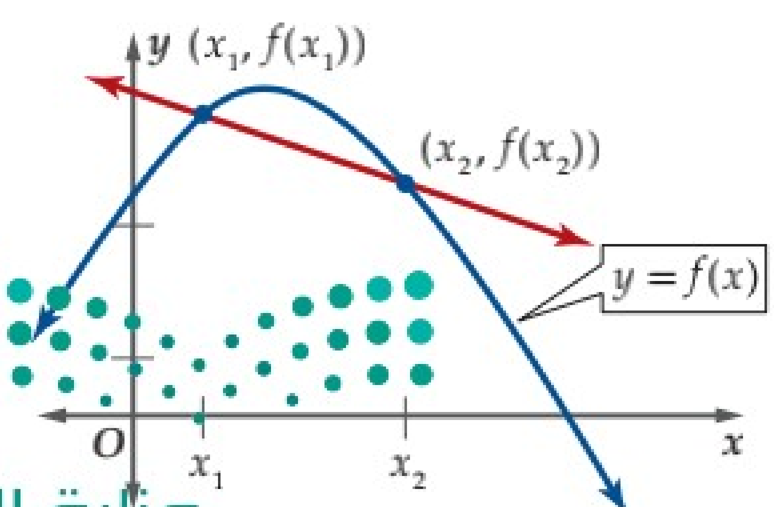
$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

عدم الاتصال القابل للإزالة (removable discontinuity)

نقاط عدم اتصال قابلة للإزالة تحدث غالبًا عندما يكون بين بسط ومقام الدالة النسبية عوامل مشتركة.

متوسط معدل التغير (average rate of change)

متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة $f(x)$ هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.



8-1

تقدير النهايات بيانيًّا
Estimating Limits Graphically

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن:
- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

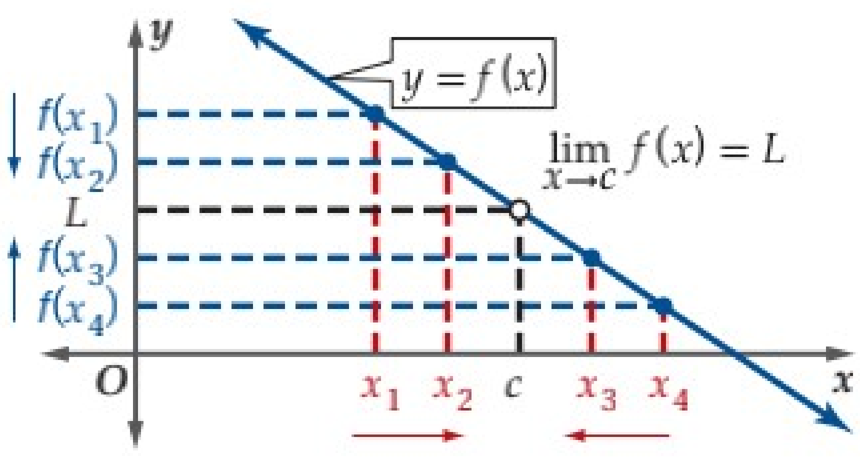
المفردات:
النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

لماذا؟
هل هناك نهايات للأرقام المسجَّلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجَّل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة 5.05 m. ويمكن استعمال الدالة: $f(x) = \frac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م ، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

تقدير النهايات عند قيم محددة: يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:
- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x.

وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.



تعلمت سابقًا أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين ، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L ، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c؛ أي $\lim_{x \to c} f(x)$، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًّا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.

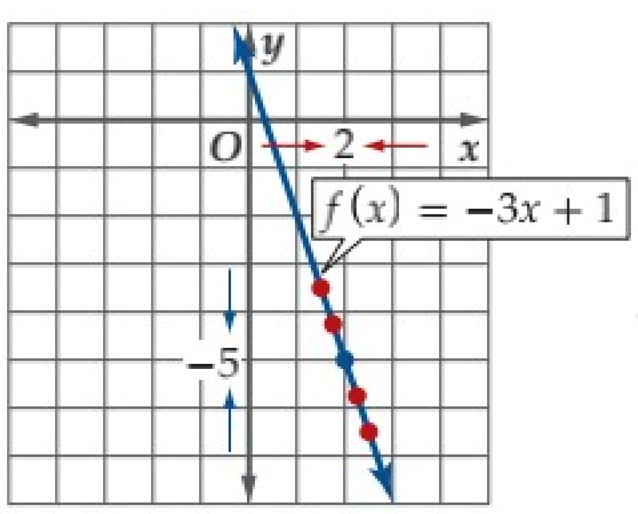
مثال 1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

التحليل بيانيًّا: مثِّل الدالة الخطية $y = -3x+1$ بيانيًّا باستعمال النقطتين $(0, 1), (1, -2)$.

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -3x + 1$، أنه كلما اقتربت x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد 5 – ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن :

$\lim_{x \to 2}(-3x + 1) = -5$.



التعزيز عدديًّا: كوِّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

	x تقترب من 2 →				← x تقترب من 2		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تاريخ الرياضيات
ثابت بن قرة
(221هـ–288هـ)
من أوائل من فكروا بعلم التفاضل والتكامل، حيث أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران القطع المكافئ حول محوره.

تحقق من فهمك
قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

1A) $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$ **1B)** $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$

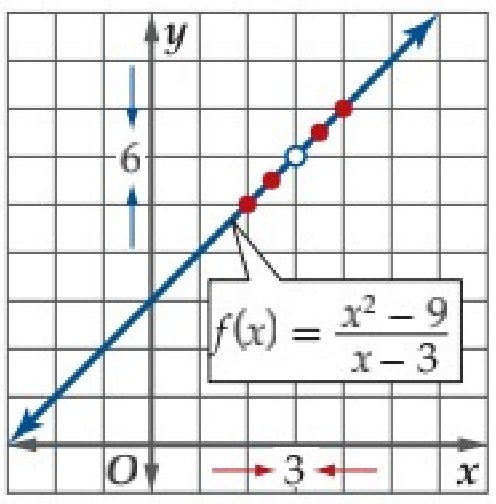
في المثال 1 ، لاحظ أن $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ هي نفسها $f(2)$، إلا أن نهاية الدالة لا تساوي دائمًا قيمة الدالة.

مثال 2 تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدولِ قيم.

التحليل بيانيًا:

مجال الدالة $R-\{3\}$



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 3، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

التعزيز عدديًا:

كوِّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ⟶ ⟵ x تقترب من 3

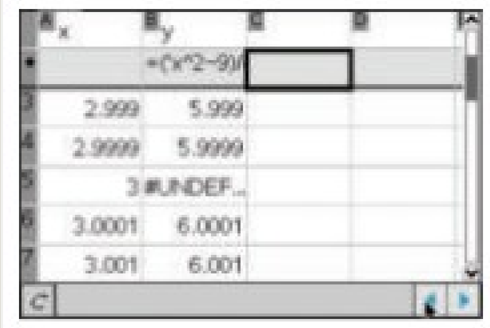
x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيِّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

إرشاد تقني

جداول

لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire ، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة on ، ثم اختيار الجدول بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة .



تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك من خلال جدول قيم.

(2A $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

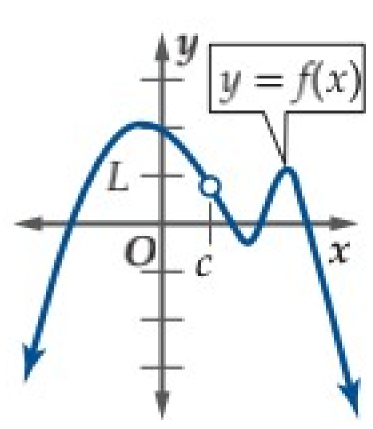
(2B $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$

في المثال 2 ، لاحظ أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم x من العدد 3، على الرغم من أن $f(3) \neq 6$. فالعبارة $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ غير معرّفة عندما $x = 3$. وهذه الملاحظة توضِّح مفهومًا مهمًّا في النهايات.

مفهوم أساسي عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

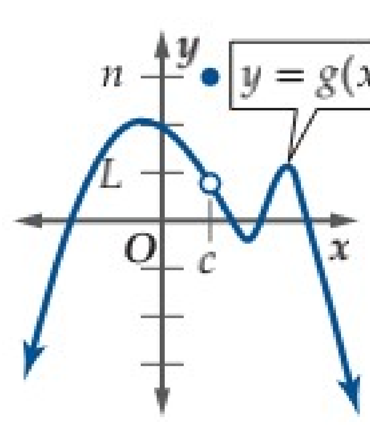
التعبير اللفظي: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة:



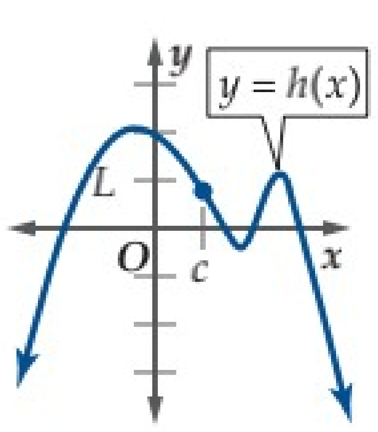
$\lim_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرفة



$\lim_{x \to c} g(x) = L$

$g(c) = n$



$\lim_{x \to c} h(x) = L$

$h(c) = L$

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم ، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

تنبيه!

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار للدالة

لمناقشة النهاية من اليمين لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرَّفة على يمين c على فترة (c, b). ولمناقشة النهاية من اليسار لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرَّفة على يسار c على فترة (a, c).

مفهوم أساسي — النهايات من جهة واحدة

النهاية من اليمين	النهاية من اليسار
إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين، فإن: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L_1$ ، وتقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 ، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار، فإن: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ : نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين** ، وما يعنيه كونها موجودة.

مفهوم أساسي — النهاية عند نقطة

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$ ،

إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

مثال 3 — تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

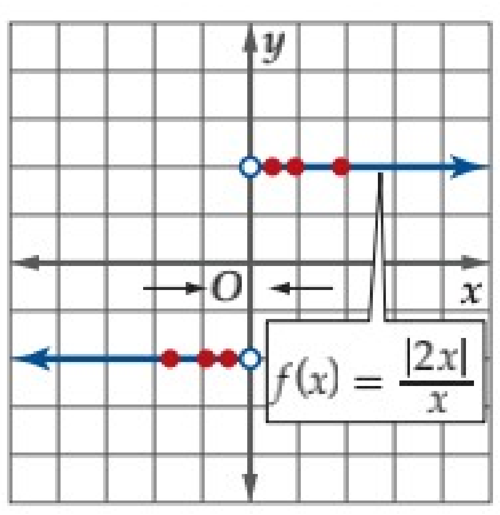
قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

إرشادات للدراسة

وصف النهاية

إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين، فإننا نقول: إن النهاية غير موجودة.

(a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x|}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|2x|}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|2x|}{x}$

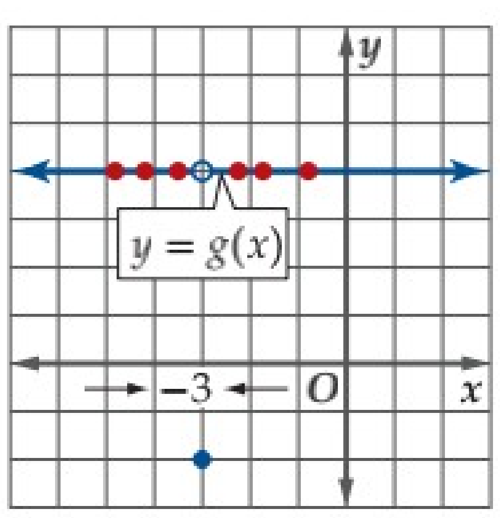


يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين ، فإن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

(b $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x)$ ، حيث $g(x) = \begin{cases} 4 & , \ x \neq -3 \\ -2 & , \ x = -3 \end{cases}$



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أن:

$$\lim_{x\to -3^+} g(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x\to -3^-} g(x) = 4$$

وبما أن النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان ، فإن $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.

✓ تحقق من فهمك

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

(3A $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ، حيث: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \ x < 1 \\ 2x + 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

(3B $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$ ، حيث: $g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \ x < -2 \\ -x^2 & , \ x \geq -2 \end{cases}$

قراءة الرياضيات

السلوك غير المحدود

تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \to c$، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

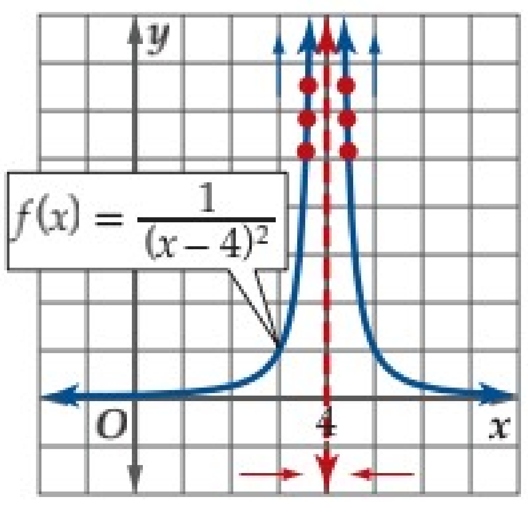
إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن:



$$\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 4، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلًّا من النهايتين من اليسار ومن اليمين ∞. لذا فإن $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2}$ لا تساوي عددًا حقيقيًّا، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2} = \infty$.

التعزيز عدديًا:

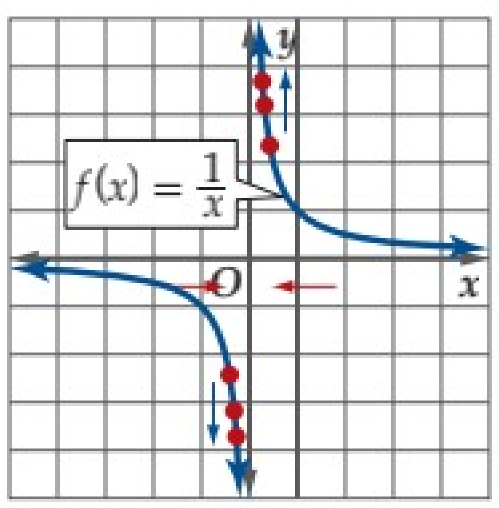
x تقترب من 4 ← | → x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 4 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ المجاور أن:



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار، قلَّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين.

إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين. لذا فإن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ غير موجودة، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من 0 ← | → x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

تنبيه!

النهايات غير المحدودة

من الضروري أن نفهم أن العبارتين $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ هما فقط وصف للحالة التي بسببها $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين حقيقيين.

✔ تحقق من فهمك

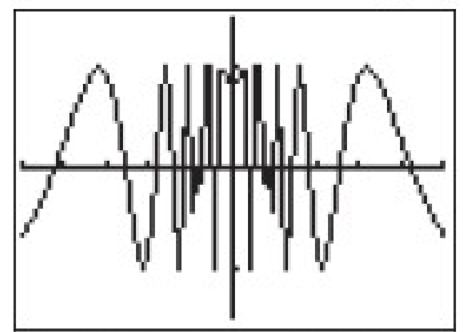
قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

4A) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4}{x-3}$

4B) $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{2}{x^4}$

إرشاد تقني

التذبذب اللانهائي
خاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية تفيد غالبًا في توقع قيمة النهاية للدالة، إلا أنه لا يمكنك الاعتماد عليها دائمًا. فهي تعتمد على عدد محدود من النقاط في تمثيل المنحنى، كما في المثال 5 المبيَّن تمثيله أدناه .



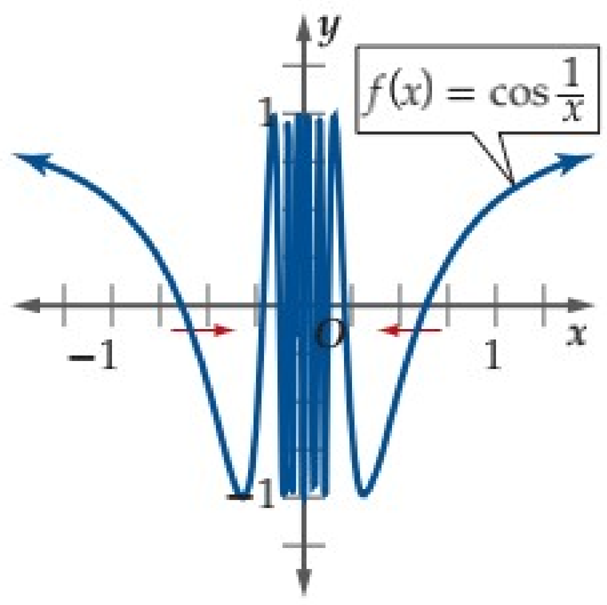
$[-0.25, 0.25]$ scl: 0.05 by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

فالتمثيل بالحاسبة البيانية لم يظهر أن للدالة عددًا لا نهائيًا في التذبذبات بالقرب من الصفر.

لا تكون النهاية موجودة أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

مثال 5 النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ إذا كانت موجودة.



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين 1 ، -1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0، مما يعني أنه لأي قيمة x_1 قريبة من الصفر ، بحيث $f(x_1) = 1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من الصفر مثل x_2 ، بحيث $f(x_2) = -1$ ، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر x_3، بحيث $f(x_3) = -1$، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4) = 1$.

أي أن $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ غير موجودة.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

5A) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

5B) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 \sin x)$

نلخِّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

ملخص المفهوم أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- **عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.**
- **عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c من اليمين، أو العكس.**
- **عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.**

تقدير النهاية عند المالانهاية: درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

مفهوم أساسي النهايات عند المالانهاية

- **إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن:**
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- **إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن:**
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

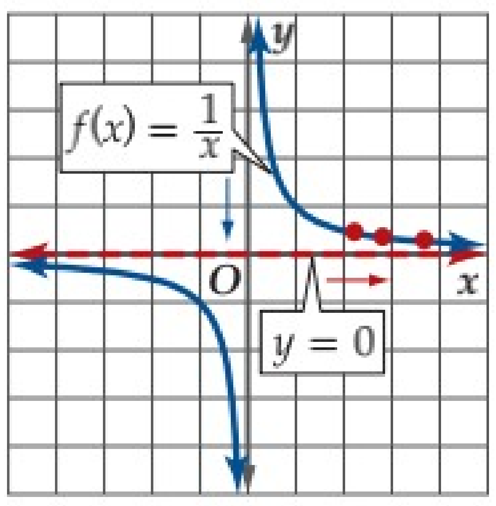
درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$

مثال 6 تقدير النهاية عند المالانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ، فكلما زادت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.

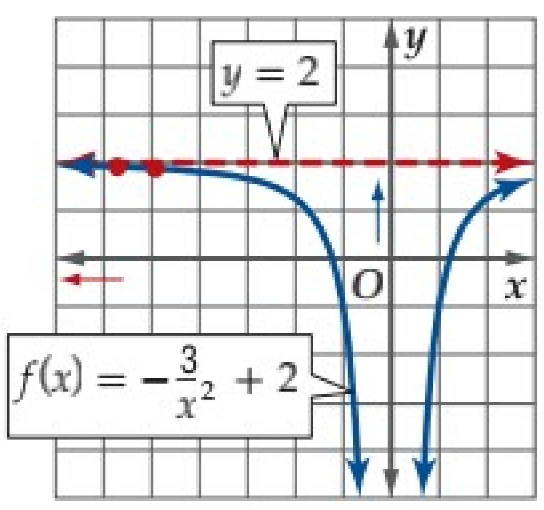
التعزيز عدديًا:

x تقترب من ∞ ⟵

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right)$



التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -\frac{3}{x^2} + 2$ المجاور أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right) = 2$ ، فكلما قلّت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.

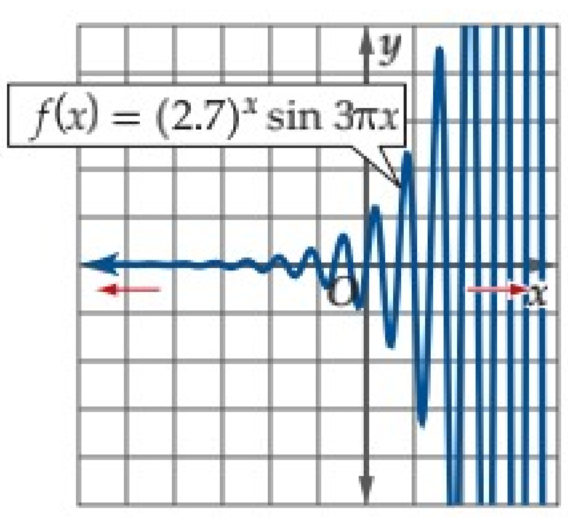
التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$

x	-10000	-1000	-100	-10
$f(x)$	1.99999997	1.999997	1.9997	1.97

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x \, , \, \lim\limits_{x \to \infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$



التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = (2.7)^x \sin 3\pi x$ المجاور أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x = 0$ ، فكلما قلّت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 .
في حين يبيّن التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x \to \infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$ غير موجودة ، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.

التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$ x تقترب من ∞

x	-17.1	-10.8	-10.1	0	10.1	50.1	99.1
$f(x)$	3.4×10^{-8}	-0.00002	-0.00004	0	1.8×10^4	3.3×10^{21}	-4.5×10^{42}

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x.

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 0$ ، وتشير النهاية في مثال 6b إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 2$.

تنبيه!

السلوك المتذبذب

إن التذبذب اللانهائي للدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. فإذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين، فالنهاية غير موجودة، أما إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين، فالنهاية موجودة.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(6A $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$ **(6B** $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x$ **(6C** $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

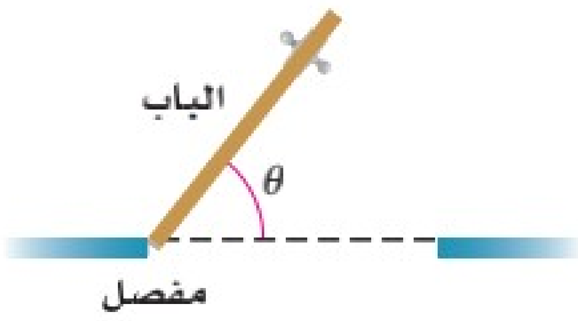
يمكنك استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 7 من واقع الحياة تقدير النهاية عند المالانهاية

الربط مع الحياة

الأنظمة الهيدروليكية هي أحد أنظمة نقل القدرة التي تستعمل طاقة السوائل لقيادة أو تحريك الأجزاء المتحركة في النظام الهيدروليكي. وتستعمل في العديد من المجالات، ومنها فرامل السيارات والأبواب الثقيلة وغيرها.

a) هيدروليك: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُرِكَ لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ تمثِّل زاوية فتحه θ بعد t ثانية. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

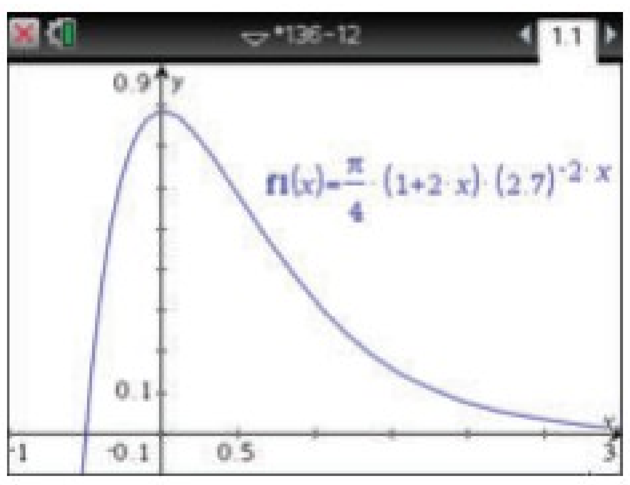


قدِّر النهاية:

مَثِّل الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

لاحظ أنه كلما زادت قيم t، فإن قيم الدالة $\theta(t)$ تقترب من العدد 0.

أي أن $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)=0$.



