الفصل١ (العلاقات والدوال النسبية)

تسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل $\frac{1700}{d-3}$ "عبارة نسبية"

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

بسّط العبارة: $\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)}$

$\frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)} = \frac{5x(x+3)(x+1)}{(x-6)(x+3)(x-3)}$ حلل كلاً من البسط والمقام الى عوامل

$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x+3)}}}$ اختصر العوامل المشتركة

$= \frac{5x(x+1)}{(x-6)(x-3)}$ بسّط

تستعمل طريقة ضرب الكسور او قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها ، فعندما تضرب كسرين فانك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام . اما عند قسمة كسرين فانك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه ، او تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه .

والجدول الاتي يلخص قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها

تبسيط الكسور المركبة : الكسر المركب يحوي بسطه ومقامه او احدهما كسورا . والعبارات الاتية كسور مركبة :-

$$\frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3} \qquad \frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}} \qquad \frac{\frac{8}{x}}{x-2} \qquad \frac{\frac{c}{6}}{5d}$$

جمع العبارات النسبية وطرحها : عند جمع عبارتين نسبيتين او طرحهما يجب ان نوحد مقاميهما ، تماما كما في جمع الكسور وطرحها

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع العبارات النسبية وطرحها

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية أو طرحها، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع أو اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0, d \neq 0$ ، فإنَّ:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd} \;,\; \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

مثال: $\frac{2}{5} \pm \frac{1}{3}=\frac{2\cdot3}{5\cdot3} \pm \frac{5\cdot1}{5\cdot3}=\frac{2\cdot3 \pm 5\cdot1}{5\cdot3}$

.

تمثيل دوال المقلوب بيانيا :- خط التقارب لدالة : هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة . ولدالة المقلوب $f(x)=\frac{1}{a(x)}$ خط تقارب رأسي عند القيمة المستثناة من مجالها وخط تقارب افقي يبين سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

مثال: $\frac{2}{9}\cdot\frac{15}{4}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}\cdot5}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot3\cdot\underset{1}{\cancel{2}}\cdot2}=\frac{5}{3\cdot2}=\frac{5}{6}$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

مثال: $\frac{3}{5}\div\frac{6}{35}=\frac{3}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{5}}\cdot7}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot2\cdot\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{7}{2}$

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

$\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \dfrac{a+b}{4} \div \dfrac{a^2+b^2}{4}$ اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{a+b}{4} \cdot \dfrac{4}{a^2+b^2}$ اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

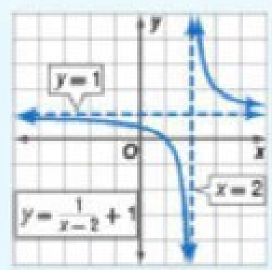
$= \dfrac{a+b}{\cancel{4}_{1}} \cdot \dfrac{\cancel{4}^{1}}{a^2+b^2} = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ اختصر العوامل المشتركة وبسّط

مفهوم أساسي خطوط التقارب للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ ، $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفرًا، أي أن خط التقارب الرأسي للدالّة هو $x = b$ ، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

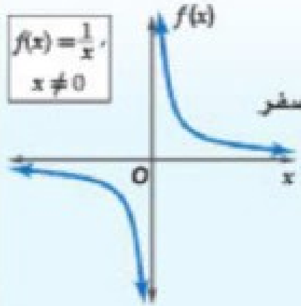
مثال:



وهذا المفهوم هام جدا للاختبار

مفهوم أساسي الدالّة الرئيسة (الأم) لدوالّ المقلوب

أضف إلى مطويتك



الدالّة الرئيسة (الأم): $f(x) = \frac{1}{x}$

شكل التمثيل البياني: قطع زائد

المجال والمدى: جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر

خطا التقارب: $x = 0$ و $y = 0$

المقطعان: لا يوجد

تكون الدالّة غير معرّفة عندما: $x = 0$

مثال :- اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية للدالة وأوجد المجال والمدى .

$$f\,(x) = \frac{2}{x+3} + 1$$

الحل

خط التقارب الرأسي <<< نعكس اشارة رقم المقام يصبح $x = -3$

خط التقارب الافقي <<< $Y = 1$

المجال <<< R ما عدا $X = -3$

المدى <<< R ماعدا $Y = 1$

نقطة الانفصال (هام) :- هي النقطة التي تكون الدالة غير معرفة عندها

مفهوم أساسي نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

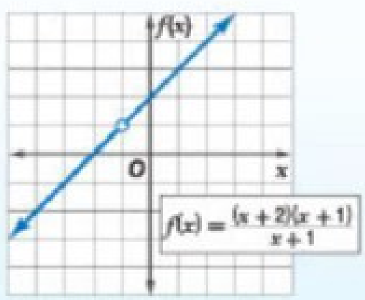
التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $b(x) \neq 0$، وكان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