[−1, 3] scl: 0.5 by [−0.1, 0.9] scl: 0.1

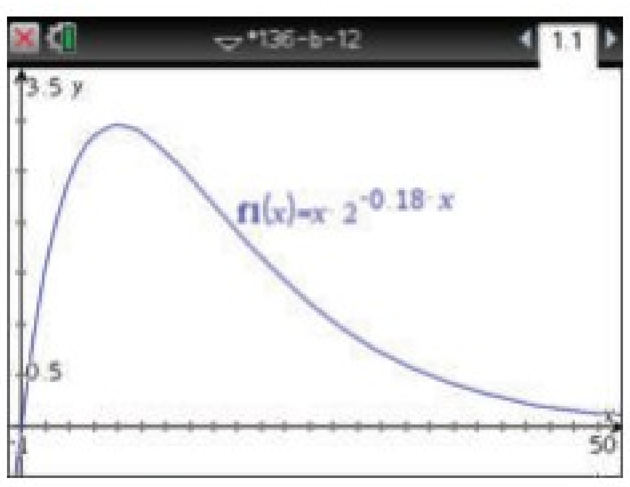
فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن هي 0 درجة بالراديان. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول ، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.

b) دواء: يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل مللتر بالعلاقة $C(t)=t2^{-0.18t}$ ، حيث t الزمن بالساعات بعد حقن المريض. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}C(t)$ ، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مَثِّل الدالة $C(t)=t2^{-0.18t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زادت قيمة t فإن منحنى الدالة يقترب من 0، أي أن $\lim\limits_{t\to\infty}C(t)=0$.



[−1, 50] scl: 2 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية هي 0 ، وتعني في هذه المسألة أنه مع مرور الزمن، فإن تركيز الدَّواء سيصبح قريبًا من الصفر في دم المريض.

إرشاد تقني

استعمل الآلة الحاسبة للوصول إلى شكل مناسب للتمثيل البياني للدالة في الآلة الحاسبة، يمكنك استعمال بعض ميزات الآلة. بدءًا من مفتاح menu، يمكنك استعمال خاصية 4: تكبير/تصغير النافذة واختيار 1: إعدادات النافذة، لتحديد مدى القيم وطول فترة التدريج لكلٍّ من x, y ، كذلك يمكن اختيار 3: تكبير ، 4: تصغير لتصغير وتكبير التمثيل البياني، حتى يمكن الحصول على شكل مناسب للدالة. كما يمكن استعمال خاصية 5: تتبع المسار لتتبع قيم الدالة؛ مما يساعد على التوصل لتقدير قيمة النهاية.

تحقق من فهمك

(7A كهرباء: يزوِّد مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يُعطى بالعلاقة $V(t)=165\sin 120\pi t$ ، حيث t الزمن بالثواني. قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

(7B أحياء: عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبًا وفاكهةً وخميرةً فإن عدد الذبابات بعد t يوم يُعطى بالعلاقة $P(t)=\frac{230}{1+56.5(2.7)^{-0.37t}}$ ، قدِّر $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

تدرب وحل المسائل

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. إرشاد:" يمكنك استعمال الآلة البيانية للتمثيل البياني". (المثالان 1, 2)

1) $\lim_{x\to 5}(4x-10)$

2) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^5-2x^3+3x^2\right)$

3) $\lim_{x\to -2}(x^2+2x-15)$

4) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

5) $\lim_{x\to 0}[5(\cos^2 x-\cos x)]$

6) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

7) $\lim_{x\to 6}(x+\sin x)$

8) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+x-20}{x+5}$

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 3)

9) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x}$

10) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|4x|}{x}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|}$

12) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

13) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{|2x+1|}{x}$

14) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}$

15) $\lim_{x\to 0^-}(\sqrt{-x}-7)$

16) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

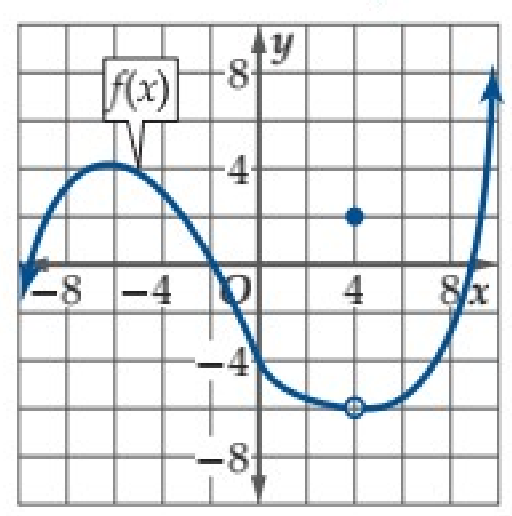
17) $\lim_{x\to 0}\frac{|3x|}{2x}$

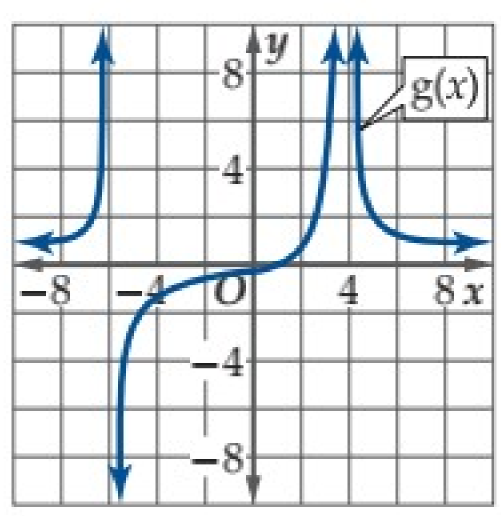
18) $\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x^2-1}$

19) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\begin{cases} x-5 & , \ x<0 \\ x^2+5 & , \ x\ge 0\end{cases}$

20) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & , \ x<0 \\ \frac{2x}{x} & , \ x\ge 0\end{cases}$

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 4-1)





21) $\lim_{x\to -4} f(x)$

22) $\lim_{x\to 4} g(x)$

23) $\lim_{x\to 4} f(x)$

24) $\lim_{x\to -6} g(x)$

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 6-4)

25) $\lim_{x\to -4}\frac{-17}{x^2+8x+16}$

26) $\lim_{x\to 4}\frac{|x|}{x-4}$

27) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2}{x^2-10x+25}$

28) $\lim_{x\to 6}\frac{5}{(x-6)^2}$

29) $\lim_{x\to -\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$

30) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$

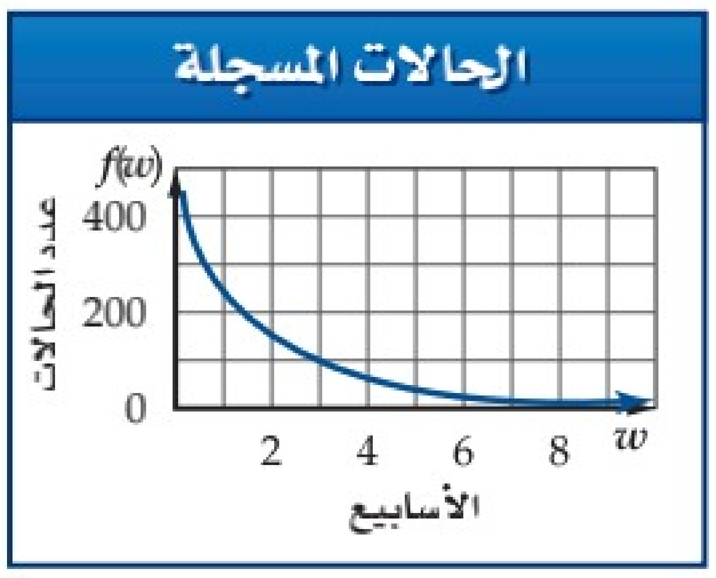
31) $\lim_{x\to \infty} x\cos x$

32) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$

33) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$

34) $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$

35) **دواء:** تم توزيع لقاح للحدِّ من عدوى مرض ما. ويُبيّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. (مثال 7)



a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1} f(w)$ ، $\lim_{w\to 3} f(w)$.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to \infty} f(w)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

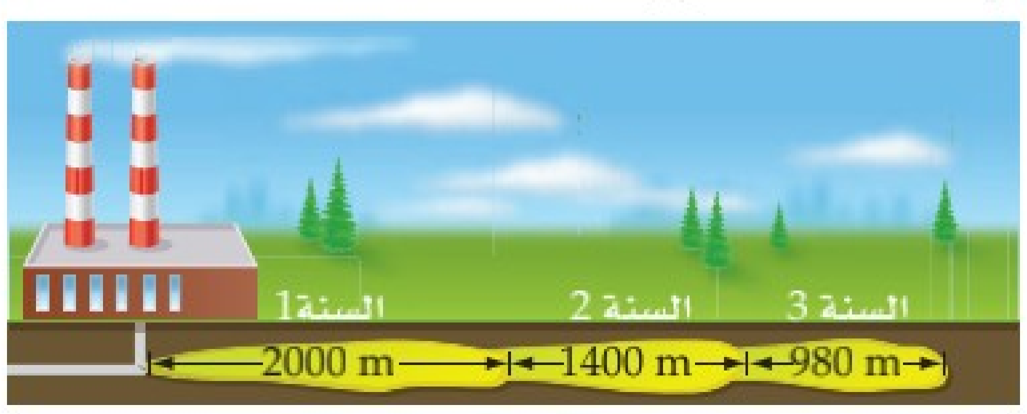
36) **برامج تلفزيونية:** يُقدَّر عدد مشاهدي أحد البرامج التلفزيونية اليومية بالدالة $f(d)=12(1.25012)^d-12$، حيث d رقم اليوم منذ أول يوم للبرنامج. (مثال 7)

a) مَثِّل الدالة $f(d)$ بيانيًّا في الفترة $0\le d\le 20$.

b) ما عدد مشاهدي البرنامج في اليوم: الخامس، العاشر، العشرين، بعد شهرين ($d=60$)؟

c) قدِّر $\lim_{d\to\infty} f(d)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

37) **كيمياء:** تتسرَّب مادة سامة من أنبوب غاز تحت الأرض كما في الشكل أدناه. ويعبِّر عن المسافة الأفقية بالأمتار التي تقطعها المادة المتسرِّبة بالدالة $d(t)=2000(0.7)^{t-1}, t\ge 1$ ، حيث t عدد السنوات منذ بدء التسرُّب. (مثال 7)



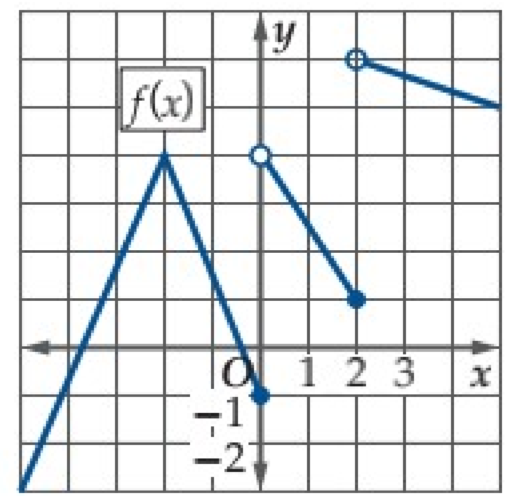
a) مَثِّل باستعمال الآلة البيانية الدالة بيانيًّا في الفترة $1\le t\le 15$.

b) استعمل التمثيل البياني وخاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية لإيجاد قيم d عندما $t=5, 10, 15$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} d(t)$.

d) هل من الممكن أن تصل المادة المتسرِّبة لمستشفى يقع على بُعد 7000 m من موقع التسريب؟ تذكَّر أن مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هو $\frac{a_1}{1-r}$.

للدالة الممثَّلة بيانيًّا أدناه، قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



38) $\lim_{x\to0^-} f(x)$

39) $\lim_{x\to0^+} f(x)$

40) $\lim_{x\to0} f(x)$

41) $\lim_{x\to2^-} f(x)$

42) $\lim_{x\to2^+} f(x)$

43) $\lim_{x\to1} f(x)$

حاسبة بيانية: حدِّد ما إذا كانت النهاية موجودة أو غير موجودة في كل مما يأتي. وإذا لم تكن موجودة، فصف التمثيل البياني للدالة عند نقطة النهاية:

44) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

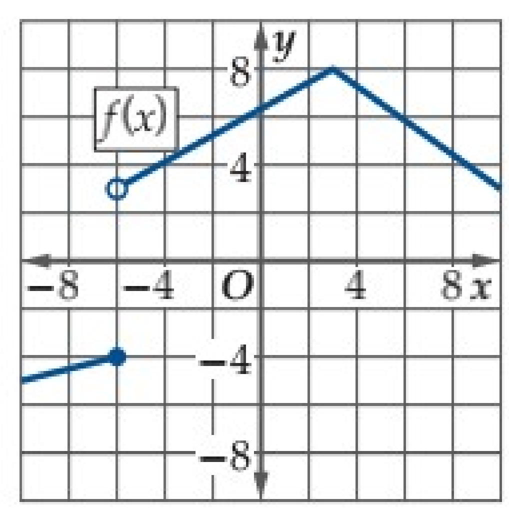
45) $\lim_{x\to2} \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$

46) $\lim_{x\to0} 3\cos\frac{\pi}{x}$

47) $\lim_{x\to-5} \frac{|x+5|}{x+5}$

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **اكتشف الخطأ:** قال علي: إن نهاية الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4 . في حين قال محمد: إنها 3. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



49) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على $f(x)$، بحيث تكون $\lim_{x\to0} f(x)$ موجودة، و $f(0)$ غير معرفة ، ومثالًا على دالة أخرى $g(x)$ ، بحيث تكون $g(0)$ معرفة، ولكن $\lim_{x\to0} g(x)$ غير موجودة.

50) **تحدٍّ:** إذا كان $g(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$. فقدِّر كلًّا من $\lim_{x\to2} g(x)$, $\lim_{x\to1} f(x)$. وإذا كانت $h(x), j(x)$ كثيرتي حدود بحيث: $h(a)=0$, $j(a)\neq0$ ، فماذا يمكنك القول عن $\lim_{x\to a}\frac{j(x)}{h(x)}$ ؟

برِّر إجابتك.

51) **تبرير:** حَدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.

إذا كان $f(c)=L$ ، فإن $\lim_{x\to c} f(x)=L$.

52) **مسألة مفتوحة:** مَثِّل بيانيًّا دالة تحقق كلًّا مما يأتي:
$f(0)=2, f(2)=5$, $\lim_{x\to0} f(x)=-3$ ، و $\lim_{x\to2} f(x)$ غير موجودة.

53) **تحدٍّ:** قدِّر كلًّا من النهايات الآتية للدالة f إذا كانت موجودة:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & , \quad x<-1\\ -1 & , \quad -1\le x\le0\\ x^2 & , \quad 1<x\le2\\ x-3 & , \quad x>2\end{cases}$$

a) $\lim_{x\to-1} f(x)$ b) $\lim_{x\to0} f(x)$ c) $\lim_{x\to2^+} f(x)$

54) **اكتب:** من خلال ما لاحظته في حل التمارين، وضِّح طريقتك لتقدير نهاية دالة متصلة.

مراجعة تراكمية

55) أثبت صحة المتطابقة. (مهارة سابقة)

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)=\cos^2\theta$$

56) حدِّد ما إذا كانت الدالة الآتية متصلة عند قيم x المعطاة. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدِّد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة $h(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$

(مهارة سابقة)

57) أوجد متوسط مُعدّل تغير $f(x)=\sqrt{x-6}$ في الفترة $[8, 16]$. (مهارة سابقة)

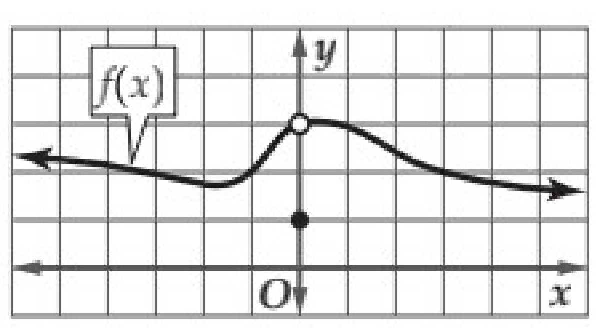
أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

58) $\mathbf{u}=\langle2,9,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle-4,7,6\rangle$

59) $\mathbf{m}=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, $\mathbf{n}=-7\mathbf{i}+8\mathbf{j}+9\mathbf{k}$

تدريب على اختبار

60) باستعمال التمثيل البياني للدالة $y=f(x)$ أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to0} f(x)$ (إن وجدت)؟



A 0

B 1

C 3

D النهاية غير موجودة

61) إذا كانت $g(x)=\frac{1}{x^2}$ وكانت العبارات:

I نقطة عدم اتصال لا نهائي.

II نقطة عدم اتصال قفزي.

III نقطة عدم اتصال قابل للإزالة.

فأيٌّ مما يأتي يصف التمثيل البياني لمنحنى الدالة g(x)؟

A I فقط

B I , III فقط

C II فقط

D I و II فقط

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-2

حساب النهايات جبريًّا
Evaluating Limits Algebraically

فيما سبق:
درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًا وعدديًا. (الدرس 1−8)

والآن:
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات:
التعويض المباشر
direct substitution

الصيغة غير المحددة
indeterminate form

لماذا؟
إذا أُعطيت اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}$، حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)، فإنه يمكنك استعمال النهاية عندما تقترب x من 0 أو ∞ لإيجاد اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى.

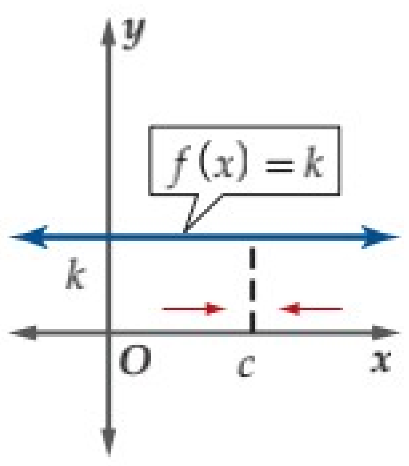
حساب النهاية عند نقطة: تعلمتَ في الدرس 1-8 تقدير النهايات بيانيًّا، وباستعمال جداول قيم . وستكتشف في هذا الدرس طرائق جبرية لحساب النهايات.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

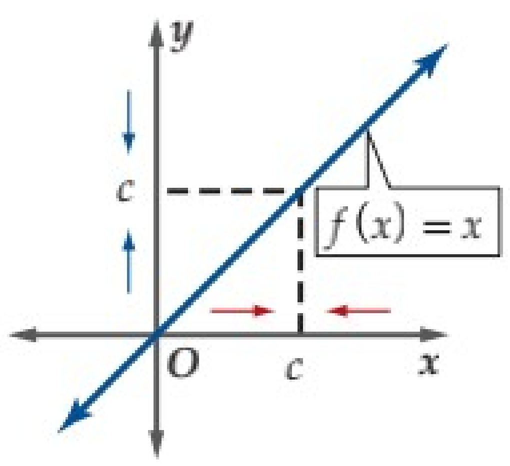
الرموز: $\lim\limits_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim\limits_{x \to c} x = c$



تظهر أهمية نهايات الدوال الثابتة والدالة المحايدة واضحة في خصائص النهايات.

تنبيه!
إذا كانت $f(c) \le 0$ وَ n عددًا زوجيًا فإن $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)}$ غير موجودة.

مفهوم أساسي — خصائص النهايات

إذا كان k , c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x \to c} [k\, f(x)] = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$، حيث $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$، إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$، حيث n عدد زوجي.
وإذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$

مثال 1 استعمال خصائص النهايات

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)$

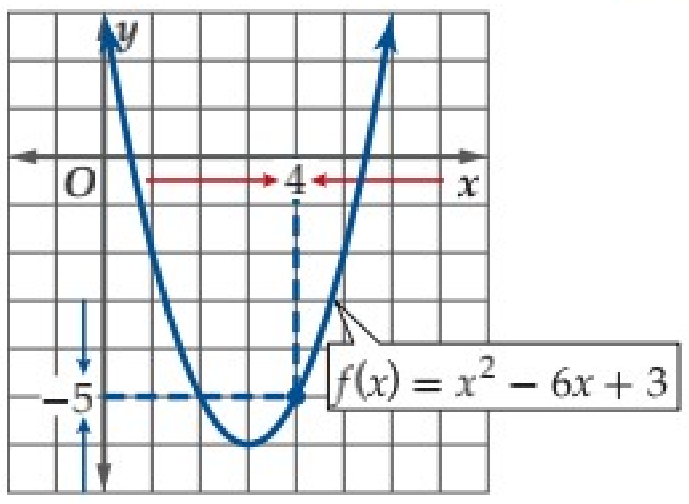
$\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)=\lim\limits_{x\to 4}x^2-\lim\limits_{x\to 4}6x+\lim\limits_{x\to 4}3$ — خاصيتا المجموع والفرق

$=\left(\lim\limits_{x\to 4}x\right)^2-6\cdot\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}3$ — خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$=4^2-6\cdot 4+3$ — نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=-5$ — بسّط

تحقق يعزّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2-6x+3$ هذه النتيجة.



b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3+1}{x-5}$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3+1}{x-5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(4x^3+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-5)}$ — خاصية القسمة

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}4x^3+\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}x-\lim\limits_{x\to -2}5}$ — خاصيتا المجموع والفرق

$=\dfrac{4\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^3+\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}x-\lim\limits_{x\to -2}5}$ — خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$=\dfrac{4(-2)^3+1}{-2-5}$ — نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

≈ 4.4 — بسّط

تحقق كوّن جدولًا لقيم x التي تقترب من -2 من الجهتين.

x تقترب من -2 ⟵ ⟶ x تقترب من -2

x	−2.1	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

من الواضح أنه كلما اقترب x من العدد -2، فإن $f(x)$ تقترب من العدد 4.4

c) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{8-x}$

$\lim\limits_{x\to 3}(8-x)=\lim\limits_{x\to 3}8-\lim\limits_{x\to 3}x$ — خاصية الفرق

$=8-3$ — عوّض

$=5>0$ — بسّط

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{8-x}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(8-x)}$ — خاصية الجذر النوني

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}8-\lim\limits_{x\to 3}x}$ — خاصية الفرق

$=\sqrt{8-3}$ — نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=\sqrt{5}$ — بسّط

تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim\limits_{x\to 2}(-x^3+4)$ 1B) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{2x^2-x-15}$ 1C) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+3}$

لاحظ أن نهاية كل دالة في المثال أعلاه عندما تقترب x من c تساوي قيمة $f(c)$. ومع أن هذه الملاحظة ليست صحيحة في جميع الدوال، إلا أنها صحيحة في دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية التي مقاماتها لا تساوي صفرًا عندما $x=c$. كما هو موضح فيما يأتي:

إرشادات للدراسة

خصائص النهايات
تبقى خصائص النهايات صحيحة في حال كون النهايات من جهة واحدة، وفي حال كونها عند المالانهاية، شريطة وجود هذه النهايات.

تنبيه!

خاصية الجذر النوني الزوجي تستخدم فقط إذا كان $\lim\limits_{x\to c}f(x)>0$

إرشادات للدراسة

الدوال الجيدة السلوك
تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود ودالتي الجيب وجيب التمام دوالَّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر، ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر حتى وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك على مجالها، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود ، وكان c عددًا حقيقيًّا ، فإن $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ دالةً نسبية، وكان c عددًا حقيقيًّا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim\limits_{x\to c} r(x) = r(c) = \dfrac{p(c)}{q(c)}$.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر** ، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

مثال 2 استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

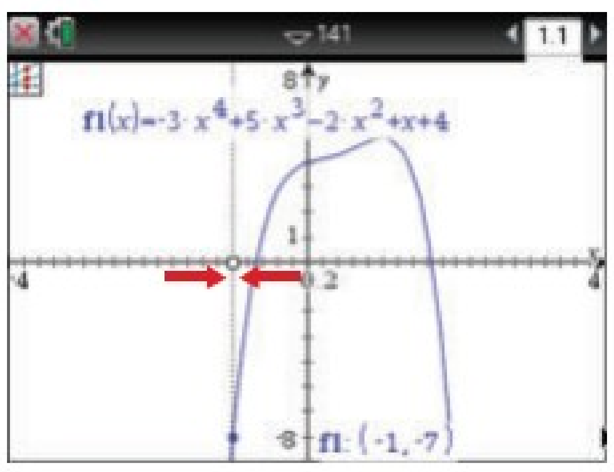
احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

a) $\lim\limits_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ هذه النتيجة.



[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$ ، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - (3)^2}$$
$$= \frac{48}{-6}$$
$$= -8$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$ ، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

d) $\lim\limits_{x\to -6} \sqrt{x + 5}$

بما أن $\lim\limits_{x\to -6} (x+5) = -6 + 5 = -1 < 0$ ، فلا يمكننا حساب $\lim\limits_{x\to -6}\sqrt{x+5}$ بالتعويض المباشر.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2A) $\lim\limits_{x\to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$

2B) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

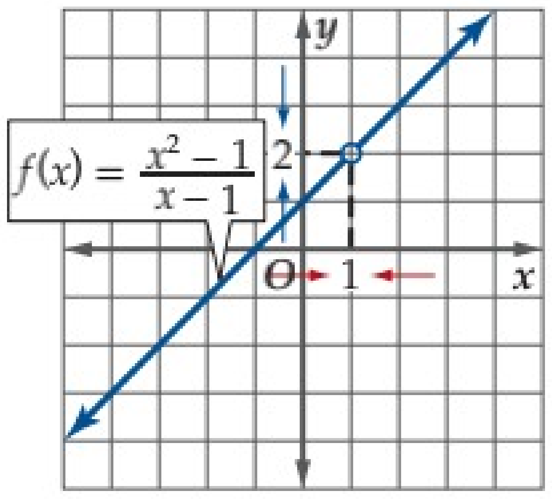
2C) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

2D) $\lim\limits_{x\to -8} \sqrt{x + 6}$

لنفترض أنك استعملت خاصية القسمة أو التعويض المباشر لحساب النهاية $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ بشكل خاطئ كما يلي:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 1)}{\lim\limits_{x\to 1} (x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

وهذا ليس صحيحًا؛ لأن نهاية المقام تساوي 0



يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة، أو متباعدة نحو ∞ أو $-\infty$، ويُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ أن $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة وتساوي 2 .

على الرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن الحصول على هذه الصيغة قد يرشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 3 استعمال التحليل لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{(-4)^2 - (-4) - 20}{-4+4} = \frac{0}{0}$ ؛ لذا فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا، واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

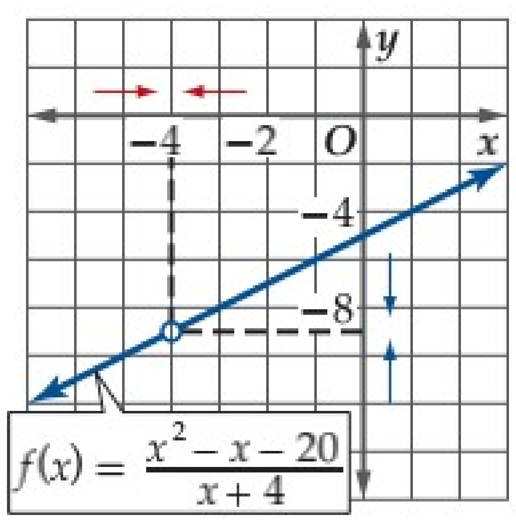
$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x+4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x-5)(x+4)}{x+4}$$ حلّل البسط

$$= \lim_{x \to -4} \frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$ اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x \to -4} (x-5)$$ بسّط

$$= (-4) - 5 = -9$$ عوّض وبسّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x+4}$ هذه النتيجة.



b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21}$

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{3-3}{3^3 - 3(3)^2 - 7(3) + 21} = \frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x^3-3x^2)+(-7x+21)}$$ أعد تجميع المقام

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2(x-3)-7(x-3)}$$ أخرج العامل المشترك من الحدود المجمعة في المقام

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x^2-7)(x-3)}$$ أخرج العامل المشترك في المقام

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(x^2-7)\cancel{(x-3)}}$$ اختصر

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2-7}$$ بسّط

$$= \frac{1}{(3)^2 - 7} = \frac{1}{2}$$ عوّض وبسّط

تنبيه!

التحليل

عند اختصار البسط بأكمله، فإنه يصبح 1 وليس 0 .

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

3A) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$

3B) $\lim\limits_{x \to 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$

ينتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة النسبية دالة جديدة ، ففي المثال 3a ينتج عن الاختصار بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g، حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}\ ,\ g(x) = x - 5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x = -4$ ، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند قيمة وحيدة c ، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان ؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها؛ لذا فإن $\lim\limits_{x\to-4} (x - 5) = \lim\limits_{x\to-4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتج التعويضِ فيها صيغة غير محددة ، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

مثال 4 استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim\limits_{x\to9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$ ؛ لذا أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$\lim\limits_{x\to9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim\limits_{x\to9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sqrt{x} + 3$ ، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x} - 3$

$= \lim\limits_{x\to9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$ بسّط

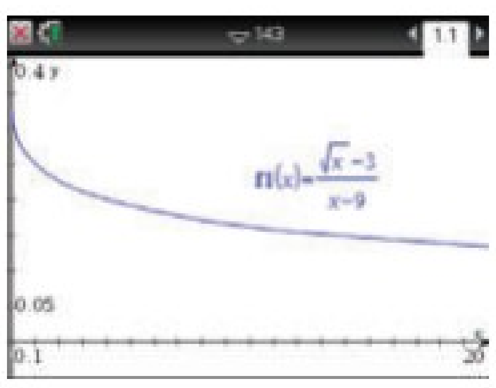
$= \lim\limits_{x\to9} \frac{\cancel{x - 9}}{\cancel{(x - 9)}(\sqrt{x} + 3)}$ اختصر العامل المشترك

$= \lim\limits_{x\to9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$ بسّط

$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$ عوّض

$= \frac{1}{6}$ بسّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة.



[−0.1, 20] scl: 1 by [−0.05, 0.4] scl: 0.05

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

4A) $\lim\limits_{x\to25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$

4B) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$

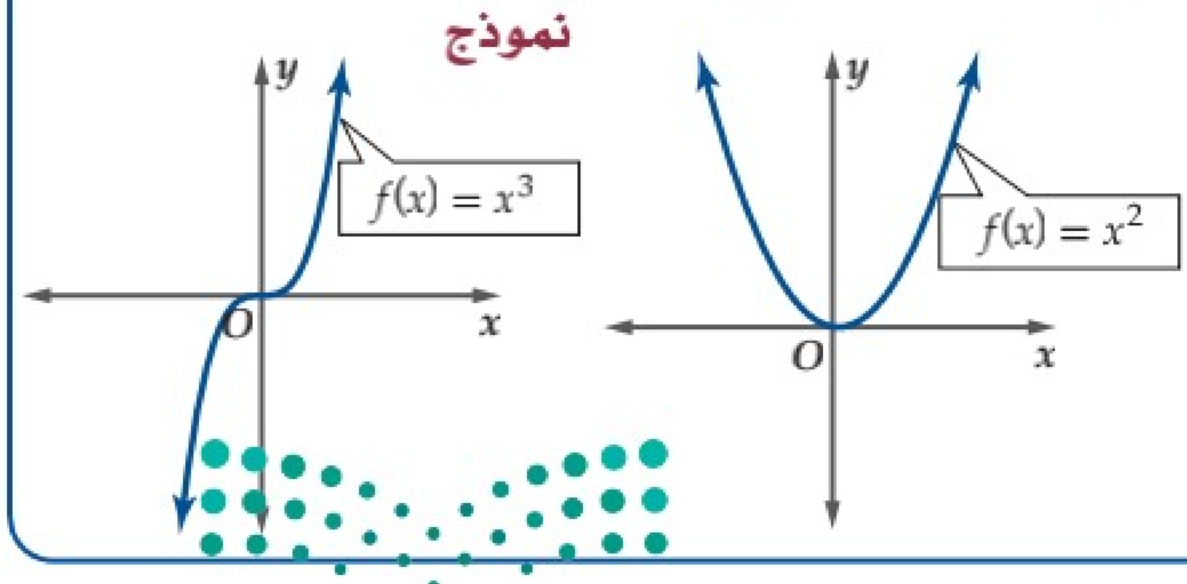
حساب النهايات عند المالانهاية: درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه ، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

مفهوم أساسي نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n ،

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \infty$ ، **إذا كان n عددًا زوجيًا.**
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ ، **إذا كان n عددًا فرديًا.**

نموذج



إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود ، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

مفهوم أساسي نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \;,\; \lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو $-\infty$ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلاحدود أو متناقصًا بلا حدود.

مثال 5 نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$

$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = \lim_{x\to-\infty} x^3$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= -\infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

b) $\lim_{x\to\infty} (4 + 3x - x^2)$

$\lim_{x\to\infty} (4 + 3x - x^2) = \lim_{x\to\infty} -x^2$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= -\lim_{x\to\infty} x^2$ خاصية الضرب في ثابت

$= -\infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

c) $\lim_{x\to-\infty} (5x^4 - 3x)$

$\lim_{x\to-\infty} (5x^4 - 3x) = \lim_{x\to-\infty} 5x^4$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= 5 \lim_{x\to-\infty} x^4$ خاصية الضرب في ثابت

$= 5 \times \infty = \infty$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

✓ تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

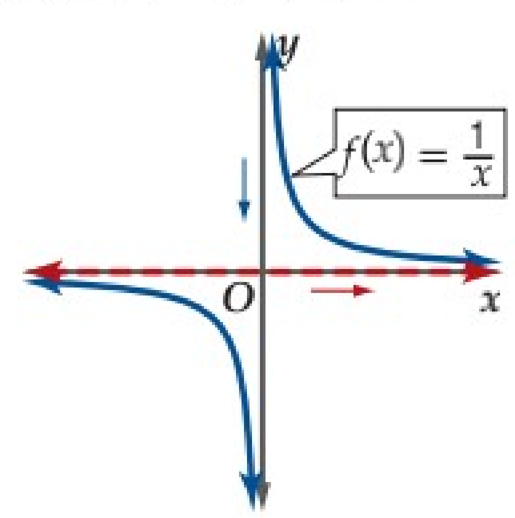
5A) $\lim_{x\to\infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$ **5B)** $\lim_{x\to-\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$ **5C)** $\lim_{x\to-\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$

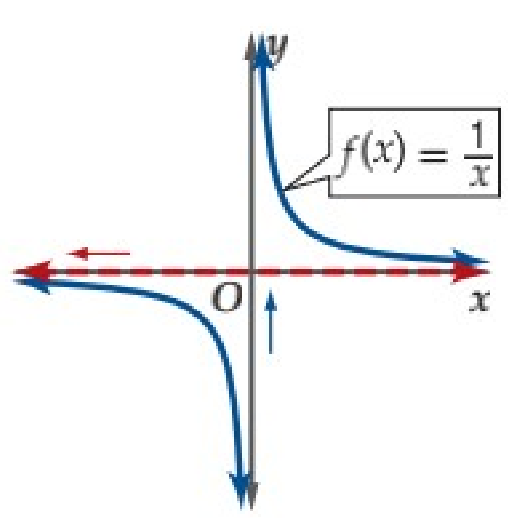
ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

مفهوم أساسي نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

التعبير اللفظي: إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

الرموز: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية ، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة لمتغير الدالة.

إرشادات للدراسة

الضرب في المالانهاية

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

تعني أن الدالة تأخذ قيمًا موجبة ومتزايدة بشكل غير محدود، كلما اقتربت قيم x من العدد c؛ لذا فإن ضرب هذه القيم في عدد موجب لا يغير هذا السلوك، أما ضربها في عدد سالب، فإنه يعكس إشاراتها، وبذلك تقترب النهاية من $-\infty$ ، أي أنه إذا كان $a > 0$ فإن:

$a(\infty) = \infty,$

$-a(\infty) = -\infty$

مراجعة المفردات

دالة المقلوب

تذكر أن دالة المقلوب هي $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالة خطية ، و $a(x) \neq 0$.

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{8x-3}$

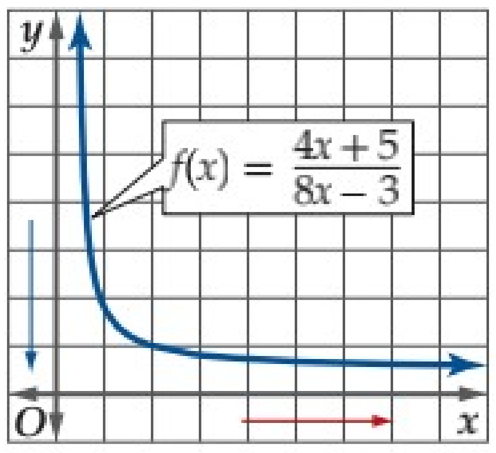
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$ بسّط

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 8 - 3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

تحقق يعزّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{4x+5}{8x-3}$ المجاور هذه النتيجة. ✔



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$ بسّط

$$= \frac{6\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{6\cdot 0 - 0}{3+0} = 0$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4}{9x^3+2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^4

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5}{9\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} + 2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{9\cdot 0+2\cdot 0} = \frac{5}{0}$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خطأً خاصية القسمة، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة موجبة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.

إرشادات للدراسة

نهاية الدوال النسبية
توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.
1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو $-\infty$، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.
2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.
3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

✔ تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x-10}$

6B) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2+7}{5x+1}$

6C) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية؛ لذا فإن نهاية المتتابعة غير المنتهية هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة . فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $\dots , \frac{1}{4} , \frac{1}{3} , \frac{1}{2} , 1 = a_n$ بـ $f(n) = \frac{1}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن المتتابعة تقترب من الصفر.

مثال 7 نهايات المتتابعات

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(a $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$

لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند اللانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق كوّن جدولًا، واختر قيمًا متعددة لـ n.

n	1	20	40	60	80	90	100	1000	10000
a_n	0.6667	2.44	2.6889	2.7846	2.8353	2.8526	2.8667	2.9861	2.9986

نلاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 3 كلما كبرت n .

(b $b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي 1.8 ,1.953 ,2.222 ,2.813 ,5 . والآن أوجد نهاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ ربّع ثنائية الحد

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ اضرب

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5 + 10\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n^4 ، ثم استعمل خصائص القسمة ، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند اللانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25.

تحقّق كوّن جدول قيم، واختر قيمًا كبيرة لـ n . قيم (b_n في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب جزء من مئة)

n تقترب من ∞

n	10	100	1000	10000	100000
b_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(7A $a_n = \frac{4}{n^2+1}$

(7B $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$

(7C $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

تدرب وحل المسائل

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي: (مثال 1)

1) $\lim_{x \to -3} (5x - 10)$

2) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 4x + 13}{x - 3}$

3) $\lim_{x \to 9} \left(\frac{1}{x} + 2x + \sqrt{x}\right)$

4) $\lim_{x \to -4} [x^2(x + 1) + 2]$

5) $\lim_{x \to 12} \frac{x^2 - 10x}{\sqrt{x + 4}}$

6) $\lim_{x \to -6} \frac{x^4 - x^3}{x^2}$

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب: (مثال 2)

7) $\lim_{x \to 16} \frac{x^2 + 9}{\sqrt{x} - 4}$

8) $\lim_{x \to 2} (4x^3 - 3x^2 + 10)$

9) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 9x + 6}{x^2 + 5x + 6}$

10) $\lim_{x \to 3} \sqrt{2 - x}$

11) $\lim_{x \to 9} (3x^2 - 10x + 35)$

12) $\lim_{x \to 10} (-x^2 + 3x + \sqrt{x})$

13) **فيزياء:** بحسب نظرية آينشتاين النسبية، فإن كتلة جسم يتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء، m_0 كتلة الجسم الابتدائية أو كتلته عندالسكون.
أوجد $\lim_{v \to 0} m$ ، ووضّح العلاقة بين هذه النهاية و m_0 . (مثال 2)

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 3, 4)

14) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

15) $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{x + 1} - 1}$

16) $\lim_{x \to -5} \frac{4x^2 + 21x + 5}{3x^2 + 17x + 10}$

17) $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{3 - \sqrt{x + 9}}$

18) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3}$

19) $\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 5, 6)

20) $\lim_{x \to \infty} (5 - 2x^2 + 7x^3)$

21) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 10x + 2}{4x^3 + 20x^2}$

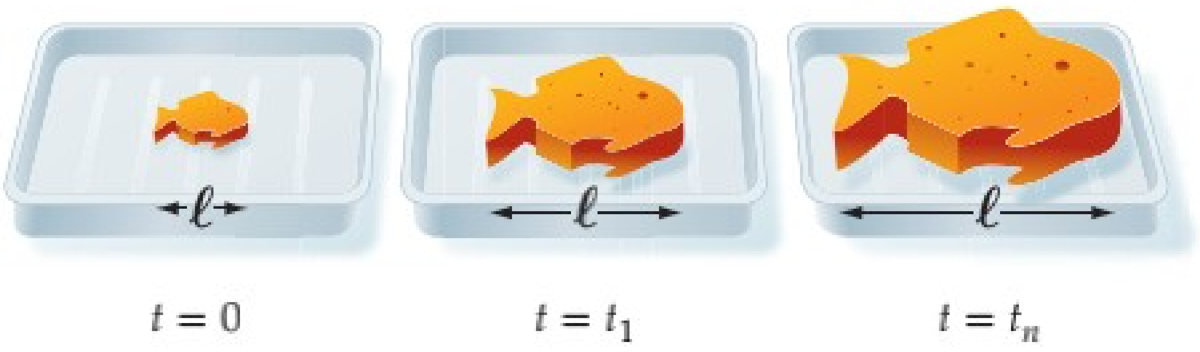
22) $\lim_{x \to \infty} (10x + 14 + 6x^2 - x^4)$

23) $\lim_{x \to \infty} \frac{14x^3 - 12x}{4x^2 + 13x - 8}$

24) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 + 2x - 11}{-x^5 + 17x^3 + 4x}$

25) $\lim_{x \to \infty} \frac{10x^4 - 2}{5x^4 + 3x^3 - 2x}$

26) **إسفنج:** تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t) = \frac{105t^2}{10 + t^2} + 25$ ، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالملمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)



a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟

b) ما نهاية الدالة عندما $t \to \infty$؟

c) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 7)

27) $a_n = \frac{8n + 1}{n^2 - 3}$

28) $a_n = \frac{-4n^2 + 6n - 1}{n^2 + 3n}$

29) $a_n = \frac{12n^2 + 2}{6n^2 - 1}$

30) $a_n = \frac{8n^2 + 5n + 2}{3 + 2n}$

31) $a_n = \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n + 1)^2}{4}\right]$

32) $a_n = \frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}\right]$

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة مستخدمًا التعويض المباشر لحساب النهايتين من اليمين واليسار:

33) $\lim_{x \to -2} \begin{cases} x - 3, & x \le -2 \\ 2x - 1, & x > -2 \end{cases}$

34) $\lim_{x \to 0} \begin{cases} 5 - x^2, & x \le 0 \\ 5 - x, & x > 0 \end{cases}$

35) $\lim_{x \to 2} \begin{cases} (x - 2)^2 + 1, & x \le 2 \\ x - 6, & x > 2 \end{cases}$

احسب كل نهاية مما يأتي، إذا كانت موجودة:

36) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x}$ **37)** $\lim_{x\to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$

38) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x}$ **39)** $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

أوجد $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

40) $f(x) = 2x - 1$ **41)** $f(x) = 7 - 9x$

42) $f(x) = \sqrt{x}$ **43)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

44) $f(x) = x^2$ **45)** $f(x) = x^2 + 8x + 4$

46) **فيزياء:** يمتلك الجسم المتحرك طاقةً تُسمى الطاقة الحركية؛ لأن بإمكانه بذل شغل عند تأثيره على جسم آخر. وتُعطى الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $k(t) = \frac{1}{2}m \cdot (v(t))^2$ ، حيث $v(t)$ سرعة الجسم عند الزمن t، و m كتلته بالكيلوجرام. إذا كانت سرعة جسم $v(t) = \frac{50}{1+t^2}$ لكل $t \geq 0$، وكتلته 1 kg، فما الطاقة الحركية التي يمتلكها عندما يقترب الزمن من 100 s؟

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **برهان:** استعمل خصائص النهايات؛ لإثبات أنه لأي كثيرة حدود

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ولأي عدد حقيقي c، فإن $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$

48) **برهان:** استعمل الاستقراء الرياضي؛ لإثبات أنه إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، فإنه لأي عدد صحيح n
$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n = L^n$.

49) **تحدٍّ:** احسب النهاية الآتية إذا كانت $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

(إرشاد: افترض كلًّا من الحالات $m < n, m = n, m > n$)

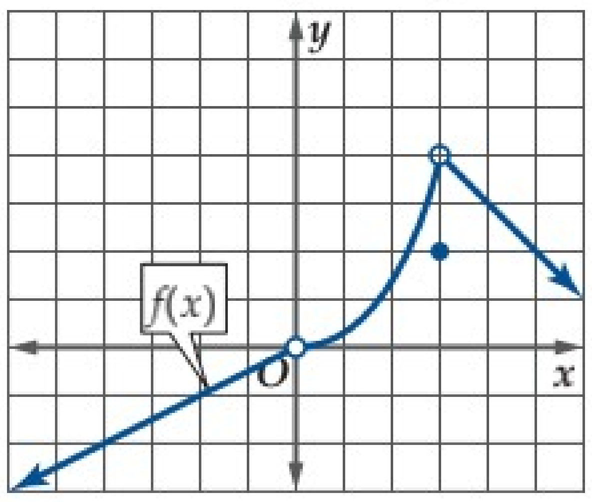
50) **تبرير:** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim_{x\to c} r(x) = r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك.

51) **اكتب:** استعمل جدولًا لتنظيم خصائص النهايات، وضمِّنه مثالًا على كل خاصية.