مثال:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$
$$= x + 2\,,\ \ x \neq -1$$

نقطة الانفصال هي:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$



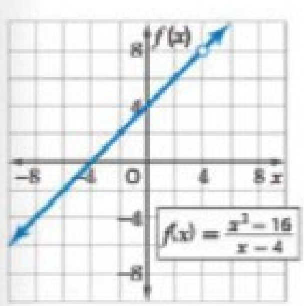
مثال 3 التمثيل البياني لدالة تتضمن نقطة انفصال

مثّل الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ بيانيًا .

لاحظ أن مجال الدالة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}^{1}}{\cancel{x-4}_{1}} = x + 4$$

لذا فإن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ هو نفسه التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$ مع وجود فجوة في التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 4$ عندما $x = 4$.



دوال التغير

تسمى العلاقة عندما تكون النسبة بين كميتين متغيرتين ثابتة تغيرا طرديا

مفهوم أساسي — التغيُّر الطردي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغير y طرديًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كانت $y = 3x$ ، فإن y تتغير طرديًا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3. فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = kx_2 \quad , \quad y_1 = kx_1$$

$$\frac{y_2}{x_2} = k \qquad \frac{y_1}{x_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$ (يسمَّى هذا التناسب تناسبًا طرديًا؛ أي أن y تتناسب طرديًا مع x).

ويمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y .

مفهوم أساسي — التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كانت: $x = 6, z = -2, y = -60$ ، وكانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x وَ z حيث إن: $y = -60 = 5(6)(-2) = kxy \Rightarrow k = 5$ ، فإن قيمة y عندما $x = 4, z = -5$ تكون: $y = 5 \times -5 \times 4 = -100$.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعلمتَ بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1z_1 \quad , \quad y_2 = kx_2z_2$$

$$\frac{y_1}{x_1z_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2z_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_2}{x_2z_2} = \frac{y_1}{x_1z_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًا مع حاصل ضرب x ، z).

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب هناك نوع ثالث من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي** ، فإذا تغيّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هوَ k .

تتغير كميتان موجبتان أو سالبتان معًا عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى. وتتغير كميتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بزيادة الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلَّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التغيُّر العكسي

التعبير اللفظي: تتغيّر y عكسيًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $x\,y = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًا مع x. فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ بينما عندما $x = 3$ فإن $y = 4$.

هناك نوع رابع من التغيُّر هو **التغيُّر المركّب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \qquad , \qquad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \qquad\qquad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمَى هذا التناسب تناسبًا مركّبا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

نهاية الفصل الاول

يُحدَّد كلُّ حدٍّ في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدِّ الذي يسبقه مباشرة. وتُسمَّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: 3, 6, 9, 12, 15 هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كلُّ حدٍّ على الحدِّ الذي يسبقه بمقدار 3 .

$$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15$$

مثال 1 تحديد المتتابعة الحسابية

بيِّن ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعتين الآتيتين حسابية أم لا:

a) $5, -6, -17, -28, \ldots$

$$5 \xrightarrow{-11} -6 \xrightarrow{-11} -17 \xrightarrow{-11} -28$$

الفرق الثابت هو -11

المتتابعة حسابية

b) $-4, 12, 28, 42, \ldots$

$$-4 \xrightarrow{+16} 12 \xrightarrow{+16} 28 \xrightarrow{+14} 42$$

الفرق غير ثابت

المتتابعة ليست حسابية

الحد النوني في المتتابعة الحسابية

المتتابعة الهندسية : **المتتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أيِّ حدٍّ من حدودها بضرب الحدِّ السابق له مباشرة في عدد ثابت يُسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدِّ والحدِّ السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أيْ أنَّ كلَّ حدٍّ في المتتابعة هو 4 أمثال الحدِّ السابق له مباشرة.

$$\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$$

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بيِّن ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

a) $-2, 6, -18, 54, \ldots$

أوجد النسبة بين كل حدّين متتاليين.

$$\frac{54}{-18} = -3 \quad , \quad \frac{-18}{6} = -3 \quad , \quad \frac{6}{-2} = -3$$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

b) $8, 16, 24, 32, \ldots$

$$\frac{24}{16} = 1.5 \quad , \quad \frac{16}{8} = 2$$

بما أن النسبتين غير متساويتين؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تستعمل الصيغة الاتية للتعبير عن الحد النوني في متابعة حسابية حدَها الاول a_1 . وأساسها d

، حيث n عدد طبيعي

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ستشتق هذه الصيغة في السؤال (58)

مثال 1 إيجاد حدّ معيّن في متتابعة حسابية

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: ... , 30 , 23 , 16 , 9

الخطوة 1 : أوجد أساس المتتابعة.