52) **اكتب:** افترض أن $\frac{p(x)}{q(x)}$ دالة نسبية، وأن $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$. تدَّعي ليلى أن قيمة هذه النهاية هي 1 . وضِّح سبب كونها مخطئة. وما الخطوات التي يمكن اتباعها لحساب هذه النهاية، إذا كانت موجودة؟

مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ أدناه لإيجاد كلٍّ مما يأتي:
(الدرس 1-8)



53) $f(-2)$ ، $\lim_{x\to -2} f(x)$

54) $f(0)$ ، $\lim_{x\to 0} f(x)$

55) $f(3)$ ، $\lim_{x\to 3} f(x)$

أوجد $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$، $(f.g)(x)$، $(\frac{f}{g})(x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، ثم حدِّد مجال الدالة الناتجة: (مهارة سابقة)

56) $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

57) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 1$

تدريب على اختبار

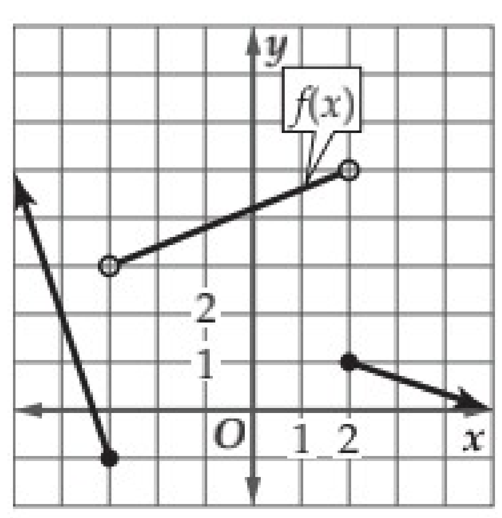
58) ما قيمة $\lim_{h\to 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$ ؟

A 3 **C** 5
B 4 **D** غير موجودة

59) ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0 ؟

A $-\pi$ **C** $-\frac{1}{2}\pi$
B $-\frac{3}{4}$ **D** 0

60) باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ؟



A 0 **B** 1 **C** 5 **D** غير موجودة

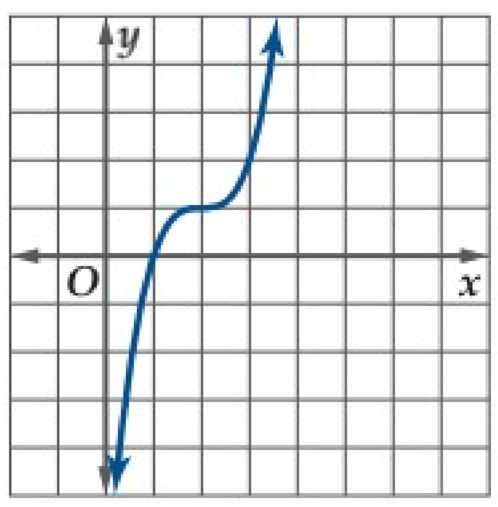
استكشاف
8-3

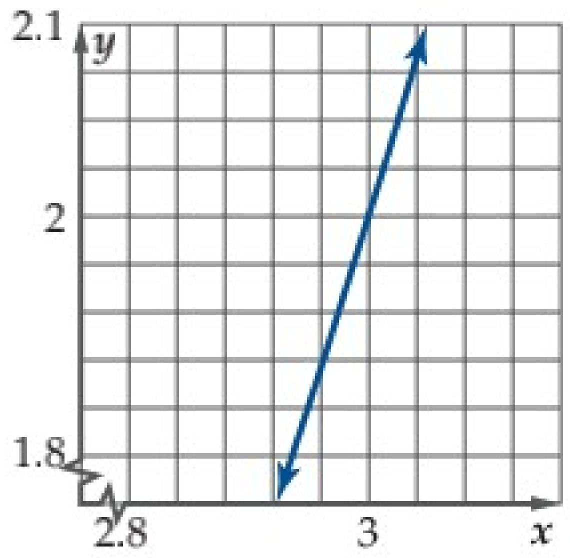
معمل الحاسبة البيانية: ميل المنحنى
The Slope of a Curve

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire ؛ لتقدير ميل منحنى.

يعتبر ميل المستقيم بوصفه معدلًا ثابتًا للتغير مفهومًا واضحًا، إلا أن الميل ليس واضحًا بالنسبة للمنحنيات بصورة عامة؛ إذ يتغير ميل المنحنى عند كل نقطة عليه.





وبشكل عام فإن التمثيلات البيانية لمعظم الدوال تبدو خطيةً عند تفحُّصها على فترةٍ قصيرة جدًّا.

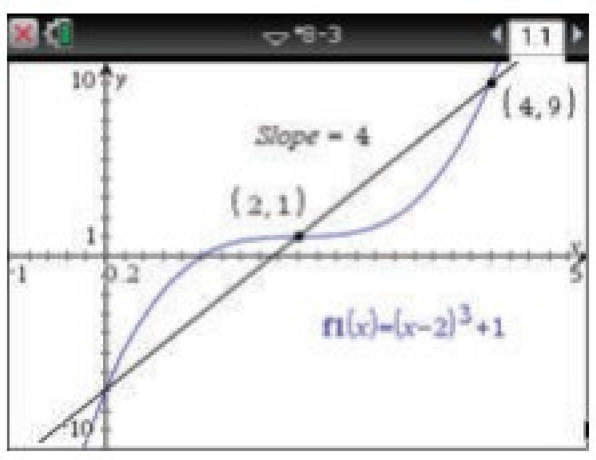
وبالنظر إلى القواطع المتتالية، يكون من الممكن تطبيق فكرة الميل على المنحنيات.

نشاط 1 خطوط القاطع

قدّر ميل منحنى الدالة $y = (x - 2)^3 + 1$ عند النقطة (3, 2).

خطوة 1 أدخل $y = (x - 2)^3 + 1$ في **f1**، ثم احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x - 2)^3 + 1$، عندما $x = 2$, $x = 4$. كما يلي:

- مثّل الدالة بالضغط على on ، ثم اكتب الدالة واضغط enter.
- حدّد نقطتين على منحنى الدالة بالضغط على مفتاح menu واختيار 8: الهندسة، ثم 1: النقاط والمستقيمات واختيار 2: نقطة على المستقيم، ثم الضغط على المنحنى مرتين وستظهر نقطتان.
- ظلّل إحداثيَّي x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x = 2, x = 4$.
- ارسم القاطع المار بالنقطتين بالضغط على menu، واختيار 8: الهندسة، ثم 1: النقاط والمستقيمات ثم اختيار 4: مستقيم واضغط على النقطتين ثم اضغط esc.



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

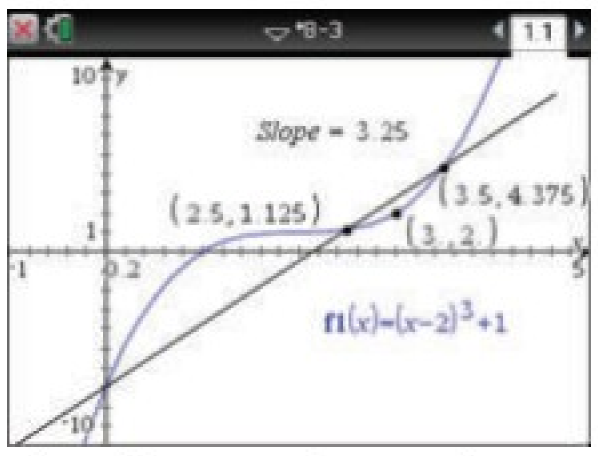
- أوجد ميل القاطع بالضغط على menu، واختيار 8: الهندسة، ثم 3: الميل، ثم اضغط على القاطع وسيظهر أن ميله يساوي 4.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

استكشاف
8-3 معمل الحاسبة البيانية: ميل المنحنى
The Slope of a Curve

خطوة 2 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x - 2)^3 + 1$ عندما $x = 3.5$, $x = 2.5$.

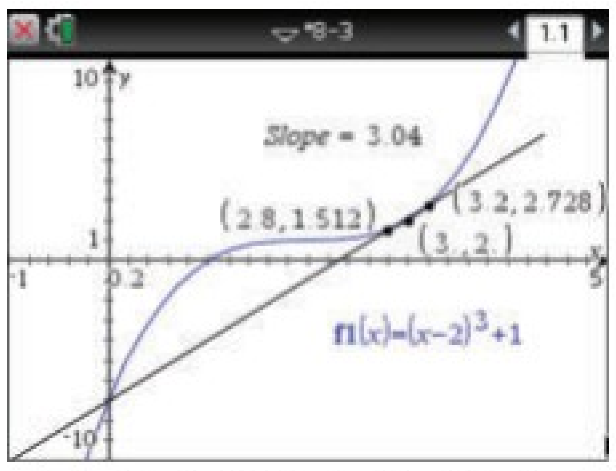
ظلّل إحداثيّي x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x = 3.5, x = 2.5$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.25



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

خطوة 3 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x - 2)^3 + 1$ عندما $x = 3.2$, $x = 2.8$.

ظلّل إحداثيّي x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x = 3.8, x = 2.8$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.04



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

خطوة 4 أوجد ميل 3 قواطع أخرى في فترات متناقصة حول النقطة (3, 2).

كلّما نقص طول الفترة حول النقطة (3, 2)، فإن ميل القاطع يقترب أكثر من العدد 3؛ لذا فإن ميل منحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ عند النقطة (3, 2) هو 3 تقريبًا.

تمارين:

قدِّر ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $y = (x + 1)^2, (-4, 9)$

2) $y = x^3 - 5, (2, 3)$

3) $y = 4x^4 - x^2, (0.5, 0)$

4) $y = \sqrt{x}, (1, 1)$

حلّل النتائج

5) **حلّل:** صف ما يحدث لقاطع منحنى دالة عندما تقترب نقاط التقاطع من نقطة معطاة (a, b) على المنحنى.

6) **خمّن:** صِف كيف يمكنك إيجاد القيمة الفعلية لميل منحنى عند نقطة معطاةٍ عليه.

8-3

المماس والسرعة المتجهة
Tangent Line and Velocity

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست إيجاد متوسط مُعدّل التغيّر باستعمال القاطع.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

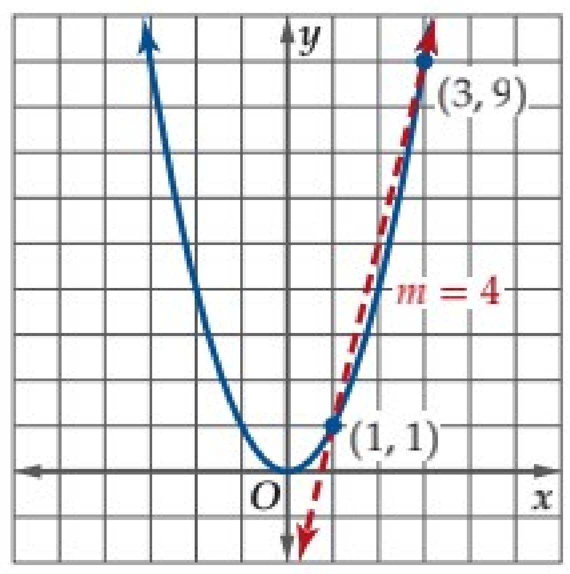
المفردات:
المماس
tangent line
مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change
قسمة الفرق
difference quotient
السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity

قراءة الرياضيات
اختصارات
يمكن اختصار الجملة ميل المماس لمنحنى الدالة بميل المنحنى.

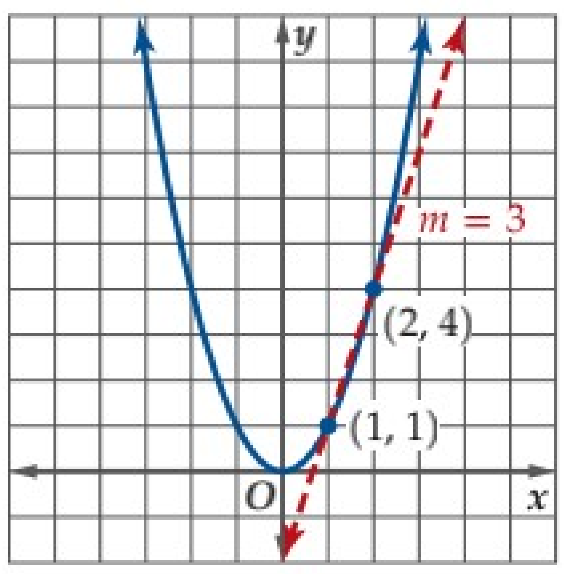
لماذا؟

عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

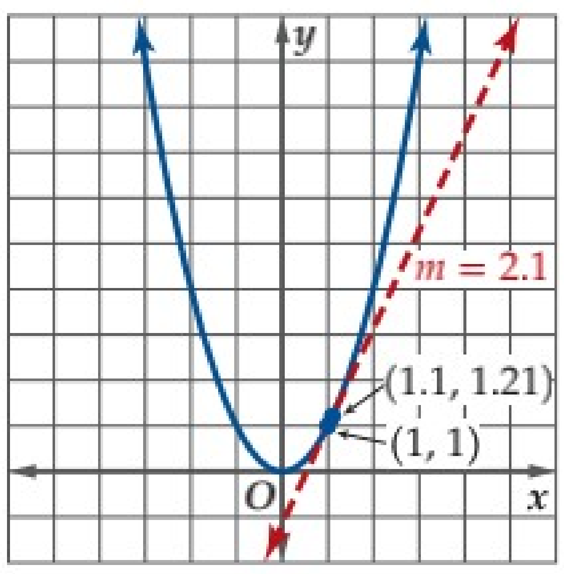
المماسات: تعلمت سابقًا أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة $(1, 1)$ ، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$ ، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$ ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.



الشكل (1)

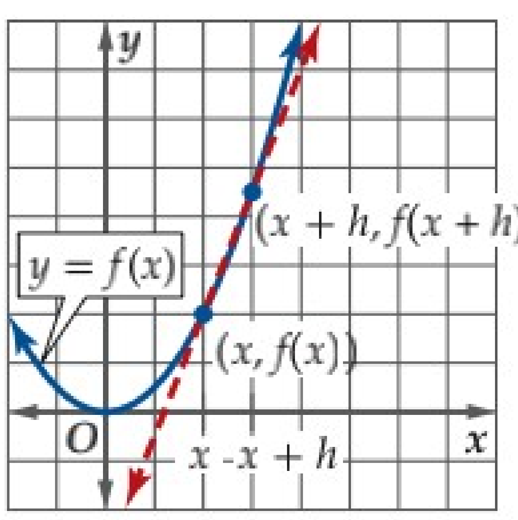


الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع ، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى في هذه الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين كما في الشكل (3) أعلاه، فإننا نحصل على **مماس** للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمثّل ميل هذا المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلى صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

مفهوم أساسي — مُعدل التغيّر اللحظي

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويُعطى بالصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

يمكنك استعمال صيغة معدل التغيّر اللحظي لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة عليه.

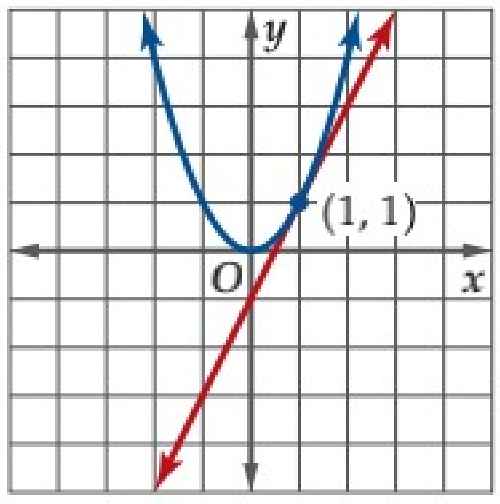
إرشادات للدراسة

مُعَدل التغيّر اللحظي

عند حساب نهاية ميل المستقيم القاطع عندما $h \to 0$، فإن الحدود الباقية بعد إجراء الاختصارات، والتي تحتوي المتغير h ستصبح أصفارًا.

مثال 1 ميل المماس لِلمنحنى عند نقطة عليه

أوجد ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2$ الممثَّلة بالشكل أدناه عند النقطة $(1, 1)$.



$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدَل التغيّر اللحظي

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$ $x = 1$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$ $f(1+h) = (1+h)^2 \ , \ f(1) = 1^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$ فك المقدار $(1+h)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$ بسّط

$$= \lim_{h \to 0} (2+h)$$ اقسم على h

$$= 2 + 0 = 2$$ عوّض وبسّط

أي أن ميل منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ هو 2.

تحقق: من خلال التمثيل البياني للمنحنى ومماسه عند النقطة $(1, 1)$ نلاحظ أن ميل المستقيم الذي يمثِّل المماس يساوي 2.

تحقق من فهمك

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(1A $y = x^2, (3, 9)$

(1B $y = x^2 + 4, (-2, 8)$

كما يمكنك استعمال صيغة مُعدل التغيّر اللحظي لإيجاد معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه.

مثال 2 ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة عليه.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$ $f(x+h) = \frac{4}{x+h} \ , \ f(x) = \frac{4}{x}$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$$ اطرح الكسرين في البسط، ثم التبسيط

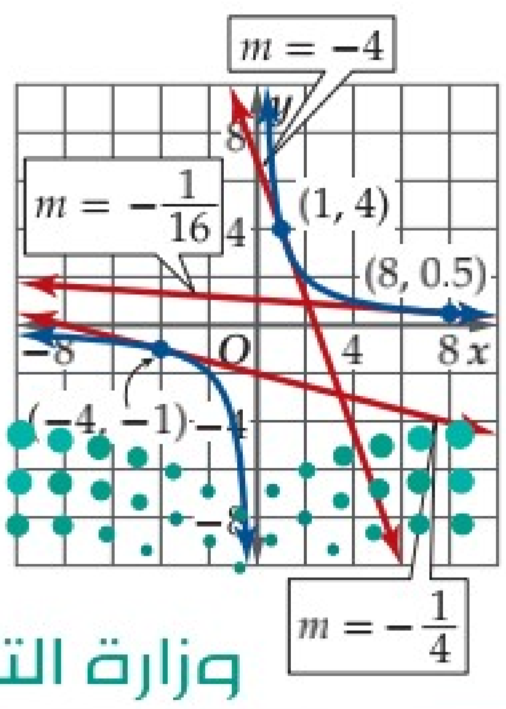
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$$ بسّط

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$$ اقسم على h، ثم اضرب

$$m = \frac{-4}{x^2 + x(0)}$$ عوّض

$$m = \frac{-4}{x^2}$$ بسّط

أي أن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$، والشكل المجاور يبين ميل المنحنى عند ثلاث نقط مختلفة.



تحقق من فهمك

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(2A $y = x^2 - 4x + 2$

(2B $y = x^3$

إرشادات للدراسة

موقع الجسم

موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة $y = f(x)$ وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثيين x, y، أما إذا أُعطي بوصفه دالة في الزمن t، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y) لموقع الجسم عند اللحظة t، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.

السرعة المتجهة اللحظية: تعلمت سابقًا طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة $f(t)$ في زمن مقداره t، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

مفهوم أساسي — السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال 3 من واقع الحياة — السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدّاء عند الزمن 3 ، $a = 2$, $b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$	$a = 2, b = 3$	$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$
$f(3) = 24.3$	بسِّط	$f(2) = 18.8$

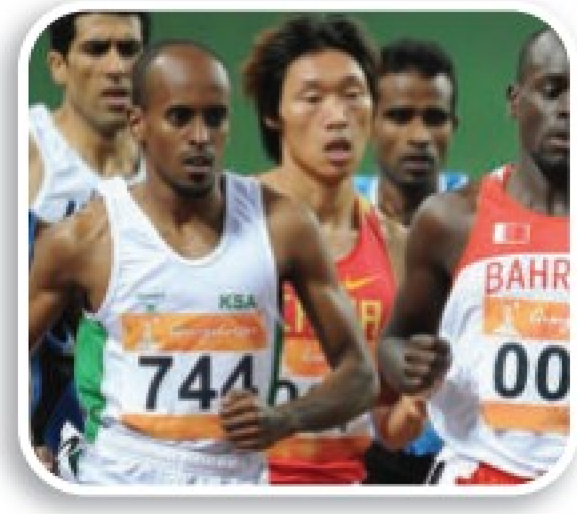
استعمل الآن صيغة السرعة المتوسطة المتجهة.

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{صيغة السرعة المتوسطة المتجهة}$$

$$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2} \quad f(b) = 24.3,\ f(a) = 18.8,\ b = 3,\ a = 2$$

$$= 5.5 \quad \text{بسِّط}$$

أي أن السرعة المتوسطة المتجهة للعدّاء بين الساعتين الثانية والثالثة هي 5.5 mi/h إلى الأمام.



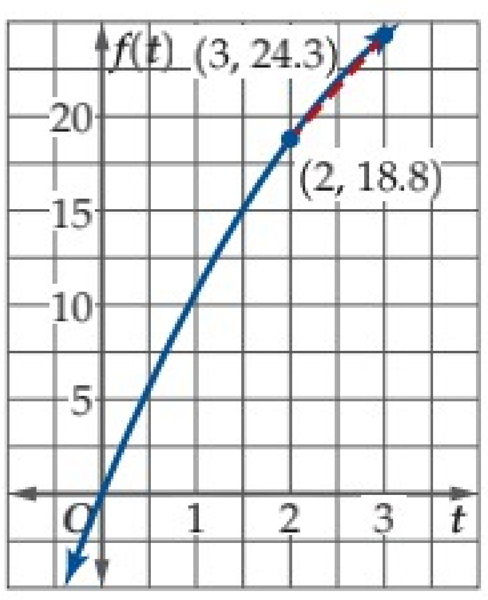
الربط مع الحياة

أحرز العدّاء السعودي محمد شاوين ذهبية سباق 1500 m في دورة ألعاب آسيا المقامة في الصين عام 2010م، وفي المتوسط فقد قطع مسافة كيلومتر خلال 2:24:33 دقيقة تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **بالون:** تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1$ s ، $t = 2$ s؟

إذا أمعنَّا النظر في إجابة المثال 3 ، نجد أنه تم حساب السرعة المتوسطة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين (2, 18.8) ، (3, 24.3) كما في الشكل المجاور. والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.



ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t، فإننا نجد مُعدّل التغيّر اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة.

إرشادات للدراسة

سبق أن عرفت عند دراسة الإحداثيات القطبية أن الاتجاه له دلالة خاصة في المسافة المتجهة والزاوية المتجهة، كذلك فإن الاتجاه في السرعة المتجهة له دلالة خاصة.

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft ، وتمثِّل الدالة $f(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 s.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افترض أن $t = 5$ ، وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{2000 - 16(5+h)^2 - [2000 - 16(5)^2]}{h}$$ $f(5+h) = 2000 - 16(5+h)^2$, $f(5) = 2000 - 16(5)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-160h - 16h^2}{h}$$ فك المقدار $(5+h)^2$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (-160 - 16h)$$ اقسم على h

$$= -160 - 16(0) = -160$$ عوّض وبسّط

أي أن سرعة الكرة بعد 5 s هي 160 ft/s، أما الإشارة السالبة فتعني أن الكرة تهبط لأسفل.

تحقق من فهمك

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 s .

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهة اللَّحظية عند أي زمن.

مثال 5 السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن .

طبِّق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$$ $s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$, $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$ فك المقدار $(t+h)^3$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$ اقسم على h

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$ عوّض وبسّط

$$= 18 - 9t^2$$ بسّط

أي أنَّ معادلة سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي زمن هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تحقق من فهمك

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًا من مستوى سطح البحر، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن .

تنبيه!

التعويض

تذكر أن توزّع الإشارة السالبة إلى يسار $f(t)$ على كل حد فيها.

تدرب وحل المسائل

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $y = x^2 - 5x$, $(1, -4)$, $(5, 0)$

2) $y = 6 - 3x$, $(-2 , 12)$, $(6, -12)$

3) $y = \frac{3}{x}$, $(1, 3)$, $(3, 1)$

4) $y = x^3 + 8$, $(-2, 0)$, $(1, 9)$

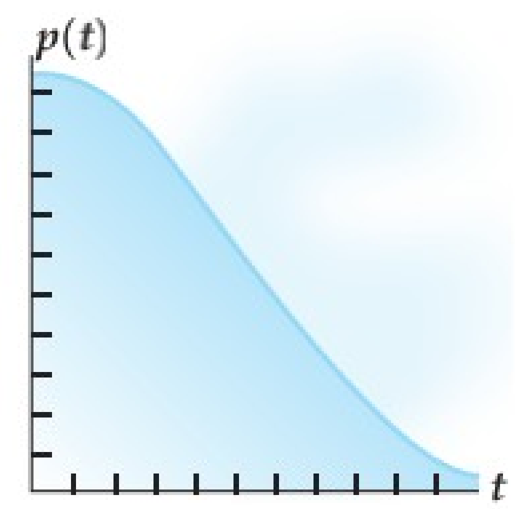
أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (مثال 2)

5) $y = 4 - 2x$ 6) $y = -x^2 + 4x$

7) $y = 8 - x^2$ 8) $y = \frac{1}{x^2}$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 10) $y = -2x^3$

11) **تزلج:** تمثِّل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي بعد t ثانية من انطلاقه. (مثال 2)



a) أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن.

b) أوجد الميل عندما $t = 2s, 5s, 7s$.

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة. (تذكر بأن تحوِّل الدقائق إلى ساعات) :(مثال 3)

12) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$, $3 \le t \le 5$

13) $s(t) = 1.08t - 30$, $4 \le t \le 8$

14) $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2$, $4 \le t \le 7$

15) $s(t) = -0.5(t - 5)^2 + 3$, $4 \le t \le 4.5$

16) تمثِّل المعادلة $f(t) = -16t^2 + 65t + 12$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت إلى أعلى، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة بين $t = 15, 2t$. (مثال 3)

تمثِّل $f(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللَّحظية لهذا الجسم عند الزمن المُعطى: (مثال 4)

17) $f(t) = 100 - 16t^2, t = 3$

18) $f(t) = 38t - 16t^2, t = 0.8$

19) $f(t) = -16t^2 - 400t + 1700, t = 3.5$

20) $f(t) = 1275 - 16t^2, t = 3.8$

21) $f(t) = 73t - 16t^2, t = 4.1$

22) $f(t) = -16t^2 + 1100, t = 1.8$

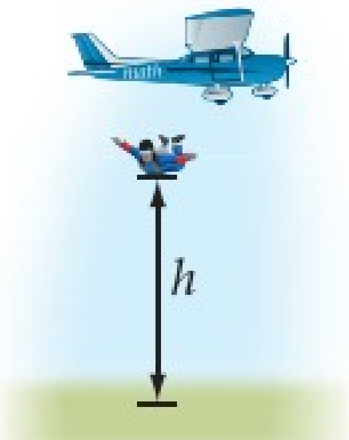
تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن : (مثال 5)

23) $s(t) = 14t^2 - 7$ 24) $s(t) = t - 3t^2$

25) $s(t) = 5t + 8$ 26) $s(t) = 18 - t^2 + 4t$

27) $s(t) = 12t^2 - 2t^3$ 28) $s(t) = 3t^3 - 20 + 6t$

29) **قفز مظلي:** يمكنُ وصفُ ارتفاع مظلي بالأقدام عن سطح الأرض بعد t ثانية من قفزه بالدالة $h(t) = 15000 - 16t^2$. (الأمثلة 3, 4, 5)



a) أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للمظلي بين الثانيتين الثانية والخامسة من القفز.

b) كم بلغت السرعة المتجهة اللحظية للمظَلِّي عند الثانية الثانية، وعند الثانية الخامسة؟

c) أوجد معادلة سرعة المظلي المتجهة اللحظية عند أي زمن.

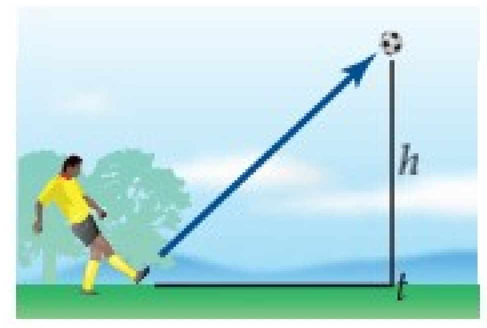
30) **غوص:** يُبيِّنّ الجدول أدناه ارتفاع غواص d مقربًا لأقرب جزء من عشرة بالأمتار عن سطح الماء بعد t ثانية من قفزه من مكان مرتفع نحو الماء.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.8	42.3	40.1	34	25.3	14.3	0.75

a) احسب السرعة المتوسطة المتجهة للغواص في الفترة الزمنية $0.5 \le t \le 1.0$.

b) إذا كانت معادلة المنحنى لنقاط الجدول هي $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$، فأوجد معادلة سرعة الغواص المتجهة اللحظية $v(t)$ بعد t ثانية، ثم استعمل $v(t)$ لحساب سرعته بعد 3s.

31) **كرة القدم:** ركل سلمان كرة بسرعة رأسية قدرها 75 ft/s. افترض أن ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية مُعطى بالدالة $f(t) = -16t^2 + 75t + 2.5$.



a) أوجد معادلة سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$.

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 s من ركلها؟

c) إذا علمت أن السرعة المتجهة اللحظية للكرة لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع هي صفر، فمتى تصل إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

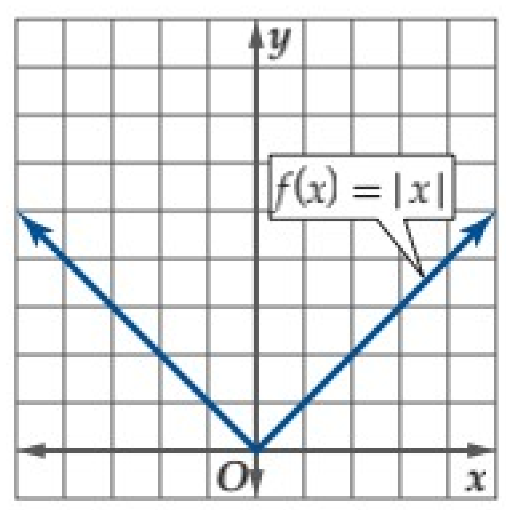
32) **فيزياء:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بالمعادلة $d(t) = 3t^3 + 8t + 4$، حيث t الزمن بالثواني، و d المسافة بالأمتار.

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للجسم $v(t)$ عند أي زمن.

b) استعمل $v(t)$ لحساب سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2\,s, 4\,s, 6\,s$

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **اكتشف الخطأ:** سُئل علي وجميل أن يصفا معادلة ميل مماس منحنى الدالة الممثَّلة بيانيًا في الشكل المجاور عند أي نقطة على منحناها. فقال علي: إن معادلة الميل ستكون متصلة ؛ لأن الدالة الأصلية متصلة ، في حين قال جميل: إن معادلة الميل لن تكون متصلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.



34) **تحدٍّ:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه.

35) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة " يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط"؟ برِّر إجابتك.

36) **تبرير:** صح أم خطأ: إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم بعد t ثانية بـ $s(t) = at + b$، فإن السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا. برِّر إجابتك.

37) **اكتب** بيِّن لماذا تكون السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحرك صفرًا عند نقطة القيمة العظمى والصغرى لدالة المسافة.

مراجعة تراكمية

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت) : (الدرس 8-2)

38) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + 2x - 2)$

39) $\lim\limits_{x \to -1} (-x^4 + x^3 - 2x + 1)$

40) $\lim\limits_{x \to 0} (x + \sin x)$

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 8-2)

41) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 5}$

42) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 2}{x^4 + x^3 + 3x}$

تدريب على اختبار

43) ما معادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟

A $m = 4x$ C $m = x$

B $m = 2x$ D $m = -4x$

44) سقطت كرة بشكل رأسي، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$. إذا كانت $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{d(2+h) - d(2)}{h}$ تمثِّل السرعة المتجهة للكرة بعد 2s ، فكم تساوي هذه السرعة ؟

A 46 ft/s C 64 ft/s

B 58 ft/s D 72 ft/s

45) ماميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة $(3, 34)$؟

A -9 C 27

B 9 D 34

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-8 إلى 3-8

قدِّر كل نهاية مما يأتي: (الدرس 2-8)

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$

2) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$

3) $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$

4) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$

5) $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x^2 + 1}$

6) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 + 3}$

7) $\lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{x + 20}}{x}$

8) $\lim_{x \to 3} \frac{|4 - x|}{\sqrt{3x}}$

9) تزداد قيمة تحفة فنية فريدة سنويًّا بحيث تُعطى قيمتها بآلاف الريالات بعد t سنة بالعلاقة $v(t) = \frac{400t + 2}{2t + 15}$. (الدرس 1-8)

a) مثِّل الدالة $v(t)$ بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 10$.

b) استعمل التمثيل البياني؛ لتقدير قيمة التحفة الفنية عندما $t = 2, 5, 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

d) وضِّح العلاقة بين النهاية وسعر التحفة الفنية.

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر ، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. (الدرس 2-8)

10) $\lim_{x \to 9} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - 3}$

11) $\lim_{x \to -2} (2x^3 + x^2 - 8)$

12) **حياة بريَّة:** يمكن تقدير عدد الغزلان بالمئات في محمية بالعلاقة $P(t) = \frac{10t^3 - 40t + 2}{2t^3 + 14t + 12}$ ، وذلك بعد t سنة ، حيث $t \ge 3$ . . ما أكبر عدد للغزلان يمكن أن يوجد في هذه المحمية؟ (الدرس 2-8)

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الدرس 2-8)

13) $\lim_{x \to \infty} (15 - x^2 + 8x^3)$

14) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x - 2}{4x^3 + 5x^2}$

15) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{2x^4 - 14x^2 + 2}$

16) $\lim_{x \to \infty} (10x^3 - 4 + x^2 - 7x^4)$

17) **اختيار من متعدد:** قدِّر $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 5}{10 - (2.7)^{\frac{16}{x}}}$ (الدرس 1-8)

A غير موجودة

B $\frac{1}{2}$

C ∞

D $-\infty$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 3-8)

18) $y = x^2 - 3x$, $(2, -2)$, $(-1, 4)$

19) $y = 2 - 5x$, $(-2, 12)$, $(3, -13)$

20) $y = x^3 - 4x^2$, $(1, -3)$, $(3, -9)$

21) **ألعاب نارية:** انطلقت قذيفة ألعاب نارية رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 90 ft/s، وتمثِّل الدالة $h(t) = -16t^2 + 90t + 3.2$ الارتفاع الذي تبلغه القذيفة بعد t ثانية من إطلاقها. (الدرس 3-8)

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقذيفة.

b) ما السرعة المتجهة للقذيفة بعد 0.5 s من الإطلاق؟

c) ما أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة؟

22) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثِّل معادلة ميل منحنى $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة عليه؟ (الدرس 3-8)

A $m = 7x$

B $m = 14x$

C $m = 7x - 2$

D $m = 14x - 2$

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة بالدالة $s(t)$. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية المعطاة. تذكَّر أن تحول الدقائق إلى ساعات. (الدرس 3-8)

23) $s(t) = 12 + 0.7t$, $2 \le t \le 5$

24) $s(t) = 2.05t - 11$, $1 \le t \le 7$

25) $s(t) = 0.9t - 25$, $3 \le t \le 6$

26) $s(t) = 0.5t^2 - 4t$, $4 \le t \le 8$

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي: (الدرس 3-8)

27) $h(t) = 4t^2 - 9t$

28) $h(t) = 2t - 13t^2$

29) $h(t) = 2t - 5t^2$

30) $h(t) = 6t^2 - t^3$

8-4

المشتقات
Derivatives

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ حساب ميل المماسات لإيجاد مُعدَل التغيُّر اللحظي. (الدرس 3-8)

والآن:
- أجدُ ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
- أستعملُ قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.

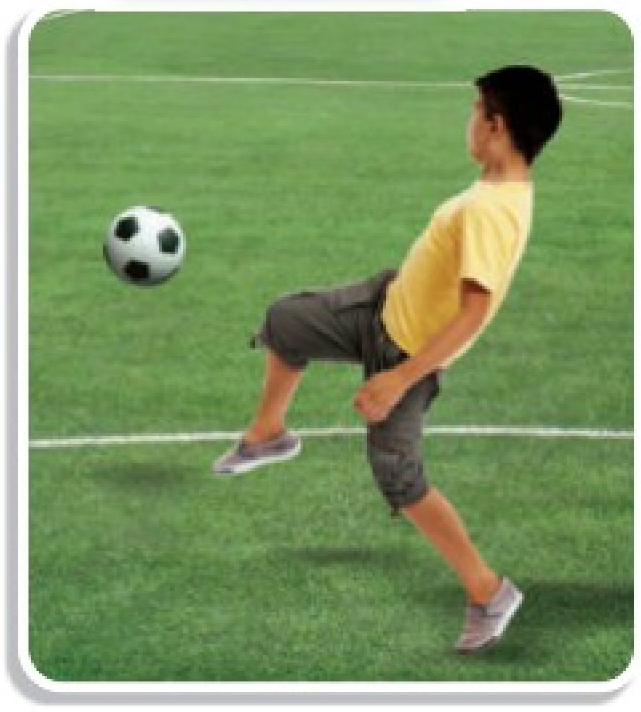
المفردات:
المشتقة
derivative

الاشتقاق
differentiation

المعادلة التفاضلية
differential equation

المؤثر التفاضلي
differential operator

لماذا؟



ركل أحمد كرةً رأسيًّا إلى أعلى من ارتفاع 3 ft، فانطلقت بسرعة 65 ft/s . يمكنك استعمال معادلات الحركة بتسارع ثابت، التي درستها في الفيزياء لكتابة دالة تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية، ومن ثم تحديد ما إذا كانت الكرة ستبلغ ارتفاع 68 ft أم لا.

قواعد أساسية للاشتقاق: استعملت النهايات في الدرس 3-8 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه ، وتُسمى هذه النهاية **مشتقة الدالة** ويرمز لها بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **الاشتقاق**، وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

مثال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1 , 5$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة المشتقة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$$ $f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$, $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$$ بسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$$ اقسم على h

$$= [8x + 4(0) - 5] = 8x - 5$$ عوّض

أي أن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. احسب $f'(x)$ عندما $x = 1 , 5$.

$f'(x) = 8x - 5$	المعادلة الأصلية	$f'(x) = 8x - 5$
$f'(5) = 8(5) - 5$	$x = 1 , x = 5$	$f'(1) = 8(1) - 5$
$f'(5) = 35$	بسّط	$f'(1) = 3$

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

1A) $f(x) = 6x^2 + 7, x = 2 , 5$

1B) $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1 , 4$

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

قراءة الرياضيات
المشتقات
يُقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة f بالنسبة للمتغير x ، أو f prime of x .

تاريخ الرياضيات
شرف الدين الطوسي
العالم المسلم شرف الدين الطوسي (المتوفى عام 610هـ) من خلال دراسته المعادلات التي درجتها ≤3 استعمل في حل هذه المعادلات، القيمة العظمى للعبارات الجبرية، وأخذ "المشتق الأول "لهذه العبارات من دون أن يستعمل اسمه (المشتق الأول)، وبرهن على أن جذر المعادلة التي يحصل عليها إذا ما عُوّض به في العبارة الجبرية، أعطى القيمة العظمى للعبارة.

حتى هذه اللحظة استعملت النهاية؛ لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات من دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة القوة

التعبير اللفظي: قوة x في المشتقة أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 2 — قاعدة مشتقة القوة

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$ — الدالة المعطاة

$f'(x) = 9x^{9-1}$ — قاعدة مشتقة القوة

$= 9x^8$ — بسّط

b) $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$ — الدالة المعطاة

$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$ — أعد كتابة الدالة كقوّة نسبية

$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}$ — قاعدة مشتقة القوة

$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$ — بسّط

c) $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$ — الدالة المعطاة

$h(x) = x^{-8}$ — أعد كتابة الدالة كقوّة سالبة

$h'(x) = -8x^{-8-1}$ — قاعدة مشتقة القوة

$= -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$ — بسّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

2A) $j(x) = x^4$ 2B) $k(x) = \sqrt{x^3}$ 2C) $m(x) = \frac{1}{x^5}$

تنبيه!

مشتقات القوى السالبة

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدًا من الأس ؛ لنحصل على: $-4-1=-4+(-1)=-5$ ؛ لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$.

هناك العديد من قواعد الاشتقاق الأخرى المهمة التي تفيد في إيجاد مشتقات الدوال التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي — قواعد أخرى للاشتقاق

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$ ، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوّة: إذا كانت $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع
$= 15x^2$	بسّط

b) $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	الدالة المعطاة
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا مشتقتَي مضاعفات القوى، والمجموع
$= 16x^7 + 20x^4$	بسّط

c) $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	الدالة المعطاة
$h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$	اقسم كل حدٍّ في البسط على x
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} - 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}} = 10x + 9\sqrt{x}$	بسّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A) $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ 3B) $g(x) = 3x^4(x + 2)$ 3C) $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

إرشادات للدراسة

المشتقات

إذا كانت $f(x) = x$ ، فإن $f'(x) = 1$ ، و إذا كانت $f(x) = cx$ ، فإن $f'(x) = c$.

الآن ، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى، أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل، ففي مثال 5 من الدرس 3–4 ، أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسمٍ متحركٍ، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

تنبيه!

للتسهيل يمكنك إيجاد كلٍّ من ميل المماس لمنحنى الدالة، والسرعة المتجهة اللحظية، ومشتقة الدالة، باستخدام القواعد ما لم يُطلب منك استخدام النهايات لإيجاد أيٍّ منها.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$ ، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	الدالة المعطاة
$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بسّط

أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي: $v(t) = 18 - 9t^2$ ، لاحظ أن هذه الإجابة مكافئة لتلك التي حصلت عليها في المثال 5 من الدرس 3-4 .

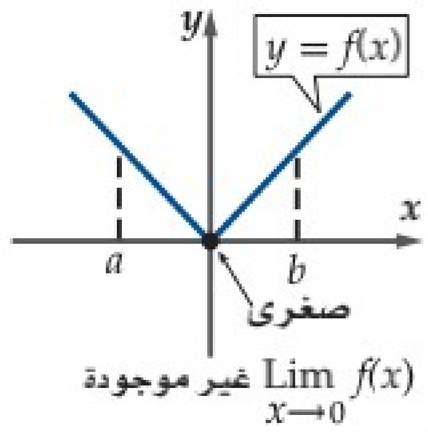
تحقق من فهمك

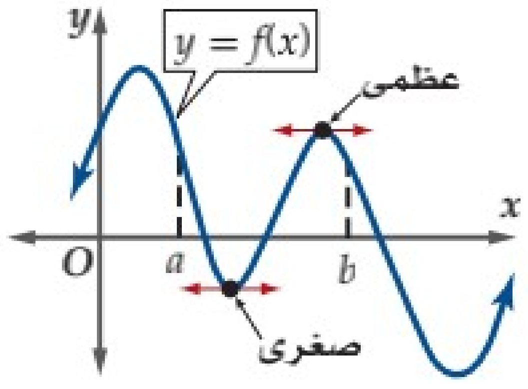
4) الدالة: $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثّل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن .

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى نقطةً حرجةً للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

مفهوم أساسي — نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند أحد طرفَي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.





لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

الربط مع الحياة

ازدادت سرعة الأفعوانيات حديثًا لتصل إلى 120 mi/h ، وكذلك ازدادت ارتفاعاتها لتبلغ 450 ft.

مثال 5 من واقع الحياة — القيمتان العظمى والصغرى لدالة

أفعوانية: الدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ **تمثّل ارتفاع إبراهيم بالأقدام في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم.**

أوجد مشتقة $h(t)$.

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3} \quad \text{الدالة المعطاة}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0 \quad \text{قواعد اشتقاق الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع، والفرق}$$

$$= -t^2 + 8t \quad \text{بسِّط}$$

أوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$$h'(t) = 0 \quad \text{اكتب المعادلة}$$

$$-t^2 + 8t = 0 \quad h'(t) = -t^2 + 8t$$

$$-t(t - 8) = 0 \quad \text{حلِّل}$$

إذن: $t = 8$ أو $t = 0$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإن للدالة نقطة حرجة واحدة عند $t = 8$ ؛ لذا نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

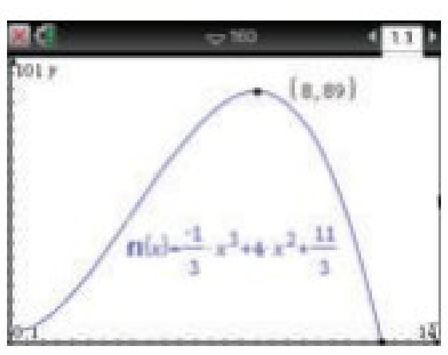
$$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$$

$$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89 \quad \text{قيمة عظمى}$$

$$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67 \quad \text{قيمة صغرى}$$

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه إبراهيم هو 89 ft، وذلك بعد 8 s، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.67 ft تقريبًا بعد 12 s.

التحقق من الحل التمثيل البياني للدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ المجاور على الفترة $[1, 12]$ باستعمال الآلة البيانية يعزِّز هذه النتيجة ، حيث يبيِّن التمثيل البياني أن أعلى ارتفاع يساوي 89 ft ، ويكون عندما $t = 8$ s. وأدنى ارتفاع يساوي 3.67، ويكون عندما $t = 12$ s ✓



إرشادات للدراسة

دالة كثيرة الحدود
مجال تعريف دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذلك إذا كانت المشتقة دالة كثيرة حدود، فإن النقاط الحرجة توجد فقط عندما تكون المشتقة صفرًا.
ولذلك عند إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة كثيرة حدود $f(x)$ على فترة $[a, b]$، نجد قيم الدالة عند طرفَي الفترة وعند أي قيمة لـ x تكون عندها $f'(x)=0$.

✓ تحقق من فهمك

5) **رياضة القفز:** الدالة: $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثّل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبل مطاطيٍّ)، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

قاعدتا مشتقَّتَي الضرب والقسمة: تعلَّمت في هذا الدرس أن مشتقة مجموع دالَّتين تساوي مجموع مشتقَّتَي الدالَّتين، فهل تكون مشتقة ناتج ضرب دالتين مساويةً لناتج ضرب مشتقتَي الدالتين؟ افترض أن: $f(x) = x, g(x) = 3x^3$.

مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3] = \frac{d}{dx}(3x^4) = 12x^3$$

ضرب المشتقات

$$\frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3) = 1 \cdot 9x^2 = 9x^2$$

يتضح من هذا المثال أن مشتقة ناتج ضرب دالَّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقتَي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالَّتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة الضرب**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f وَ g موجودة عند x، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\, g(x)] = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

ستبرهن قاعدة مشتقة الضرب في التمرين 48

مثال 6 قاعدة مشتقة الضرب

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 2x + 7, g(x) = 3x^2 - 5$، أي أن: $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 2$ قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 3x^2 - 5$ من الفرض

$g'(x) = 6x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$ عوِّض

$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$ خاصية التوزيع

$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$ بسِّط

b) $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64, g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$ قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 6x^2 - x - 2$ من الفرض

$g'(x) = 12x - 1$ قواعد مشتقات ومضاعفات القوى، والقوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$ عوِّض

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

6A) $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

6B) $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة الضرب

يَنتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه. ويمكنك أيضًا تركه على حاله من دون تبسيط، ما لم تكن في حاجة إلى تبسيطه.

بطريقة التبرير نفسها في مشتقة الضرب، يمكنك ملاحظة أن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتَي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة القسمة**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x، وكان $g(x) \neq 0$، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ستبرهن قاعدة مشتقة القسمة في التمرين 50

مثال 7 قاعدة مشتقة القسمة

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = \frac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

افترض أن: $f(x) = 5x^2 - 3,\ g(x) = x^2 - 6$ ؛ أي أن: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ من الفرض

$f'(x) = 10x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ من الفرض

$g'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ عوِّض

$= \frac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \frac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بسِّط

b) $h(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

افترض أن: $f(x) = x^2 + 8,\ g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والمجموع

$g(x) = x^3 - 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$ عوِّض

$= \frac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$ فك الأقواس، ثم بسِّط

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة القسمة
يُعدّ تبسيط ناتج مشتقة القسمة مهمًّا في كثير من التمارين، إلا أنه ليس من الضروري فك أقواس المقام، ما لم ينتج عن ذلك تبسيط أكثر.

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

7A) $j(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5}$

7B) $k(x) = \frac{6x}{2x^2 + 4}$

تدرب وحل المسائل

أوجد مشتقةَ كلِّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $f(x) = 4x^2 - 3,\ x = 2, -1$

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11,\ t = 5, 3$

3) $m(j) = 14j - 13,\ j = -7, -4$

4) $v(n) = 5n^2 + 9n - 17,\ n = 7, 2$

5) $r(b) = 2b^3 - 10b,\ b = -4, -3$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (المثالان 2, 3)

6) $y(f) = -11f$

7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

8) $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$

9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$

11) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

12) $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$

13) $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$

14) **درجات حرارة:** تُعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة:
$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ ،
حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم. (مثال 4)

a) أوجد معادلة تمثل مُعدّل التغيّر اللّحظي لدرجة الحرارة.

b) أوجد مُعدَّل التغيّر اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2, 14, 20$.

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة: $0 \le h \le 24$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة. (مثال 5)

15) $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$

16) $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4]$

17) $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115, [-6, -3]$

18) $f(x) = -5x^2 - 90x, [-11, -8]$

19) $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k, [0, 3]$

20) $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8, [-5, 5]$

21) **رياضة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. الدالة: $h(t) = 65t - 16t^2 + 3$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية، عندما $0 \le t \le 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$.

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة $h(t)$ في الفترة $[0, 4]$.