الفرق بين أيّ حدّين متتاليين: $16 - 9 = 7$

إذن $d = 7$

الخطوة 2 : أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_{12} = 9 + (12-1)(7)$	$a_1 = 9 ,\ d = 7 ,\ n = 12$
$= 9 + 77 = 86$	بسّط

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال رمز المجموع

المتسلسلات الحسابية : يمكنك الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة؛ لذا **فالمتسلسلة الحسابية** هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي**، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي: المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1 , a_n , n	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
بالصيغة البديلة	a_1 , d , n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

مفهوم أساسي: رمز المجموع

أضف إلى مطويتك

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

آخر قيمة لـ k

أول قيمة لـ k

صيغة حدود المتسلسلة

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \dots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \dots + 50$$

الحد النوني في المتتابعة الهندسية

مفهوم أساسي — **الحد النوني في المتتابعة الهندسية** — أضف إلى مطويتك

تُستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1 ، وأساسها r ، حيث n عدد طبيعي:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

الأوساط الهندسية هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متتابعة هندسية

المتسلسلات الهندسية : يمكنك الحصول على **المتسلسلة الهندسية** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة الهندسية. ويُرمز لمجموع أول n حدًّا في المتسلسلة بالرمز S_n. ويمكنك إيجاده باستعمال أيٍّ من الصيغتين الآتيتين:

مفهوم أساسي — **المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية** — أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

نهاية الفصل ٢

الفصل ٣ (الاحتمالات) فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة ، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة ، او الجدول او الرسم الشجري .

مبدأ العد الأساسي : ايجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة .

مثال 1 **تمثيل فضاء العيِّنة**

أَلقيت قطعة نقد مرتين، مثِّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اقرن كل ناتج ممكنٍ من الرمية الأولى بكل النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L , L   T , L

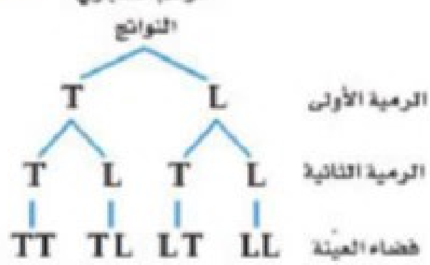
L , T   T , T

الجدول

دوِّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

الرسم الشجري



مثال > بكم طريقة يمكن أن يجلس خمس افراد بطرق مختلفة ؟

الحل

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

التباديل والتوافيق:

مفهوم أساسي المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتّبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدَّد مسبقًا في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطيًّا وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nP_r$ حيث

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل مع التكرار

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

التوافيق : هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التوافيق

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nC_r$ ، حيث $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)}$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$$_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

الاحتمال الهندسي

يسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسا هندسيا مثل الطول أو المساحة **احتمالا هندسيا**

مفهوم أساسي — الاحتمال والأطوال

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا على $\overline{AD}$، فإن:

$$P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

مثال 1 استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

مثال هام !

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$ كما في الشكل أدناه، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

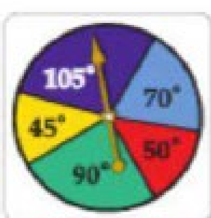
$P(X \in \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$ احتمال الأطوال

$= \frac{7}{14}$ $KL = 7 , JM = 3 + 7 + 4 = 14$

$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ بسّط

الاحتمال والمساحة، تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

مثال 4 استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

قياس زاوية القطاع الأصفر 45°

P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر) $= \frac{45}{360} \approx 12.5\%$

b) P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)

قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°

P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) $= \frac{105}{360} \approx 29\%$

c) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق)

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50° + 70° = 120°$

P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) $= \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\%$

تتكون الحادثة المركبة من حادثتين بسيطتين او اكثر .

ويمكن ان تكون الحوادث المركبة مستقلة او غير مستقلة .

تكون A و B حادثتين مستقلتين إذا كان حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B

تكون A و B حادثتين غير مستقلتين اذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B

وهذا المثال يوضّح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالَي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا .