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 68 ft ؟

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 6)

22) $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

23) $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

24) $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

25) $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$

26) $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$

27) $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$

28) $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالةٍ ممّا يأتي: (مثال 7)

29) $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$

30) $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

31) $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$

32) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{-x^2 + 3}$

33) $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$

34) $t(w) = \frac{w + w^4}{\sqrt{w}}$

35) قام بائع ملابس بإيجاد العلاقة بين سعر قميص، وعدد القطع المبيعة منه يوميًا، فوجد أنه عندما يكون سعر القميص d ريالًا ، فإن عدد القطع المبيعة يوميًا يساوي $80 - 2d$.

a) أوجد $r(d)$ التي تمثل إجمالي المبيعات اليومية، عندما يكون سعر القميص d ريالًا.

b) أوجد $r'(d)$.

c) أوجد السعر d الذي تكون عنده قيمة المبيعات اليومية أكبر ما يمكن.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مَثِّل الدالة والمشتقة بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.
(إرشاد: يمكنك استعمال الحاسبة البيانية في التمثيل البياني)

36) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$

37) $g(x) = \sqrt{x} + 4$

38) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 10x - 11$

39) $g(x) = \frac{1}{x}$

40) **المشتقات العليا:** لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة f، ويُرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، أو الرمز $f^{(2)}(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثالثة للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$، وتسمى المشتقات على هذا النحو المشتقات العليا للدالة f. أوجد كلًّا مما يأتي:

a) المشتقة الثانية للدالة: $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b) المشتقة الثالثة للدالة: $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c) المشتقة الرابعة للدالة: $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

مَثِّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

41) المشتقة تساوي 0، عندما $x = -1, 1$.

42) المشتقة غير معرَّفة، عندما $x = 4$.

43) المشتقة تساوي -2 ، عندما $x = -1, 0, 2$.

44) المشتقة تساوي 0، عندما $x = -1, 2, 4$.

45) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين ستستكشف علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال.

a) **تحليليًّا:** أوجد مشتقة صيغة مساحة الدائرة بالنسبة لنصف القطر r.

b) **لفظيًّا:** وضِّحِ العلاقةَ بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **a**.

c) **بيانيًّا:** ارسم مربعًا طول ضلعه $2a$ ، ومكعبًا طول ضلعه $2a$.

d) **تحليليًّا:** اكتب صيغةً تمثِّل مساحة المربع، وأخرى تمثِّل حجم المكعب بدلالة a ، ثم أوجد مشتقتَي الصيغتين.

e) **لفظيًّا:** وَضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **d**.

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$ ، حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$ ، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$ ، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

47) **تحدٍّ:** أوجد $f'(y)$ علمًا بأن:

$$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$$

48) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة الضرب، بإثبات أن:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، وأضف $f(x)g(x+h)$ إلى البسط واطرحه منه).

49) **تبرير:** بيِّن ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.

"إذا كانت: $f(x) = x^{5n+3}$ ، فإن $f'(x) = (5n+3)\,x^{5n+2}$"

50) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة القسمة، وذلك بإثبات أن:

$$\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، ووحِّد المقامات في البسط، ثم أضف $f(x)\,g(x)$ إلى البسط واطرحه منه).

51) **اكتب:** هل من الممكن أن يكون لدالَّتين مختلفتين المشتقة نفسها؟ عزِّز إجابتك بأمثلة.

مراجعة تراكمية

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 3-8)

52) $y = x^2 - 3x, (0, 0)\ , (3, 0)$

53) $y = 4 - 2x, (-2, 8)\ , (6, -8)$

54) $y = x^2 + 9, (3, 18)\ , (6, 45)$

احسب كل نهايةٍ ممَّا يأتي: (الدرس 2-8)

55) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

56) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$

57) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x + 9}{x^2 - 5x - 24}$

قدِّر كل نهايةٍ ممَّا يأتي: (الدرس 1-8)

58) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x^2 - x - 12}{|x - 4|}$

59) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + 2x + 3)$

تدريب على اختبار

60) ما مشتقة: $h(x) = (-7x^2 + 4)\,(2 - x)$ ؟

A $h'(x) = -14\,x$

B $h'(x) = 14\,x$

C $h'(x) = -21x^2 - 28x + 4$

D $h'(x) = 21x^2 - 28x - 4$

61) ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1, 2)$؟

A 1

B 2

C 4

D 8

62) ما مشتقة: $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$ ؟

F $f'(x) = \frac{40}{3}\,x^{\frac{5}{3}}$

G $f'(x) = \frac{40}{3}\,x^{\frac{8}{3}}$

H $f'(x) = 225\,x^{\frac{5}{3}}$

J $f'(x) = 225\,x^{\frac{8}{3}}$

8-5

المساحة تحت المنحنى والتكامل
Area Under the Curve and Integration

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائصها. (الدرس 2–8)

والآن:

- أقرِّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات:

التجزيء المنتظم
regular partition

التكامل المحدد
definite integral

الحد الأدنى
lower limit

الحد الأعلى
upper limit

مجموع ريمان الأيمن
right Riemann sum

التكامل
integration

لماذا؟

التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالريال .

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

مثال 1 المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

مثّل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية، باتباع الخطوات التالية:

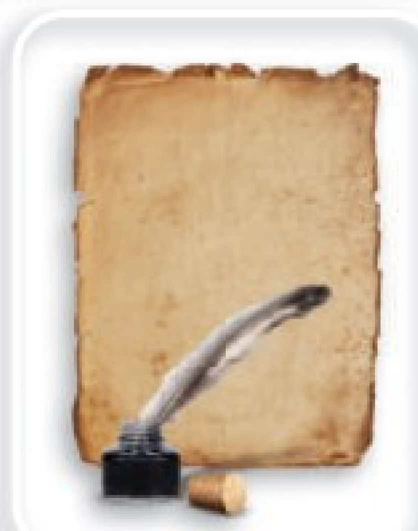
1) أوجد طول الفترة $[0, 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها.

2) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات، فمثلًا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم: $12 \div 4 = 3$

3) قسِّم الفترة $[0, 12]$ إلى 4 فترات (لأربعة مستطيلات) طول كل منها يساوي 3

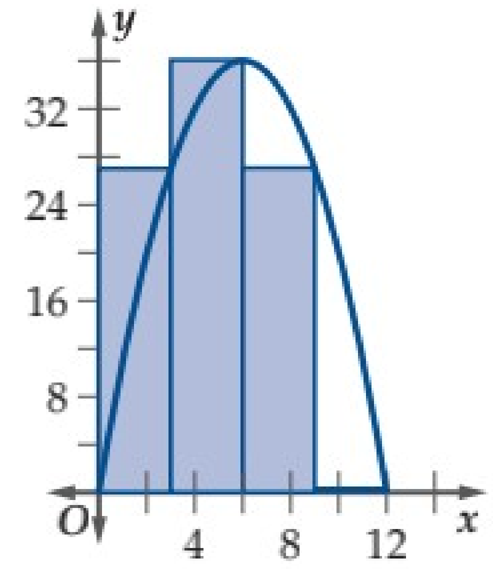
4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلًا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) هي $f(3), f(6), f(9), f(12)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.



تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة (221 هـ – 288 هـ) من أوائل من وضع نواة علم التكامل من خلال نظريته" إذا ضوعف عدد أضلاع المضلع المنتظم، المرسوم بين محيطين أو مساحتين إلى ما لا نهاية، صغر الفرق تدريجيًا بين الأضلاع كلما اقترب من المركز، واقترب من الصفر حتى يفنى".



الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

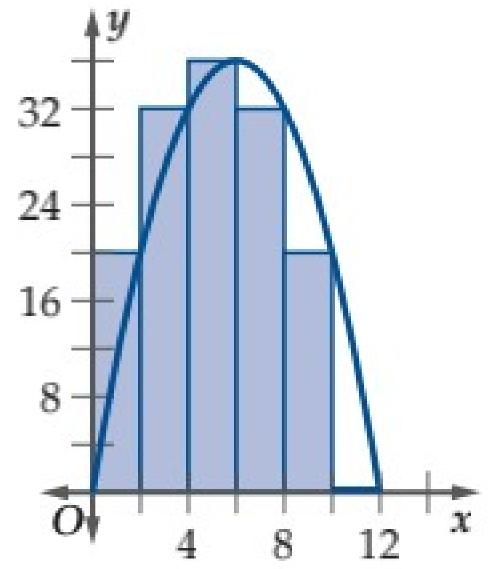
$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$

$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$

$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$

$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة.



الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$

$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$

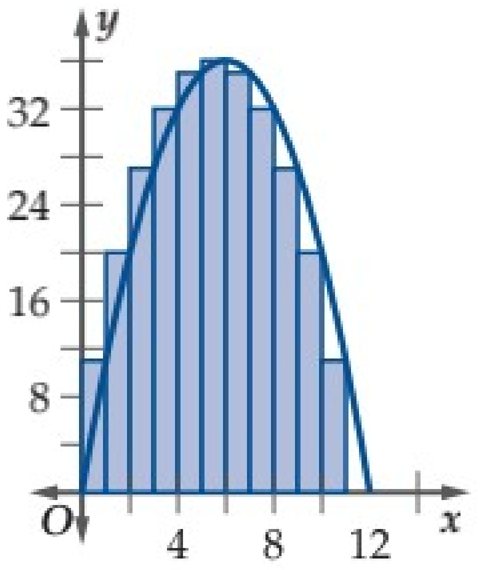
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$

$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$

$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$

$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة.



الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$

$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$

$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$

$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$

$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$

$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$

$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$

$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$

$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 286 وحدة مربعة.

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

✓ تحقق من فهمك

1) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

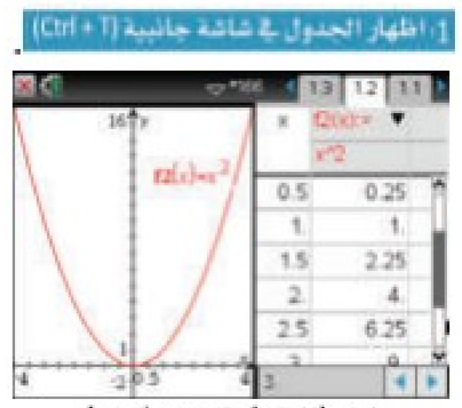
قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

إرشاد تقني

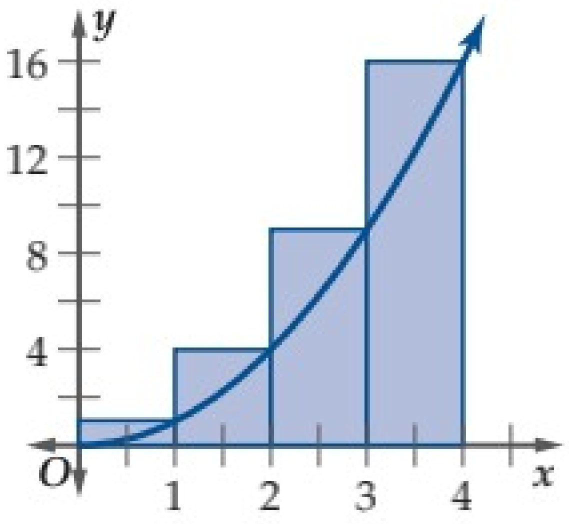
جداول: للحصول على ارتفاعات متعددة للمستطيلات، والتي تمثل بعض قيم $f(x)$ باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. مثّل الدالة باستعمال تطبيق الرسوم البيانية، وذلك بالضغط على on ثم كتابة الدالة $f(x) = x^2$. ويمكن توضيح ارتفاعات المستطيلات $f(x)$ باستعمال جدول، وذلك بالضغط على menu ومنها اختيار 7: الجدول

1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)



[−4, 4] scl: 0.5 by [−2, 16] scl: 1

ويمكنك تعديل فترات قيم x في الجدول بالضغط على menu ومنها 2: الجدول ، ثم 5: تحرير إعدادات الجدول... ثم حدد بداية الجدول والخطوة أو تدريج قيم x.

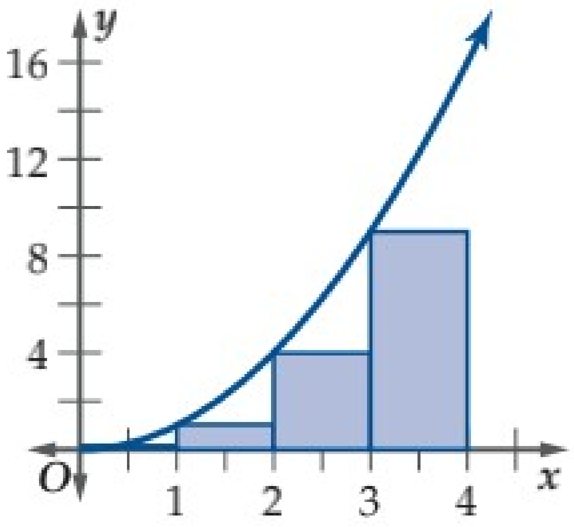


الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$
$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$
$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

✓ تحقق من فهمك

2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

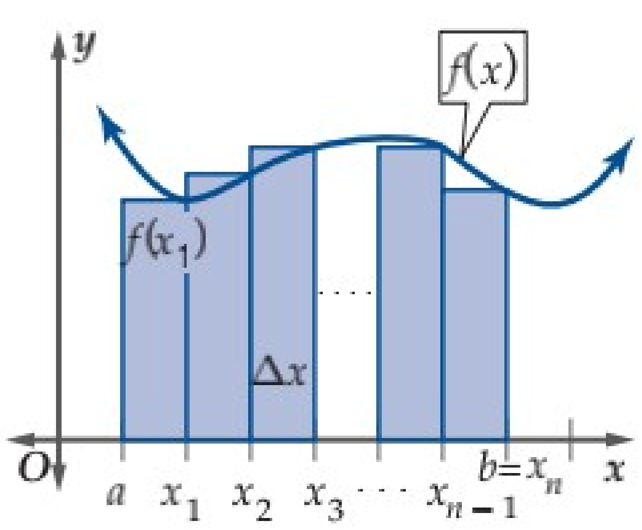
التكامل لاحظ في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i = 1$ إلى $i = n$.

في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمَّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b - a$ ، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل من المستطيلات التي عددها n) هو $\frac{b-a}{n}$ ، ويُرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن لقاعدة المستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.



يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة المستطيل الأول هي $\Delta x\, f(x_1)$، ومساحة المستطيل الثاني هي $\Delta x\, f(x_2)$، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

$$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$ اجمع المساحات

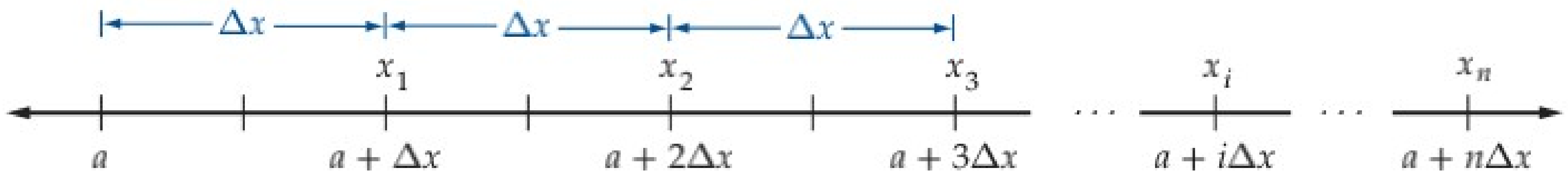
$$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$ أخرج العامل المشترك Δx

$$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$ استعمل رمز المجموع

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$$ خواص رمز المجموع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx ، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i . وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

قراءة الرياضيات

رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x)dx$ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$ بالنسبة لـ x

مفهوم أساسي — التكامل المحدد

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \ , \ \Delta x = \frac{b-a}{n}, \ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a الحد الأدنى، و b الحد الأعلى، وتُسمَّى هذه الطريقة مجموع ريمان الأيمن.

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1866 – 1826). والذي يُعزى إليهِ إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

تنبيه!

المجموع

إن مجموع عدد ثابت c هو $c\,n$ ، فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad , \quad c \text{ عدد ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

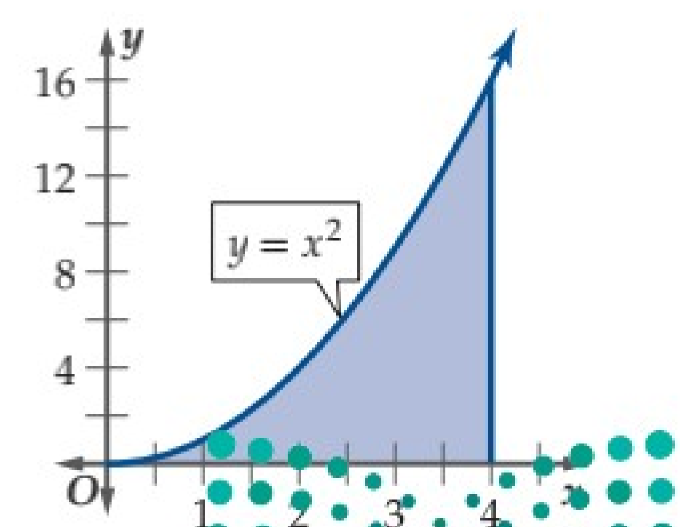
$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \ , \ c \text{ عدد ثابت}$$

مثال 3 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ؛ أي $\int_0^4 x^2\, dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ $b = 4 , a = 0$

$x_i = a + i\,\Delta x$ صيغة x_i

$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n}$ $a = 0 , \Delta x = \frac{4}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

تعريف التكامل المحدد	$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
$f(x_i) = x_i^2$	$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$
$x_i = \frac{4i}{n}$, $\Delta x = \frac{4}{n}$	$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2 \left(\frac{4}{n}\right)$
خصائص المجموع	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$
وزّع القوة	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$
خصائص المجموع	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$
اضرب ووزّع	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$
اضرب	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$
اقسم	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$
حلّل	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$
اقسم على n^2	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$
خصائص النهايات	$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty} 2 + \left(\lim_{n\to\infty} 3\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right]$
	$= \frac{64}{6}\,[2 + 3(0) + 0] = \frac{64}{3} \approx 21.33$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

النهايات

حلّل كل مجموع بحيث تتضمن العبارات الباقية إما أعدادًا ثابتة أو i فقط، ثم طبق صيغة المجموع المناسبة.

تحقق من فهمك

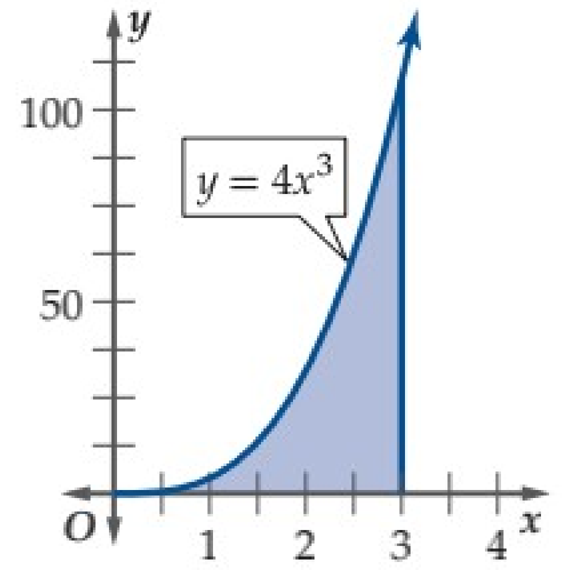
استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

3A) $\int_0^1 3x^2\,dx$

3B) $\int_0^3 x\,dx$

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات حال كون نقطة الأصل ليست حدًّا أدنى لها.

مثال 4 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل



استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n} \quad b = 3 , a = 1$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \quad \text{صيغة } x_i$$

$$= 1 + i\,\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n} \quad a = 1 , \Delta x = \frac{2}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3 \Delta x \quad f(x_i) = 4(x_i)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \left(\frac{2}{n}\right) \quad x_i = 1 + \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right] \quad \text{مفكوك } \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right) \quad \text{بسّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^3}{n^3}\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \left(n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \quad \text{صيغ المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right) \quad \text{وزّع واضرب}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right) \quad \text{بسّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[8 + 24\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \quad \text{اقسم}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{خصائص النهايات}$$

$$= 8 + 24(1+0) + 16(2+0+0) + 16(1+0+0) = 80 \quad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تنبيه!

النهايات

عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال المجاميع، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع x Δ أو أي ثوابت أخرى.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(4A $\int_1^3 x^2\,dx$

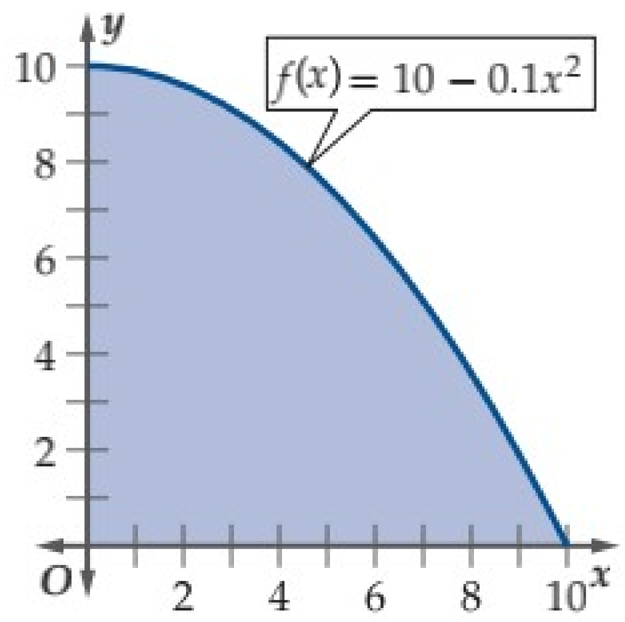
(4B $\int_2^4 x^3\,dx$

الربط مع الحياة

الجرانيت

الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل في تبليط الأرضيات.

مثال 5 من واقع الحياة — المساحة تحت منحنى



بلاط: يكلِّف تبليط القدم المربعة الواحدة من فناء منزل بالجرانيت 22.4 ريالًا. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالقدم المربعة لأيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10} (10 - 0.1x^2)\,dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n} \qquad a = 0 , b = 10$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{10}{n} = \frac{10i}{n} \qquad a = 0 , \Delta x = \frac{10}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_0^{10} (10 - 0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (10 - 0.1x_i^2)\Delta x \qquad f(x_i) = 10 - 0.1x_i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[10 - 0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{10}{n} \qquad x_i = \frac{10i}{n} , \Delta x = \frac{10}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(10 - \frac{10i^2}{n^2}\right) \qquad \text{استعمل خصائص المجموع وبسّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 10 - \sum_{i=1}^{n} \frac{10i^2}{n^2}\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 10 - \frac{10}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \left(10n - \frac{10}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \qquad \text{صيغ المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{100n}{n} - \frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right) \qquad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(100 - \frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right) \qquad \text{اقسم على } n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[100 - \frac{50}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \qquad \text{اقسم على } n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} 100 - \frac{50}{3} \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{خصائص النهايات}$$

$$= 100 - \frac{50}{3}(2 + 0 + 0) = 66\frac{2}{3} \approx 66.67 \qquad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ ft^2$ تقريبًا؛ لذا فإن تكلفة تبليط الممرين هي $(66.67 \times 2) \times 22.4$ ريال أو 2986.8 ريالًا تقريبًا.

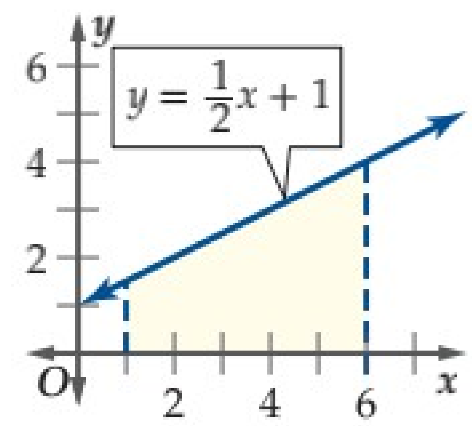
تحقق من فهمك

5) طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ ft^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)dx$ ؟ برِّر إجابتك.

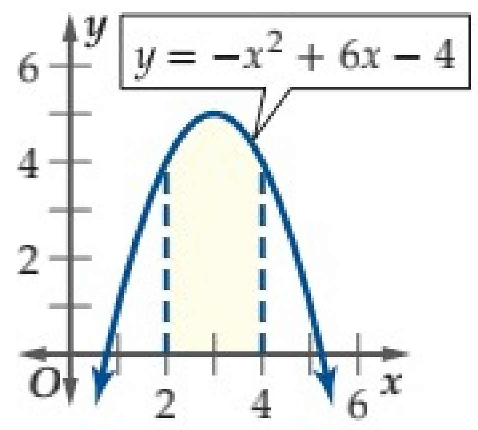
تدرب وحل المسائل

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملًا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍّ من الأشكال أدناه: (مثال 1)

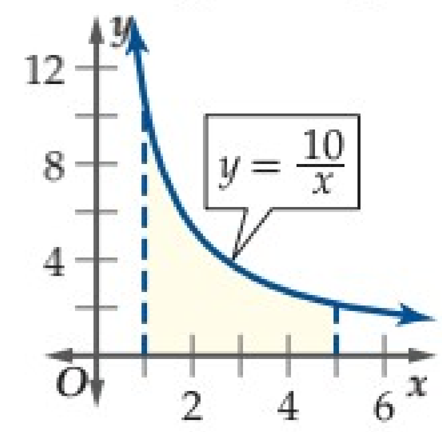
1) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن



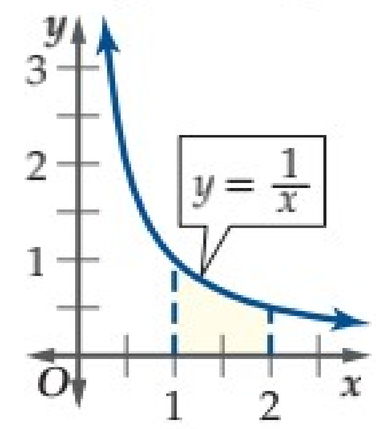
2) 4 مستطيلات
الطرف الأيسر



3) 8 مستطيلات
الطرف الأيمن



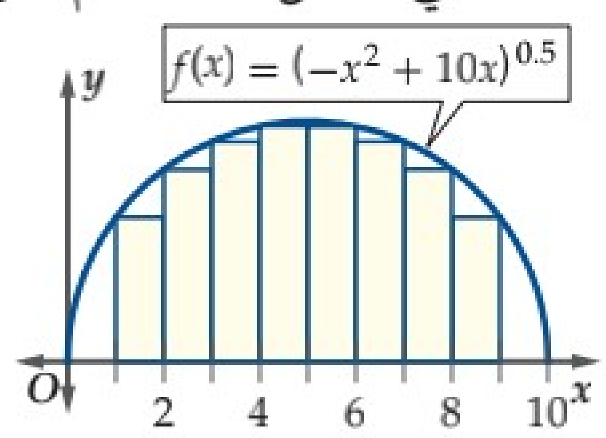
4) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن



5) **أرضيات:** يرغب أحمد في تبليط جزء من فناء منزله على شكل نصف دائرة تمثله $f(x) = (-x^2 + 10x)^{0.5}$. (مثال 1)

a) قرِّب مساحة المنطقة نصف الدائرية باستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة.

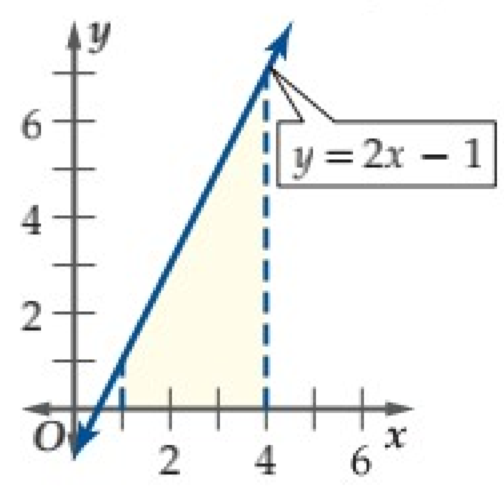
b) إذا قرَّر أحمد تقريب المساحة باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى معًا كما في الشكل أدناه، فكم تكون المساحة؟



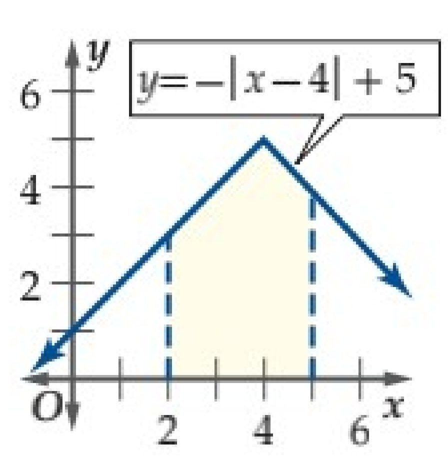
c) أوجد مساحة المنطقة باستعمال صيغة مساحة نصف الدائرة. أي التقريبين أقرب إلى المساحة الحقيقية؟ فسِّر إجابتك.

قرِّب مساحة المنطقة المظلَّلة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتية مستعملًا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين: (مثال 2)

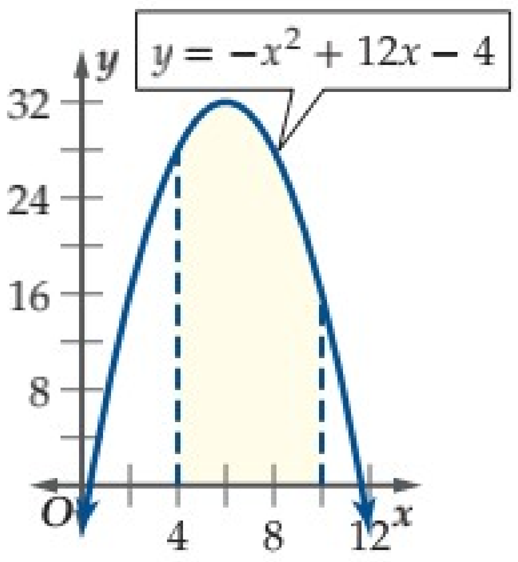
6) العرض 0.5



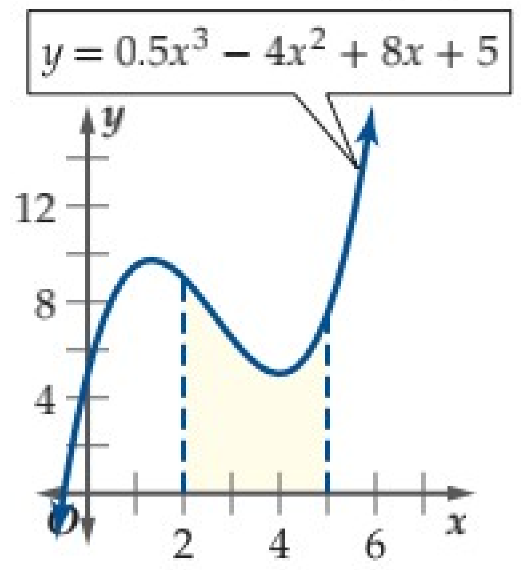
7) العرض 0.5



8) العرض 0.75



9) العرض 0.5



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي: (المثالان 3, 4)

10) $\int_1^4 4x^2\, dx$

11) $\int_0^2 6x\, dx$

12) $\int_1^3 (2x^2 + 3)\, dx$

13) $\int_0^4 (4x - x^2)\, dx$

14) $\int_3^4 (-x^2 + 6x)\, dx$

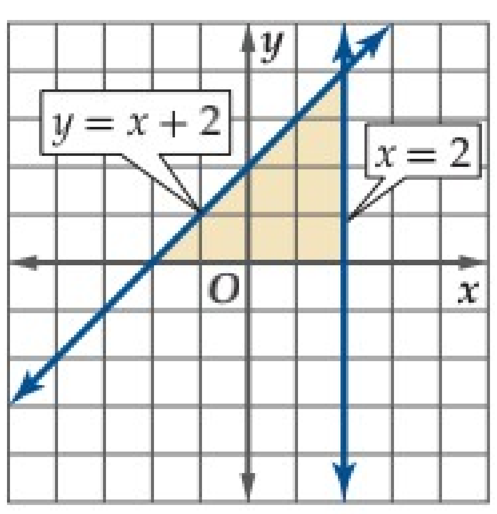
15) $\int_2^4 (-3x + 15)\, dx$

16) $\int_1^5 (x^2 - x + 1)\, dx$

17) $\int_1^3 12x\, dx$

18) **طباعة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس . إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميًّا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب، فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل $\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\, dx$. (مثال 5)

19) يمكن حساب التكاملات المحددة عندما يكون أحد حدي التكامل موجبًا والآخر سالبًا.



a) أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحته باستعمال قانون مساحة المثلث.

b) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^{2} (x + 2)\, dx$.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

20) $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$

21) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\, dx$

22) $\int_{-4}^{-2} (-x^2 - 6x)\, dx$

23) $\int_{-3}^{-2} -5x\, dx$

24) $\int_{-2}^{0} (2x + 6)\, dx$

25) $\int^{0} (x^3 - 2x)\, dx$

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمُعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_{-3}^{-1}(-2x^2-7x)\,dx$

27) $\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx$

28) $\int_{-4}^{3}2\,dx$

29) $\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$

30) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

a) **بيانيًا:** مَثِّل منحنيي $f(x)=-x^2+4$, $g(x)=x^2$ في المستوى الإحداثي نفسه، وظلِّل المساحتين اللتين يمثلهما التكاملان $\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_0^1(-x^2+4)\,dx$

b) **تحليليًا:** احسب $\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_0^1(-x^2+4)\,dx$.

c) **لفظيًا:** وضِّح لماذا تكون مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين مساويةً لـ $\int_0^1(-x^2+4)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$. ثم احسب هذه القيمة باستعمال القيم التي أوجدتها في الفرع **b** .

d) **تحليليًا:** أوجد $f(x)-g(x)$، ثم احسب $\int_0^1[f(x)-g(x)]\,dx$

e) **لفظيًا:** خمِّن طريقة إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** سُئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. في حين أجاب خالد: إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

32) **تبرير:** افترض أن المقطع الرأسي العرضي لنفق يُعطى بالدالة f . اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستعمال $\int_0^d f(x)\,dx$ ، حيث d عرض النفق، إذا كان طوله معلومًا. برِّر إجابتك

33) **اكتب:** اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة.

34) **تحدٍّ:** أوجد $\int_0^t(x^2+2)\,dx$.

35) **اكتب:** وضِّح إمكانية استعمال المثلثات أو الدوائر في تقريب المساحة تحت المنحنيات. أي الشكلين يعطي تقريبًا أفضل برأيك؟

مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 8-4)

36) $j(x)=(2x^3+11x)(2x^8-12x^2)$

37) $f(k)=(k^{15}+k^2+2k)(k-7k^2)$

38) $s(t)=(\sqrt{t}-7)(3t^8-5t)$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما $x=1$: (الدرس 8-3)

39) $y=x^3$

40) $y=x^3-7x^2+4x+9$

41) $y=(x+1)(x-2)$

أوجد كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 8-2)

42) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$

43) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

44) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}$

تدريب على اختبار

45) ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y=-x^2-3x+6$ والمحور x ، في الفترة $[2,6]$ ؟

A 93.33 وحدة مربعة تقريبًا

B 90 وحدة مربعة تقريبًا

C 86.67 وحدة مربعة تقريبًا

D 52 وحدة مربعة تقريبًا

46) أيٌّ مما يأتي يمثِّل مشتقة $n(a)=\frac{4}{a}-\frac{5}{a^2}+\frac{3}{a^4}+4a$ ؟

A $n'(a)=8a-5a^2+3a^4$

B $n'(a)=4a^2-5a^3+3a^4+4$

C $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^3}-\frac{3}{a^5}+4$

D $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{10}{a^3}-\frac{12}{a^5}+4$

47) ما قيمة $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-10}{x^2+5x+6}$ ؟

A $\frac{1}{15}$

B $\frac{2}{15}$

C $\frac{3}{15}$

D $\frac{4}{15}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
The Fundamental Theorem of Calculus

فيما سبق:

درستُ استعمال النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة. (الدرس 5–8)

والآن:

- أجدُ دوال أصلية.
- أستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات:

الدالة الأصلية
antiderivative

التكامل غير المحدد
indefinite integral

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

لماذا؟

سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فمن الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-8 و4-8، أنَّه إذا أُعطيْتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثِّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$ ، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة، وطُلِب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًّا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f.

مثال 1 إيجاد الدوال الأصلية

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3 ، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحققُ المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

b) $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f،

فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-9} = -8x^{-8-1}$. لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثِّل دالة أصلية للدالة f.

تحقق من فهمك

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A) $2x$ **1B)** $-3x^{-4}$

في المثال 1 لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لدالَّةٍ أصلية ينتج عنه دالة أصلية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لدالة أصلية يُنتج دالة أصلية أخرى ؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًّا من الدوال الأصلية لأي دالة. والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C .

كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي — قواعد الدالة الأصلية

قاعدة القوة: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت: إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق: إذا كان لـ $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب ، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثال 2 قواعد الدوال الأصلية

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 4x^7$

$f(x) = 4x^7$ الدالة المعطاة

$F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= \frac{1}{2}x^8 + C$ بسّط

b) $f(x) = \frac{2}{x^4}$

$f(x) = \frac{2}{x^4}$ الدالة المعطاة

$= 2x^{-4}$ أعد كتابة الدالة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$ بسّط

c) $f(x) = x^2 - 8x + 5$

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 8x^1 + 5x^0$ أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$ بسّط

تحقق من فهمك

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A) $f(x) = 6x^4$

2B) $f(x) = \frac{10}{x^3}$

2C) $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية
$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$ ، فمثلًا ، إذا كان $f(x) = 3$ ، فإن $F(x) = 3x$.

ربط المفردات

التكامل غير المحدد
سبب تسمية التكامل غير المحدد بهذا الاسم أنه لا يُعبر عن دالة محددة، بل عن عدد لا نهائي من الدوال الأصلية.

يُعطى الشكل العام للدّالة الأصلية باسم ورمز خاصّين.

مفهوم أساسي — التكامل غير المحدد

يُعطى **التكامل غير المحدد** للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ ، و C ثابت.

مثال 3 من واقع الحياة — التكامل غير المحدد

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 30 ft ، وتمثِّل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالَّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها .

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$s(t) = \int v(t)\, dt$ — العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة

$= \int -32t\, dt$ — $v(t) = -32t$

$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$ — قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -16t^2 + C$ — بسط

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي، 0 s للزمن الابتدائي.

$s(t) = -16t^2 + C$ — الدالة الأصلية لـ $v(t)$

$30 = -16(0)^2 + C$ — $s(t) = 30 , t = 0$

$30 = C$ — بسط

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$s(t) = -16t^2 + 30$ — دالة موقع الكرة

$0 = -16t^2 + 30$ — $s(t) = 0$

$-30 = -16t^2$ — اطرح 30 من كلا الطرفين

$1.875 \approx t^2$ — اقسم كلا الطرفين على -16

$1.369 \approx t$ — خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

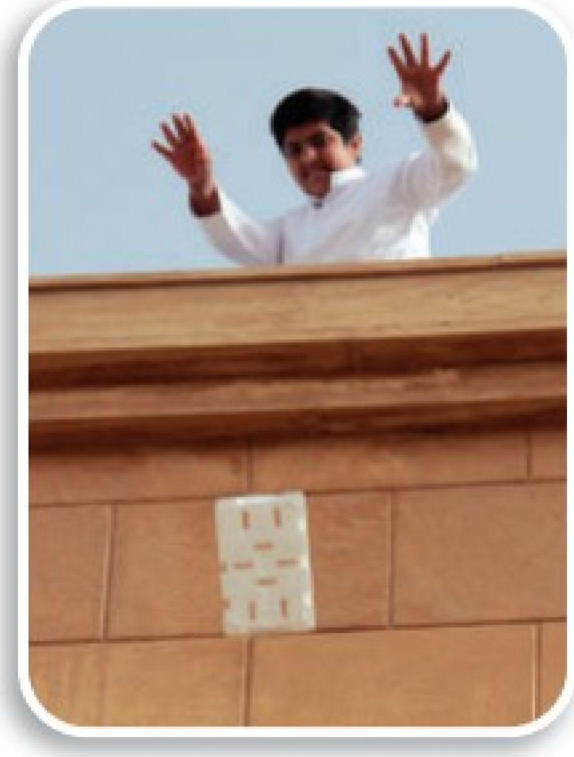
أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

تحقق من فهمك

3) **سقوط حُر:** عند قيام فنِّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.



الربط مع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمائة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًّا التسارع نفسه ، باهمال تأثير الهواء، وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5-4 ، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مفهوم أساسي — النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) .$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد دوال أصلية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

🌎 تاريخ الرياضيات

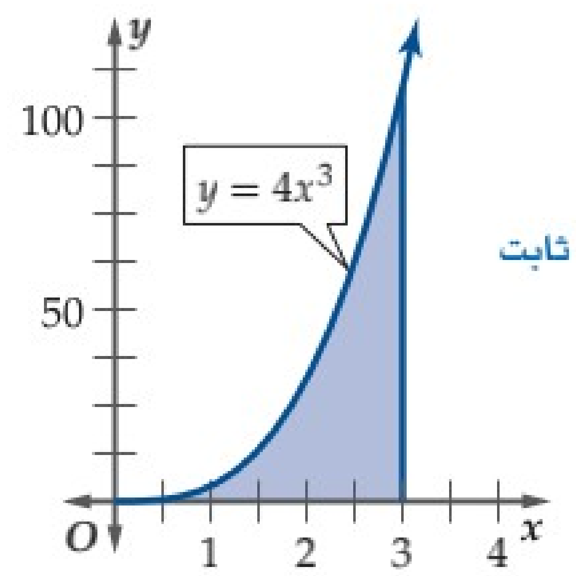
ماريا أجنسن (1718–1799)

عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعدُّ كتابها *Analytical Institutions* **أول كتاب ناقش حسابي التفاضل والتكامل معًا.**

مثال 4 المساحة تحت منحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$؛ أي $\int_1^3 4x^3\, dx$.



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3\, dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$$= x^4 + C$$ بسّط

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، ثم أوجد الفرق.

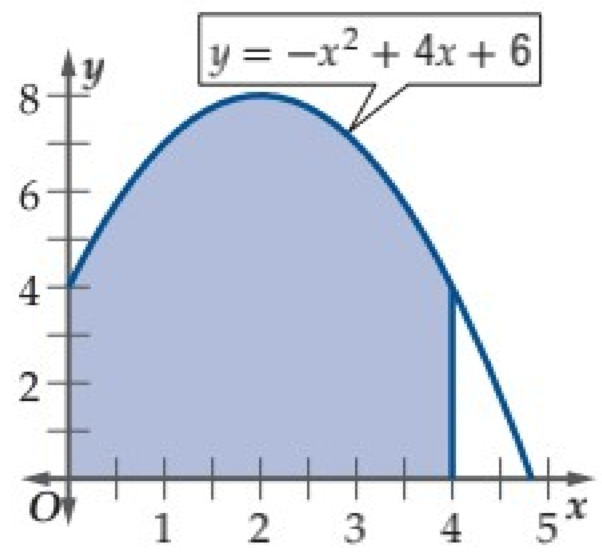
$$\int_1^3 4x^3\, dx = x^4 + C\Big|_1^3$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C)$$ $a = 1 , b = 3$

$$= 81 - 1 = 80$$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4\,x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$؛ أي $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\, dx$



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\, dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C$$ قواعد الدالة الأصلية

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C$$ بسّط

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right)$$ $a = 0 , b = 4$

$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67$$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 6$ والمحور x على الفترة $[0 , 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

✅ تحقق من فهمك

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_2^5 3x^2\, dx$

4B) $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\, dx$

لاحظ أنه عند حساب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، وحساب الفرق بين القيمتين ، فإن C لن تظهر في الناتج؛ وذلك لأن C موجودة في كلتا الدالتين الأصليتين، فإن الفرق بين قيمتي C يساوي صفرًا. لذا فإنه لحساب تكامل محدد باستعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل يمكنك إهمال الثابت C، وعدم كتابته في الدالة الأصلية.

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو غير محدد.

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$$\int (9x - x^3)\, dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$ قواعد الدالة الأصلية

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$$ بسّط

b) $\int_2^3 (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$$\int_2^3 (9x - x^3)\, dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right]$$ $a = 2 , b = 3$

$$= 20.25 - 14 = 6.25$$ بسّط

تنبيه!

التكاملات

صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل مما يأتي:

5A) $\int (6x^2 + 8x - 3)\, dx$

5B) $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx$

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي الدالّة الأصلية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد الدالة الأصلية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة، وهي الدالة الأصلية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محددًا.

مثال 6 التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\, dx$. ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

$$\int_0^{0.5} 360x\, dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5}$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت ، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$$ $a = 0 , b = 0.5$

$$= 45 - 0 = 45$$ بسّط

أي أن الشغل اللازم هو 45J .

تحقق من فهمك

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) $\int_0^{0.7} 476x\, dx$

6B) $\int_0^{1.4} 512x\, dx$

تدرب وحل المسائل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $f(x) = x^5$

2) $f(z) = \sqrt[3]{z}$

3) $q(r) = \frac{3}{4} r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8} r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

4) $w(u) = \frac{2}{3} u^5 + \frac{1}{6} u^3 - \frac{2}{5} u$

5) $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6\,d^2 + 3.5$

6) $m(t) = 16\,t^3 - 12\,t^2 + 20\,t - 11$

7) **سقوط حر:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض. (مثال 3)

a) أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\, dt$.

b) احسب قيمة C عندما $t = 2$s ، $s(t) = 0$.

c) ما ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

احسب كل تكامل مما يأتي: (المثالان 4, 5)

8) $\int (6m + 12m^3)\, dm$

9) $\int_1^4 2\,x^3\, dx$

10) $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\, da$

11) $\int_1^3 \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{2}{3} h^3 - \frac{1}{5} h^4 \right) dh$

12) $\int (3.4\,t^4 - 1.2\,t^3 + 2.3\,t - 5.7)\, dt$

13) $\int (14.2\,w^{6.1} - 20.1\,w^{5.7} + 13.2\,w^{2.3} + 3)\, dw$

14) **حشرات:** تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية. (مثال 6)

a) أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$.

b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟

15) **هندسة:** صمَّم مهندس مدخل بناية على شكل قوس يمكن وصفه بـ $y = -\frac{x^2}{157.5} + 4x$ ، حيث x بالأقدام. احسب مساحة المنطقة تحت القوس. (مثال 6)

احسب كل تكامل مما يأتي:

16) $\int_{-3}^{1} 3\, dx$

17) $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\, dx$

18) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4} \right) dx$

19) $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\, dx$

20) $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\, dx$

21) **مقذوفات:** تُعطى سرعة مقذوف بـ $v(t) = -32t + 120$ ، حيث $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية بعد t ثانية ، ويبلغ ارتفاعه 228 ft بعد 3 s .

a) أوجد أقصى ارتفاع يصله المقذوف.

b) أوجد سرعة المقذوف عندما يصل إلى سطح الأرض.