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات، وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لِـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث: $P(A) \neq 0$.

احتمال الحوادث المتنافية :

مفهوم أساسي — احتمال الحادثتين المتنافيتين — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كل منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

مثال 2 من واقع الحياة — الحوادث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينيًا أو فيزيائيًا؟

مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينيًا وفيزيائيًا في آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني.
وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي.
مجموع الكتب هو $35 = 13 + 12 + 10$.

$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$ احتمال الحادثتين المتنافيتين

$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$ $P(A1) = \frac{10}{35}$ ، $P(A2) = \frac{12}{35}$

$= \frac{22}{35}$ اجمع

لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريبًا.

نهاية الفصل ٢

الفصل ٣ (حساب المثلثات)

حساب المثلثات يعرف بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث واضلاعه

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جميع الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\sin\theta\ (\theta\ \text{جيب}) = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\csc\theta\ (\theta\ \text{قاطع تمام}) = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

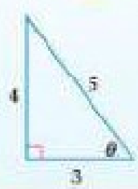
$\cos\theta\ (\theta\ \text{جيب تمام}) = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\sec\theta\ (\theta\ \text{قاطع}) = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta\ (\theta\ \text{ظل}) = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\qquad$ $\cot\theta\ (\theta\ \text{ظل تمام}) = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

أمثلة:

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ $\qquad$ $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

$\csc\theta = \dfrac{5}{4}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{3}{4}$



مثال 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية في C، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ عندما يكون:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $BC = 8$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $AC = 15$، طول الوتر: $AB = 17$

$\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{8}{17}$ $\qquad$ $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{15}{17}$ $\qquad$ $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{8}{15}$

$\csc\theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \dfrac{17}{8}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \dfrac{17}{15}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \dfrac{15}{8}$

مفهوم أساسي

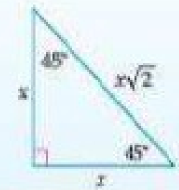
بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

أضف إلى مطويتك

نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه °30 –°60 –°90 أن:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$



نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه °45 –°45 –°90 أن:

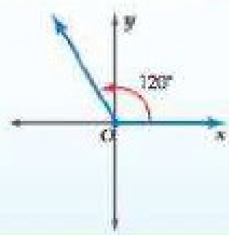
$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 45^\circ = 1$

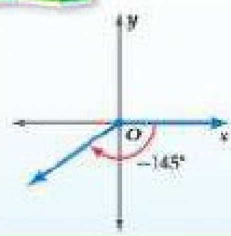
مفهوم أساسي

قياسات الزوايا

أضف إلى مطويتك

يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة؛ ويكون قياس الزاوية سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.





مثال 1

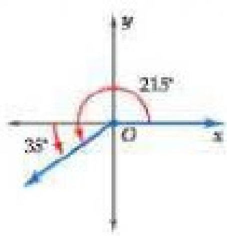
رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلًا من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

a) °215

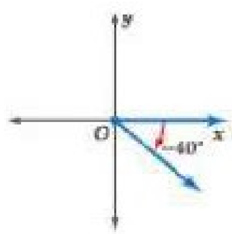
$215^\circ = 180^\circ + 35^\circ$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °35 بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء السالب من المحور x .



b) °40−

قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية °40 بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءًا من الجزء الموجب من المحور x .



مفهوم أساسي — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ rad}}$

مثال 4 التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

a) $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$

$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) $\frac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}}$$

$$= \frac{900°}{2} = 450°$$

الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة

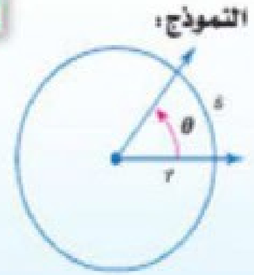
مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: طول القوس من الدائرة (s)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

الرموز: $s = r\theta$

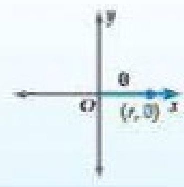
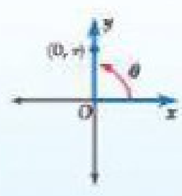
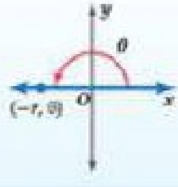
النموذج:

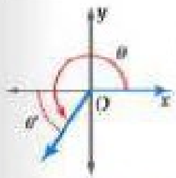


إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y، فإن الزاوية θ تُسمّى **زاوية ربعية**.

مفهوم أساسي — الزوايا الربعية

أضف إلى مطويتك

$\theta = 0°$ أو $\theta = 0 \text{ rad}$	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi \text{ rad}$	$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
			

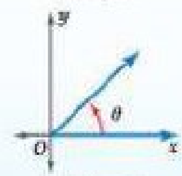
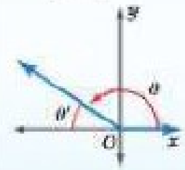
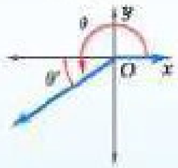
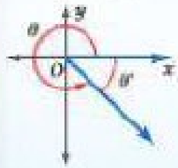


الدوالّ المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يبيّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الزوايا المرجعية

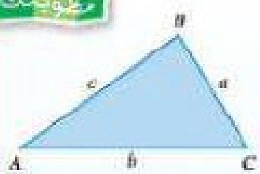
الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مساحة المثلث

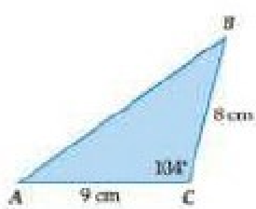
التعبير اللفظي: مساحة المثلث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولَي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.



الرموز: $k = \frac{1}{2}bc \sin A$ $\quad k = \frac{1}{2}ac \sin B$ $\quad k = \frac{1}{2}ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.



$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104°$.

$k = \frac{1}{2}ab \sin C$	صيغة مساحة المثلث
$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$	عوّض
≈ 34.9	بسّط

إذن المساحة تساوي $34.9\,cm^2$ تقريباً.

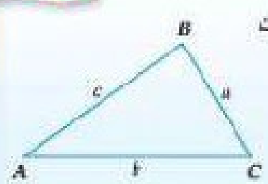
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون الجيوب

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



حلّ المثلث يعني استعمال القياسات المُعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه.

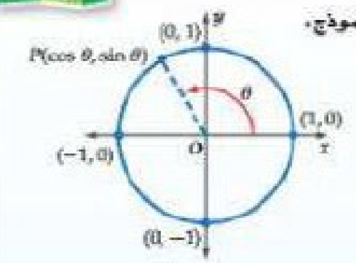
مفهوم أساسي

دوال في دائرة الوحدة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$، فإن: $\cos \theta = x,\ \sin \theta = y$

النموذج:



الرموز: $P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$

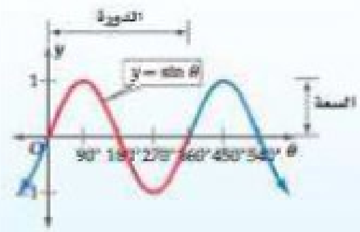
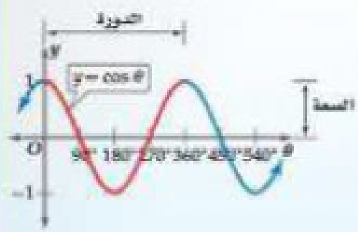
مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن: $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

كلٌّ من $y = \sin \theta$ ، $x = \cos \theta$ دالّةٌ بالنسبة إلى θ. وتُسمّى كلٌّ منهما **دالّة دائرية**، لأن تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.

مفهوم أساسي

دالتا الجيب وجيب التمام

أضف إلى مطويتك

الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

يمكنك تطبيق ما تعلمتهُ في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوالّ الأخرى على التمثيل البياني للدوالّ المثلّثية في صورتها العامة: $y = a \sin b\theta,\ y = a \cos b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360°}{|b|}$.

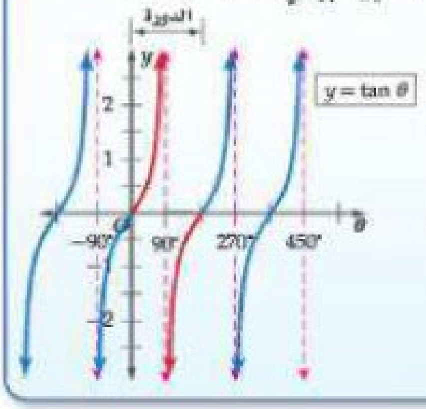
مفهوم أساسي

دالة الظل

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم)	$y = \tan \theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180° n,\ n \in Z\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرّفة
طول الدورة	$180°$

التمثيل البياني للدالة



طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180°}{|b|}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالة. وخطوط التقارب الرأسية لها تكون عند المضاعفات الفردية للعدد $\left(\frac{180°}{|b|} \cdot \frac{1}{2}\right)$

نهاية الفصل ٤