احسب كل تكامل مما يأتي:

22) $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\, dt$

23) $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\, dt$

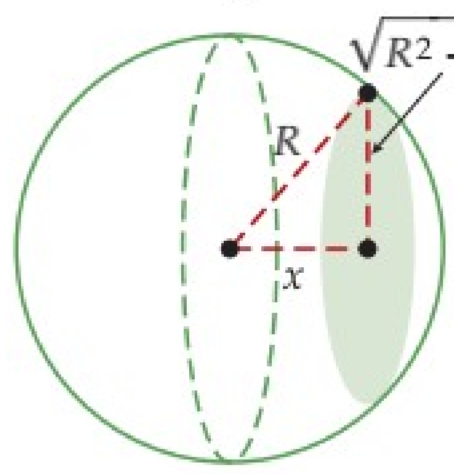
24) $\int_3^2 (4t^3 + 10t + 2)\, dt$

25) $\int_{-x}^{6} (-9t^2 + 4t)\, dt$

26) $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\, dt$

27) $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\, dt$

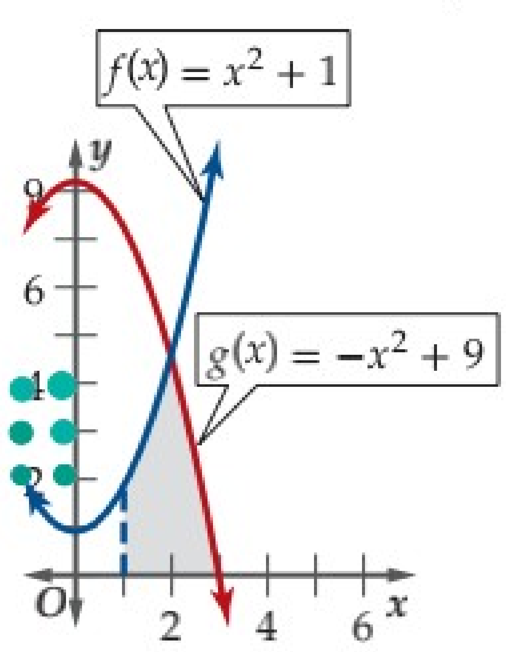
28) **حجم الكرة:** يمكن إيجاد حجم كرة طول نصف قطرها R بقصها إلى حلقات دائرية من خلال مستويات رأسية متوازية ثم إجراء تكامل لحساب مساحات الحلقات الدائرية.



يبلغ طول نصف قطر كل حلقة $\sqrt{R^2 - x^2}$ ، أي أن مساحة كل حلقة هي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$.

أوجد $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)\, dx$ لحساب حجم الكرة .

29) **مساحات:** احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \leq x \leq 3$.



30) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة، ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

a) **هندسيًا:** مثِّل الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ بيانيًا، وظلِّل المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والمحور x، في الفترة $0 \le x \le 4$.

b) **تحليليًا:** احسب كلًّا من:

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx \,,\, \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

c) **لفظيًا:** أعطِ تخمينًا حول مساحة المنطقة الواقعة فوق أو تحت المحور x .

d) **تحليليًا** أوجد التكامل على الفترة كاملة من خلال حساب $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ ، ثم أوجد المساحة الكلية من خلال حساب

$$\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right|$$

e) **لفظيًا:** أعطِ تخمينًا حول الفرق بين قيمة التكامل على الفترة كاملة والمساحة الكلية.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** احسب قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ ، حيث r عدد ثابت.

تبرير: حَدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك:

32) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

33) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$

34) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x)\,dx$

35) **برهان:** أثبت أنه لأي عددين ثابتين n ، m ، فإن $\int_a^b (n + m)\,dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$.

36) **تبرير:** صف قيم $\int_a^b f(x)\,dx$, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, $f(x)$ ، عندما يقع التمثيل البياني للدالة f تحت المحور x في الفترة $a \le x \le b$.

37) **اكتب:** بيِّن لماذا يمكننا إهمال الحد الثابت C في الدالة الأصلية عند حساب التكامل المحدد.

مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي: (الدرس 8-5)

38) $\int_{-2}^{2} 14x^6\,dx$

39) $\int_0^6 (x + 2)\,dx$

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 8-4)

40) $j(k) = \dfrac{k^8 - 7k}{2k^4 + 11k^3}$

41) $g(n) = \dfrac{2n^3 + 4n}{n^2 + 1}$

42) إذا كان $\lim_{x \to 1} (2x^2 + ax) = 8$ ، فأوجد قيمة a. (الدرس 8-2)

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (الدرس 8-3)

43) $y = x^2 + 3$

44) $y = x^3$

تدريب على اختبار

45) إذا كان $\int_0^2 k\,x\,dx = 6$ ، فما قيمة k ؟

A 1

B 2

C 3

D 4

الفصل

8 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تقدير النهايات بيانيًا (الدرس 8-1)

- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.
- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c غير موجودة إذا اقتربت $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين، أو عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو اليمين أو كليهما، أو عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من c.

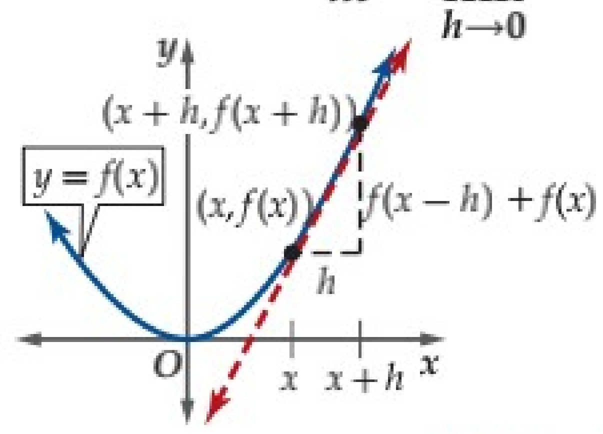
حساب النهايات جبريًا (الدرس 8-2)

- يمكن إيجاد نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية عادةً من خلال التعويض المباشر.
- إذا توصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ عند حساب نهاية دالة نسبية، فبَسِّط العبارة جبريًا من خلال تحليل كل من البسط والمقام أو إنطاق البسط أو المقام، ثم اختصار العوامل المشتركة.

المماس والسرعة المتجهة (الدرس 8-3)

- مُعدّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



المشتقة (الدرس 8-4)

- يُرمز لمشتقة $f(x) = x^n$ بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة $f'(x) = nx^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 8-5)

- تُعطى مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x بالصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

، حيث a ، b هما الحدان الأعلى والأدنى للتكامل،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الدرس 8-6)

- الدالة الأصلية لـ $f(x) = x^n$ هي $F(x)$ وتُعطى بالصيغة $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ، حيث C عدد ثابت
- إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

المفردات

- النهاية من جهة واحدة ص 346
- النهاية من جهتين ص 346
- التعويض المباشر ص 355
- الصيغة غير المحددة ص 356
- المماس ص 365
- مُعدل التغيّر اللحظي ص 365
- قسمة الفرق ص 365
- السرعة المتجهة اللحظية ص 367
- المشتقة ص 372
- الاشتقاق ص 372
- المعادلة التفاضلية ص 372
- المؤثر التفاضلي ص 372
- التجزيء المنتظم ص 382
- التكامل المحدد ص 383
- الحد الأدنى ص 383
- الحد الأعلى ص 383
- مجموع ريمان الأيمن ص 383
- التكامل ص 383
- الدالة الأصلية ص 389
- التكامل غير المحدد ص 390
- النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل ص 391

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو ________ ، والذي يمكن تمثيله بميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

2) يمكن إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x باستعمال ________ .

3) يمكن إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية باستعمال ________ ، وذلك إذا كان مقام الدالة النسبية لا يساوي صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية .

4) إذا كان $F'(x) = f(x)$ ، فإن $F(x)$ تُسمى ________ لـ $f(x)$.

5) يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بـ ________ .

6) تُسمى عملية إيجاد المشتقة بـ ________ .

7) إذا سُبقت دالة بـِ ________ $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

8) يطلق على السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة ________ .

مراجعة الدروس

8-1 تقدير النهايات بيانيًا (الصفحات 344 - 352)

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim_{x \to 3} (2x - 7)$

10) $\lim_{x \to 1} (0.5x^4 + 3x^2 - 5)$

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

11) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x + 20}{x - 4}$

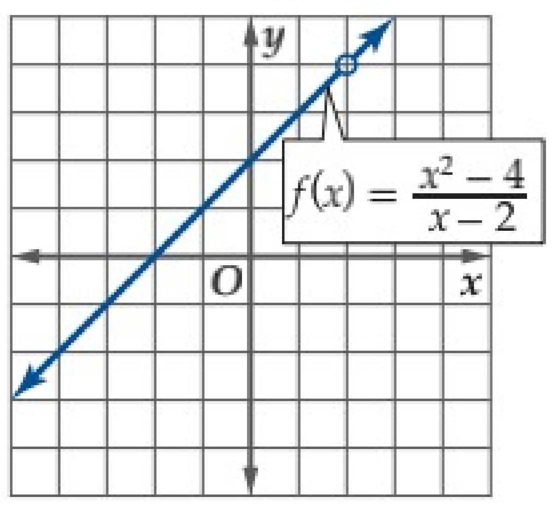
13) $\lim_{x \to 4} \frac{9}{x^2 - 8x + 16}$

14) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x - 10}{x - 2}$

مثال 1

قدّر $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ أدناه أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 ، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من 4 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ بالعدد 4 .



التعزيز عدديًا: كوّن جدول قيم باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ← ... → x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

يبيّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 .

8-2 حساب النهايات جبريًا (الصفحات 353-362)

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 2x + 10}{x}$

16) $\lim_{x \to -1} (5x^2 - 2x + 12)$

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

17) $\lim_{x \to 25} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - 5}$

18) $\lim_{x \to 2} (-3x^3 - 2x^2 + 15)$

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 2x - 8}$

20) $\lim_{x \to \infty} (2 - 4x^3 + x^2)$

مثال 2

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ذلك ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1)$

بما أن هذه نهاية كثيرة حدود؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1) = 2(2)^3 - 2^2 + 4(2) + 1$$
$$= 16 - 4 + 8 + 1 = 21$$

b) $\lim_{x \to -4} \frac{2x - 7}{2 - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها ليس صفرًا عندما $x = -4$ ؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -4} \frac{2x - 7}{2 - x^2} = \frac{2(-4) - 7}{2 - (-4)^2} = \frac{-8 - 7}{2 - 16} = \frac{15}{14}$$

الفصل 8

دليل الدراسة والمراجعة

8-3 المماس والسرعة المتجهة (الصفحات 365-370)

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

21) $y = 6 - x\,, (-1, 7)\,, (3, 3)$

22) $y = x^2 + 2\,, (0, 2)\,, (-1, 3)$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

23) $y = -x^2 + 3x$

24) $y = x^3 + 4x$

تمثّل $s(t)$ في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد t ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

25) $s(t) = 15t - 16t^2\,, t = 0.5$

26) $s(t) = -16t^2 - 35t + 400\,, t = 3.5$

تمثّل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك . أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن:

27) $h(t) = 12t^2 - 5$

28) $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$

مثال 3

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

$m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$	صيغة مُعدل التغير اللحظي
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$	$x = 2$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$	$f(2+h) = (2+h)^2\,, f(2) = 2^2$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$	فُك الأقواس
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(4+h)}{h}$	بسّط، ثم حلّل
$= \lim\limits_{h\to 0} (4+h)$	اقسم على h
$= 4 + 0 = 4$	عوّض

أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4 .

8-4 المشتقات (الصفحات 372-379)

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

29) $g(t) = -t^2 + 5t + 11\,, t = -4\,, 1$

30) $m(j) = 10j - 3\,, j = 5\,, -3$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

31) $p(v) = -9v + 14$

32) $z(n) = 4n^2 + 9n$

33) $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6}$

34) $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}} + 5$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

35) $f(m) = \dfrac{5 - 3m}{5 + 2m}$

36) $m(q) = \dfrac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$

مثال 4

أوجد مشتقة $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5\,, g(x) = x^3 + 2$. لذا، $h(x) = f(x)/g(x)$. أوجد مشتقة كل من $f(x), g(x)$

$f(x) = x^2 - 5$	من الفرض
$f'(x) = 2x$	قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة
$g(x) = x^3 + 2$	من الفرض
$g'(x) = 3x^2$	قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة

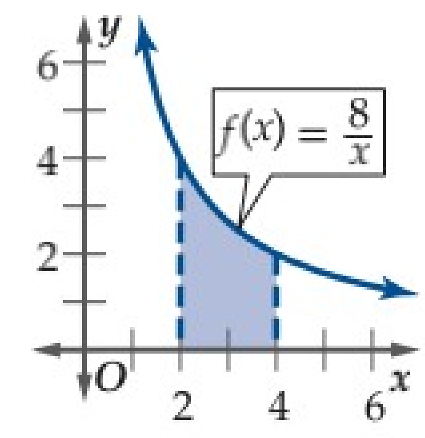
استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	قاعدة مشتقة القسمة
$= \dfrac{2x(x^3+2) - (x^2-5)\,3x^2}{(x^3+2)^2}$	عوّض
$= \dfrac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3+2)^2}$	بسّط

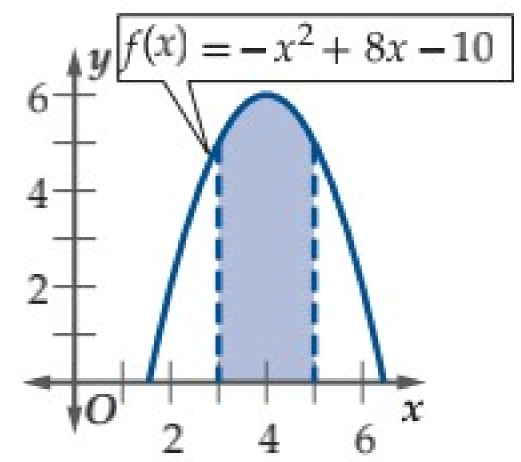
8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل (الصفحات 380 - 388)

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5 مستطيلات:

37)



38)



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

39) $\int_1^2 2x^2\, dx$

40) $\int_0^3 (2x^3 - 1)\, dx$

41) $\int_0^2 (x^2 + x)\, dx$

42) $\int_1^4 (3x^2 - x)\, dx$

مثال 5

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x^2$ والمحور x ، في الفترة $[0, 2]$ أو $\int_0^2 2x^2\, dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ $b = 2, a = 0$

$x_i = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$ $a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$

$\int_0^2 2x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$ $x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2}\right)$ بسّط

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ صيغ المجموع

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$ بسّط

$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$ أخرج عاملًا مشتركًا، ثم اقسم على n^2

$= \frac{16}{3} \approx 5.33$ خصائص النهايات

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الصفحات 389 - 395)

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

43) $g(n) = 5n - 2$

44) $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

45) $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

46) $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

احسب كل تكامل مما يأتي:

47) $\int 8x^2\, dx$

48) $\int (2x^2 - 4)\, dx$

49) $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\, dx$

50) $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\, dx$

مثال 6

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{4}{x^5}$

$f(x) = 4x^{-5}$ أعد كتابة الدالة المعطاة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= x^{-4} + C = -\frac{1}{x^4} + C$ بسّط

b) $f(x) = x^2 - 7$

$f(x) = x^2 - 7$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 7x^0$ أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$ بسّط

دليل الدراسة والمراجعة

تطبيقات ومسائل

51) حيوانات: يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بالدالة $P(t) = \frac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$ ، حيث $t \geq 5$. **(الدرس 8-1)**

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات.

b) أوجد $\lim_{t\to\infty} P(t)$ ؟

52) تحف فنية: لدى سلمان تحفة فنية يزداد سعرها كل سنة. افترض أن الدالة $v(t) = \frac{800t}{4t + 19}$ تمثِّل سعر التحفة بعد t سنة بمئات الريالات. **(الدرس 8-1)**

a) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$.

b) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لتقريب سعر التحفة عندما $t = 3 , 6 , 10$.

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لحساب $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر التحفة.

e) بعد 10 سنوات، قدَّم أحد المعارض الفنية عرضًا لشراء التحفة من سلمان بسعر 30000 ريال، هل من الأفضل بيعها بهذا السعر؟ برِّر إجابتك.

53) مبيعات: افترض أن الدالة $v(t) = \frac{450}{5 + 25(0.4)^t}$ تمثِّل سعر سلعة ما بالريالات بعد t سنة. **(الدرس 8-2)**

a) أكمل الجدول أدناه:

السنة	0	1	2	3
السعر				

b) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$ إذا كانت موجودة.

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر السلعة.

54) صواريخ: أُطلق صاروخ رأسيًا إلى أعلى بسرعة 150 ft/s. افترض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية يُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. **(الدرس 8-3)**

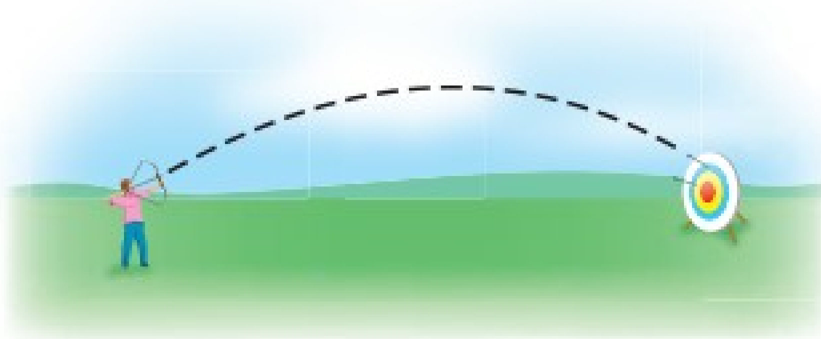
a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ.

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟

55) رماية: أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/s باتجاه هدف. افترض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. **(الدرس 8-3)**



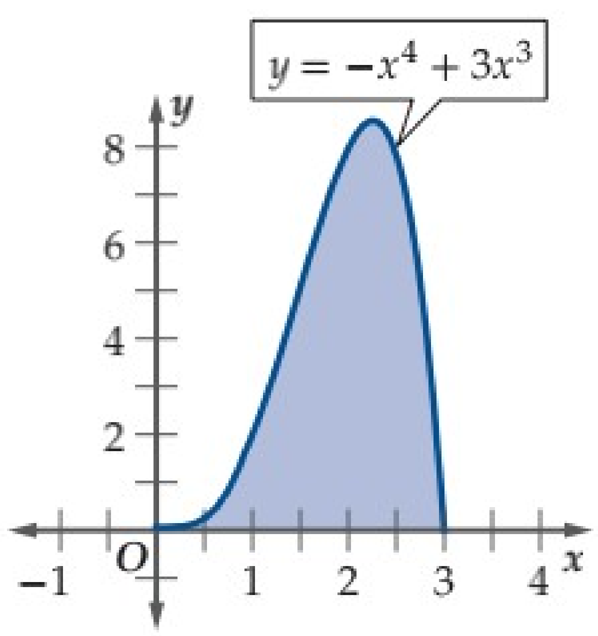
a) اكتب معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم .

b) ما سرعة السهم بعد 0.5/s من إطلاقه؟

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟

56) تصميم: يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه؛ حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي ، ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعارًا إذا كانت x بالبوصات؟ **(الدرس 8-6)**



57) ضفادع: تمثِّل الدالة $v(t) = -32t + 26$ سرعة قفز ضفدع بالأقدام لكل ثانية ، حيث t الزمن بالثواني. **(الدرس 8-6)**

a) أوجد موقع الضفدع $s(t)$، على فرض أن $s(t) = 0$ عندما $t = 0$.

b) ما الزمن الذي يستغرقه الضفدع في الهواء عند قفزه؟

58) طيور: سقطت حبة قمح من منقار حمامة تطير على ارتفاع 20 ft ، وتُعطى سرعة سقوط الحبة بالدالة $v(t) = -32t$ ، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ بالأقدام لكل ثانية. **(الدرس 8-6)**

a) أوجد موقع الحبة $s(t)$ عند أي زمن.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الحبة حتى تصل إلى سطح الأرض.

اختبار الفصل

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

3) $\lim_{x \to 7} \frac{6}{x - 7}$

4) $\lim_{x \to \infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالريال عند إنتاج x جهاز بالدالة $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية.

b) فَسِّر الناتج في الفرع a.

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4} - 2}$

7) $\lim_{x \to 9} (2x^3 - 12x + 3)$

8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x \to \infty} (x^2 - 7x + 2)$

10) $\lim_{x \to \infty} (2x^3 - 8x^2 - 5)$

11) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x - 1}{-x^4 + 7x^3 + 4}$

12) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{25 + x} - 4}{x}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$ ؟

A $-\frac{1}{9}$

B 0

C $\frac{1}{9}$

D غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y = x^2 + 2x - 8$, $(-5, 7)$, $(-2, -8)$

15) $y = \frac{4}{x^3} + 2$, $(-1, -2)$, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

16) $y = (2x + 1)^2$, $(-3, 25)$, $(0, 1)$

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t) = 9t + 3t^2$

18) $h(t) = 10t^2 - 7t^3$

19) $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x) = -3x - 7$

21) $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$

22) $w(y) = 3y^{\frac{4}{3}} + 6y^{\frac{1}{2}}$

23) $g(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$

24) $h(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + t}{t^2}$

25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية c بالريال لإنتاج x كرة قدم يوميًّا بالدالة $c(x) = 15 - 0.005x$.

a) أوجد دالة تمثّل التكلفة الحقيقية .

b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\, dx$

27) $\int_3^8 10x^4\, dx$

28) $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\, dx$

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a) = 4a^3 + 9a^2 - 2a + 8$

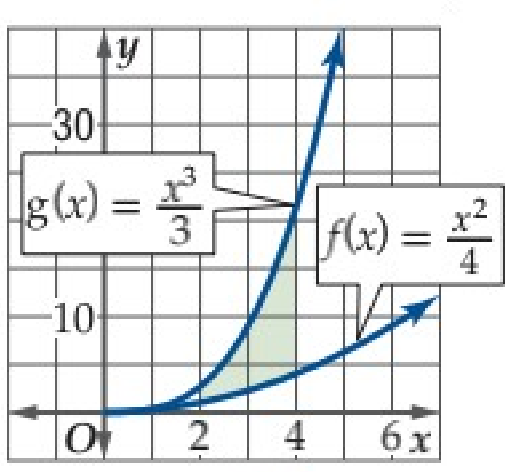
30) $w(z) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{5}$

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\, dx$

32) $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\, dx$

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$، $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$ في الشكل أدناه؟



A $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة

B $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

C $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

D 16 وحدة مساحة

الصيـغ

الإحداثيات القطبية

صيغة القسمة	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$	صيغة الضرب	$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$
المسافة بالصيغة القطبية	$\sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$	نظرية ديموافر	$z^n = [r(\cos\theta + i \sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$
الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n})$		

الاحتمال والإحصاء

صيغة الدرجة المعيارية (قيمة z)	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة احتمال ذات حدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x}$

النهايات

خاصية الجمع	$\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$	خاصية الفرق	$\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$\lim_{x \to c}[kf(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$	خاصية الضرب	$\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$
خاصية القسمة	$\lim_{x \to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}, \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$	خاصية القوة	$\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x \to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}, \lim_{x \to c} f(x) > 0$	السرعة المتجهة	السرعة المتجهة اللحظية: $v(t) = \lim_{h \to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ السرعة المتوسطة المتجهة: $v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

الصيغ

المشتقات

قاعدة مشتقة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.	**قاعدة مشتقة المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.
قاعدة مشتقة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$	**قاعدة مشتقة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكاملات

التكامل غير المحدد	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

الرموز

مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$	الانحراف المعياري لعينة	S
تباديل n مأخوذة r في كل مرة	${}_nP_r$	الانحراف المعياري لمجتمع	σ
توافيق n مأخوذة r في كل مرة	${}_nC_r$	مشتقة الدالة $f(x)$	$f'(x)$
النهاية عندما تقترب x من c	$\lim\limits_{x \to c}$	التكامل غير المحدد	$\int$
الوحدة التخيلية	i	التكامل المحدد	$\int_a^b$
المجموع	$\sum$	الدالة الأصلية للدالة $f(x)$	$F(x)$
المجموع من $n = 1$ إلى k	$\sum\limits_{n=1}^{k}$	الحدث المتمم	A'
الوسط لعينة	$\overline{x}$	احتمال الحدث A	$P(A)$
الوسط لمجتمع	μ	احتمال B بشرط A	$P(B \mid A)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445